

Estimation Structurée de la Covariance du Bruit en Détection Adaptative.

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le XX XX XXXX

pour l'obtention du

Doctorat de Sciences Physiques de l'université Paris Ouest -
Nanterre La Defense
(spécialité Traitement du Signal)

par

Guilhem PAILLOUX

Composition du jury :

Président :

Rapporteurs : Professeur François VINCENT (ISAE)
Dr Sylvie MARCOS (Directrice de Recherche, CNRS L2S)

Examineurs : Professeur Yannick BERTHOUMIEU (ENSEIRB)
Professeur Philippe FORSTER (Directeur de thèse Université Paris Ouest)
Dr Jean-Philippe OVARLEZ (Maître de Recherche, Encadrant ONERA)
Dr Frédéric PASCAL (Professeur assistant, Encadrant SONDRA)

Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales

Table des matières

I	Introduction	1
1	État de l'Art de la Détection Radar.	5
1.1	Principes généraux des tests d'hypothèses de détection.	5
1.1.1	Principe général de la détection.	5
1.1.2	Courbes opérationnelles des récepteurs (COR) : exemples.	6
1.1.3	Un test binaire simple : le critère de Neymann-Pearson.	7
1.1.4	Des tests binaires composites : Test du Rapport de Vraisemblance Généralisé (TRVG) et méthodes de "Plug-In".	8
1.2	Détection Radar en milieu gaussien.	10
1.2.1	La détection non-adaptative.	10
1.2.1.1	Cas de la matrice de covariance du bruit totalement connue.	10
1.2.1.2	Cas de la matrice de covariance connue à un facteur près.	11
1.2.2	La détection adaptative.	12
1.2.2.1	Le Generalized Likelihood Ratio Test (GLRT) de Kelly.	12
1.2.2.2	l'Adaptive Matched Filter (AMF).	13
1.2.2.3	l'Adaptive Normalized Matched Filter (ANMF).	14
1.3	Détection Radar en milieu non-gaussien.	17
1.3.1	Les vecteurs aléatoires sphériquement invariants ou SIRV	18
1.3.2	Détection non-adaptative.	19
1.3.3	Détection adaptative.	21
1.4	Problématique de l'étude.	22
2	La structure Persymétrique de la matrice de covariance du fouillis.	23
2.1	La structure persymétrique et son exploitation.	23
2.2	Schéma de détection en environnement "gaussien persymétrique".	26
2.2.1	Estimation de la matrice de covariance.	26
2.2.2	Le détecteur "gaussien persymétrique".	28
2.3	Le cas de l'environnement non-gaussien.	30

2.3.1	L'estimateur de la matrice de covariance : le "Point-Fixe Persymétrique (PFP)". . .	30
2.3.2	Le détecteur optimisé : GLRT-PFP.	31
3	Applications de la persymétrie aux traitements "STAP" et "Rang Réduit".	35
3.1	Les Traitements Spatio-Temporels.	35
3.1.1	Contexte et problématique.	35
3.1.2	Modélisation.	36
3.1.2.1	Modèle du signal.	36
3.1.2.2	Modèle de fouillis.	37
3.1.2.3	Apport de la persymétrie.	40
3.2	Les traitements Spatio-Temporels Adaptatifs.	42
3.2.1	Le traitement spatio-temporel optimal.	42
3.2.2	Le facteur de pertes.	42
3.2.3	Le STAP adaptatif.	43
3.2.4	Algorithmes à Rang Réduit.	43
3.2.4.1	Principe.	43
3.2.5	Rang réduit classique : calcul de la loi du facteur de pertes.	45
3.2.6	Etude du rang réduit persymétrique.	49
4	Application à la Détection Radar	51
4.1	Régulation de la fausse alarme	51
4.2	Détection en environnement Gaussien.	52
4.2.1	Courbes Opérationnelles du PAMF : simulation.	52
4.2.2	Validation sur données réelles.	52
4.3	Détection en environnement non-Gaussien.	62
4.3.1	Le GLRT-PFP face à ses pairs...	62
4.3.2	Validation sur données opérationnelles.	63
4.4	Application à des données STAP.	70
4.4.1	Présentation des données STAP CELAR	70
4.4.2	Résultats de détection.	70
4.5	Le cas Toeplitz.	83
4.5.0.1	Estimation sous contrainte de Toeplitz dans le cas Gaussien.	83
4.5.0.2	Estimation sous contrainte de Toeplitz dans le cas SIRV.	84
4.6	Méthode du rang réduit persymétrique : application sur les données STAP CELAR. . . .	91
	Conclusions et Perspectives	99

Annexe A Preuves du chapitre 2.	103
A.1 Preuve du théorème (2.2.2.1)	103
A.2 Preuve du théorème (2.3.2.2)	106
Annexe B Généralités.	109
B.1 Loi Gaussienne ou normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ réelle	109
B.2 Densité de probabilité du vecteur Gaussien $\mathcal{N}(\mathbf{m}, \mathbf{D})$	109
B.3 K-distribution	109
B.4 Loi du χ^2 centré	109
B.5 Loi du χ^2 décentré	110
B.6 Loi Beta de première et de seconde espèce	110
B.7 Loi de Wishart	110
B.8 Loi de Fisher F centrée	111
B.9 Loi de Fisher F' décentrée	111
B.10 Théorème Central Limite	111
B.11 Consistance et Biais d'un estimateur	111
Annexe C Quelques notes d'études sur l'estimateur du point fixe réel.	113
C.1 Vec pour des matrices symétriques	113
C.2 Matrice de Wishart réelle normalisée	113
C.3 Moment d'ordre 1 du rapport suivant une loi de Wishart	114
C.4 Moment d'ordre 2 du rapport	114
C.5 Covariance des éléments du rapport	114
C.6 Moments d'ordre 1 et 2 en vec et vecs.	115
C.7 Loi asymptotique de Z	115
C.8 Etude du point fixe réel	115
Annexe D Le signal Radar	117
D.1 Distance et Vitesse en radar	117
D.2 Fonction d'ambiguïté	118
D.3 Application au Chirp linéaire	119
Publications	123
Bibliographie	125

Acronymes

Organismes :

ONERA	Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales
TR6	THALES Air Systems
CELAR	Centre d'ELectronique de l'ARmement
DEMR - RBF	Département ElectroMagnétisme et Radar / unité Radars Basse Fréquence
DEMR - TSI	Département ElectroMagnétisme et Radar / unité Traitement du Signal

Acronymes généraux :

AMF	Adaptive Matched Filter
ANMF	Adaptive Normalized Matched Filter
PAMF	Persymmetric AMF
BORD	Bayesian Optimum Radar Detector
FP	Fixed Point
GLRT	Generalized Likelihood Ratio Test
GLRT - FP	GLRT - Fixed Point
GLRT - LQ	GLRT - Linear Quadratic
GLRT - PFP	GLRT - Persymétric FP
HR / THR	Haute Résolution / Très Haute Résolution
MV / ML	Maximum de Vraisemblance / Maximum Likelihood
MVA / AML	Maximum de Vraisemblance Approché / Approximate Maximum Likelihood
OGD	Optimum Gaussian Detector
PDF	Probability Density Function
PFA	Probabilité de Fausse Alarme
PD	Probabilité de détection
PRF	Pulse Repetiting Frequency / Fréquence de récurrence
RSB / SNR	Rapport Signal-à-Bruit / Signal to Noise Ratio
RV	Rapport de Vraisemblance
RVG	Rapport de Vraisemblance Généralisé
SAR	Synthetic Aperture Radar
SIRP	Spherically Invariant Random Process
SIRV	Spherically Invariant Random Vector
SCM	Sample Covariance Matrix
STAP	Space Time Adaptive Processing / Traitement Spatio-Temporel Adaptatif
TCL / CLT	Théorème Central Limite / Central Limit Theorem

Symboles et Notations

\mathbb{N}	Ensemble des nombres entiers
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes
$\mathbf{M} \in (\mathbb{C}^{m \times m})$	Ensemble des matrices de dimension $m \times m$ et composée d'éléments complexes
$\hat{\theta}$	Valeur estimée de θ
Θ	Ensemble des θ
$\hat{\mathbf{M}}$	Estimateur de la matrice de covariance \mathbf{M}
$\hat{\mathbf{M}}_{SCM}$	Estimateur par SCM
$\hat{\mathbf{M}}_{PSCM}$	Estimateur par SCM persymétrique
$\hat{\mathbf{M}}_{FP}$	Estimateur du point fixe
$\hat{\mathbf{M}}_{PFP}$	Estimateur du point fixe persymétrique
$B(\hat{\mathbf{M}})$	Biais de l'estimateur $\hat{\mathbf{M}}$
$\Re(z)$	Partie réelle de z
$\Im(z)$	Partie imaginaire de z
H	Opérateur de transposition conjugaison
\top	Opérateur de transposition
\mathbf{I}	Matrice identité de dimension appropriée au contexte
$\text{Tr}(\mathbf{M})$	Trace de la matrice \mathbf{M}
$\ \mathbf{M}\ $	Norme matricielle quelconque de \mathbf{M}
$\mathbb{P}(A)$	Probabilité de l'événement A
$p(x)$	Densité de probabilité de la variable aléatoire X
$p_{X Y}(x)$	Densité de probabilité de X "sachant" Y
$\mathbb{E}(X)$	Espérance mathématique de la variable aléatoire X
$\mathcal{L}(X)$	Loi de la variable aléatoire X
$\xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{dist.}$	Convergence en loi quand tend vers l'infini
$\xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{Pr}$	Convergence en probabilité quand tend vers l'infini
$\xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} \rightarrow$	Convergence classique (presque sûre) quand tend vers l'infini
\sim	"est distribué selon"
\triangleq	"égal par définition à"
\Rightarrow	"implique"
\Leftrightarrow	"équivalent à"

H_0	Hypothèse "bruit seul" du test de détection
H_1	Hypothèse "cible + bruit" du test de détection
$\Lambda(\mathbf{y}/H_0)$	Rapport de vraisemblance de l'observation \mathbf{y} sous l'hypothèse H_0
$\hat{\Lambda}(\hat{\mathbf{M}})$	Rapport de vraisemblance adaptatif construit avec l'estimateur $\hat{\mathbf{M}}$
P_{fa}	Probabilité de fausse alarme
P_{nd}	Probabilité de non détection
P_d	Probabilité de détection
$\Gamma(x)$	Fonction Gamma de x
$\delta(\cdot)$	distribution de Dirac ($\delta(x - a) = 1$ si $x = a$, 0 sinon)
$\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	Fonction indicatrice de x sur l'intervalle $[a, b]$
${}_bF_a(\cdot)$	Fonction hypergéométrique F à a et b paramètres en arguments
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	Loi Normale réelle univariée (moyenne m , variance σ^2)
$\mathcal{N}(\mathbf{m}, \mathbf{M})$	Loi Normale réelle multivariée (moyenne \mathbf{m} , covariance \mathbf{M})
$\mathcal{CN}(\mathbf{m}, \mathbf{M})$	Loi Normale complexe multivariée (moyenne \mathbf{m} , covariance \mathbf{M})
χ_n^2	Loi du χ^2 à n degrés de liberté
$\beta_{a,b}^1$	Loi Beta de première espèce et de paramètres a et b
$\beta_{a,b}^2$	Loi Beta de deuxième espèce et de paramètres a et b
$F_{a,b}$	Loi de Fisher centrée à a et b degrés de liberté
$F_{a,b,\delta}$	Loi de Fisher décentrée à a et b degrés de liberté et de paramètre de décentrement δ
$\mathcal{W}(N, m; \mathbf{M})$	Loi de Wishart de paramètres N , m et de matrice \mathbf{M}
$\text{diag}(\mathbf{x})$	Opérateur qui transforme un vecteur \mathbf{x} en une matrice diagonale
$\text{vec}(\mathbf{M})$	Opérateur qui transforme une matrice en un vecteur
\otimes	Produit de Kronecker
\odot	Produit d'Hadamard
$!.!$	Opérateur factorielle
$\det(\mathbf{M})$	déterminant de la matrice \mathbf{M}
i.i.d	indépendantes et indentiquement distribuées (cas de variables aléatoires)
i.e.	"id est", signifie "c'est à dire"

Table des figures

I.1	Schéma de principe du fonctionnement d'un radar	2
1.1	Courbe COR d'un récepteur dans le cas d'un bruit Gaussien centré.	7
1.2	Performances de détection pour l'AMF, l'OGD et le GLRT de Kelly en milieu gaussien. $PFA = 10^{-3}$, $m = 10$ et $K = 20$ (fig. gauche) ou $K = 50$ (fig. droite).	16
1.3	Performances de détection pour l'OGD, le NMF et l'ANMF en milieu gaussien. $PFA = 10^{-3}$, $m = 10$ et $K = 20$ (fig. gauche) ou $K = 50$ (fig. droite).	16
1.4	Mise en défaut de l'OGD dans du fouillis non gaussien, de même puissance que le bruit thermique - Ajustement du seuil de détection.	17
1.5	Mise en défaut de l'OGD dans du fouillis non gaussien, de même puissance que le bruit thermique - Probabilité de détection (le SNR considéré est ici avant traitement : $SNR = \frac{A^2}{\sigma^2}$).	18
3.1	Schéma de principe du réseau de capteurs et des données produites.	36
3.2	Radar en configuration à visée latérale.	37
3.3	Schéma de principe du filtrage STAP.	38
3.4	Structures particulières des matrices de Toeplitz.	39
3.5	Repère de calcul des contributions des éléments de sol.	40
3.6	Exemples de visualisation de simulations STAP dans une case distance. Visualisation de l'annulation du fouillis (clutter ridge) et de la cible présente.	41
4.1	Courbes Caractéristiques de validation des résultats.	53
4.2	Comparaison de la régulation de fausse alarme pour les 3 détecteurs OGD, AMF et PAMF pour différents nombres de données secondaires.	54
4.3	Comparaison des performances de détection pour les 3 détecteurs OGD, AMF et PAMF. $m = 10$, $K = 10$ et $Pfa = 10^{-3}$	54
4.4	Comparaison des performances de détection pour les 3 détecteurs OGD, AMF et PAMF pour différents nombres de données secondaires.	55
4.5	Principe d'un radar de surveillance du sol.	55
4.6	Visualisation des 8 récurrences.	57
4.7	Visualisation des zones gaussiennes et impulsives pour la récurrence n°1.	58
4.8	Illustration du masque d'estimation des matrices de covariance.	59
4.9	Sélection de la partie gaussienne.	59
4.10	Courbes COR théoriques et opérationelles pour l'AMF et le PAMF. Utilisation d'un masque 3×3 . $m = 8$, $K = 8$ et $Pfa = 10^{-2}$	60
4.11	Courbes COR théoriques et opérationelles pour l'AMF et le PAMF. Utilisation d'un masque 3×5 . $m = 8$, $K = 14$ et $Pfa = 10^{-2}$	61

4.12	Comparaison des différentes performances pour les détecteurs GLRT-FP, GLRT-PFP, GLRT-LQ, GLRT-SCM, P-ANMF, RP-ANMF, GLRT-FP théorique et GLRT-PFP théorique. Cas d'un fouillis simulé par K-distribution de paramètre $\nu = 0.2$. $m = 8$, $K = 16$ et $P_{fa} = 10^{-3}$.	64
4.13	Comparaison des différentes performances pour les détecteurs GLRT-FP, GLRT-PFP, GLRT-LQ, GLRT-SCM, P-ANMF, RP-ANMF, GLRT-FP théorique et GLRT-PFP théorique. Cas d'un fouillis simulé par K-distribution de paramètre $\nu = 0.2$. $m = 8$, $K = 10$ et $P_{fa} = 10^{-3}$.	65
4.14	Comparaison des différentes performances pour les détecteurs GLRT-LQ, GLRT-FP et GLRT-PFP. Cas d'un fouillis de sol réel avec utilisation d'un masque 3×5 . $m = 8$, $K = 15$ et $P_{fa} = 10^{-2}$. Données opérationnelles THALES.	66
4.15	Principe de fonctionnement du radar à onde de ciel Nostradamus.	67
4.16	Caractéristiques matérielles de Nostradamus	68
4.17	Vue des antennes Nostradamus	68
4.18	Signaux bruts et traités issus de Nostradamus	69
4.19	Courbes caractéristiques obtenues par le signal issu de Nostradamus. Utilisation de $m = 8$ récurrences et $K = 13$ données secondaires pour une $P_{fa} = 10^{-2}$.	69
4.20	Données STAP du Celar : simulateur et données produites.	71
4.21	Résultats de détection en case 255 pour une cible de 19 dBm^2 et de vitesse 4 m/s. Cas du détecteur gaussien AMF avec $K = 409$.	72
4.22	Résultats de détection en case 255 pour une cible de 19 dBm^2 et de vitesse 4 m/s. Cas du détecteur gaussien PAMF avec $K = 409$.	73
4.23	Résultats de détection en case 255 pour une cible de 19 dBm^2 et de vitesse 4 m/s. Cas du détecteur non-gaussien GLRT-FP avec $K = 409$.	74
4.24	Résultats de détection en case 255 pour une cible de 19 dBm^2 et de vitesse 4 m/s. Cas du détecteur non-gaussien GLRT-PFP avec $K = 409$.	75
4.25	Résultats de détection en case 255 pour une cible de 19 dBm^2 et de vitesse 4 m/s. Cas du détecteur gaussien AMF avec $K = m = 256$.	76
4.26	Résultats de détection en case 255 pour une cible de 19 dBm^2 et de vitesse 4 m/s. Cas du détecteur non-gaussien GLRT-FP avec $K = m = 256$.	77
4.27	Résultats de détection en case 255 pour dix cible de 19 dBm^2 et de vitesse comprise entre -4 m/s et 4 m/s . Cas du détecteur gaussien AMF avec $K = 409$.	79
4.28	Résultats de détection en case 255 pour dix cible de 19 dBm^2 et de vitesse comprise entre -4 m/s et 4 m/s . Cas du détecteur gaussien PAMF avec $K = 409$.	80
4.29	Résultats de détection en case 255 pour dix cible de 19 dBm^2 et de vitesse comprise entre -4 m/s et 4 m/s . Cas du détecteur non-gaussien GLRT-FP avec $K = 409$.	81
4.30	Résultats de détection en case 255 pour dix cible de 19 dBm^2 et de vitesse comprise entre -4 m/s et 4 m/s . Cas du détecteur non-gaussien GLRT-PFP avec $K = 409$.	82
4.31	Comparaison des courbes COR pour les détecteurs en environnement gaussien simulé et sous contrainte de Toeplitz. $m = 8$, $K = 10$, $P_{fa} = 10^{-2}$ et $\rho = 0.1$	85
4.32	Comparaison des courbes COR pour les détecteurs en environnement gaussien simulé et sous contrainte de Toeplitz. $m = 8$, $K = 10$, $P_{fa} = 10^{-2}$ et $\rho = 0.5$	86
4.33	Comparaison des courbes COR pour les détecteurs en environnement gaussien simulé et sous contrainte de Toeplitz. $m = 8$, $K = 10$, $P_{fa} = 10^{-2}$ et $\rho = 0.9$	87
4.34	Comparaison des courbes COR pour les détecteurs en environnement Non-gaussien simulé et sous contrainte de Toeplitz. $m = 8$, $K = 12$, $P_{fa} = 10^{-2}$ et $\rho = 0.1$	88
4.35	Comparaison des courbes COR pour les détecteurs en environnement Non-gaussien simulé et sous contrainte de Toeplitz. $m = 8$, $K = 12$, $P_{fa} = 10^{-2}$ et $\rho = 0.5$	89

4.36	Comparaison des courbes COR pour les détecteurs en environnement Non-gaussien simulé et sous contrainte de Toeplitz. $m = 8$, $K = 12$, $P_{fa} = 10^{-2}$ et $\rho = 0.9$	90
4.37	Répartition des valeurs singulières normalisées pour les deux estimateurs de matrice (SCM et PSCM).	92
4.38	Résultats de détection en rang réduit classique en case 256 pour une cible de 19 dBm^2 et de vitesse 4 m/s sans contamination. Cas des détecteurs Gaussiens avec $K = 200$ et $r = 46$	93
4.39	Résultats de détection en rang réduit persymétrique en case 256 pour une cible de 19 dBm^2 et de vitesse 4 m/s sans contamination. Cas des détecteurs Gaussiens avec $K = r = 46$	94
4.40	Résultats de détection en rang réduit classique en case 256 pour dix cibles de 19 dBm^2 et de vitesse comprise entre -4 m/s et 4 m/s sans contamination. Cas des détecteurs Gaussiens avec $K = 400$ et $r = 46$	96
4.41	Résultats de détection en rang réduit persymétrique en case 256 pour dix cibles de 19 dBm^2 et de vitesse comprise entre -4 m/s et 4 m/s sans contamination. Cas des détecteurs Gaussiens avec $K = r = 46$	97
D.1	Visualisation d'un exemple de Chirp linéaire avec $B = 50.10^2 \text{ Hz}$ et $T = 1.10^{-2} \text{ s}$	120
D.2	Caractéristiques du Chirp linéaire.	120
D.3	Fonction d'ambiguïté du chirp.	121

I

Introduction

La nécessité de détecter des objets, obstacles ou cibles sans le concours même de ces objets s'est très tôt fait sentir avec le développement des technologies modernes, essentiellement de transport (avions, voitures et bateaux). Dans cet optique, C. Hülsmeyer breveta en 1904 son "Télémbiloscope", émetteur récepteur à radiofréquence utilisé alors à Cologne en Allemagne pour la détection d'objets métalliques depuis des bateaux. Cet engin avait à cette époque une portée de 3km, il est historiquement reconnu comme le précurseur de ce qui deviendra le RADAR. Le nom RADAR lui-même a par ailleurs été officiellement adopté en novembre 1940 par la marine nationale des Etats-Unis et constitue l'abréviation de "RAdio Detection And Ranging" ou en français "Décteur à radiofréquence et évaluation distance". C'est cependant lors de la seconde guerre mondiale que le radar voit son développement s'accélérer fortement. Conscient de son potentiel technique, de nombreux scientifiques se sont depuis intéressés à cette méthode et ont permis d'améliorer sans cesse la technologie du radar, aussi bien d'un point de vue matériel que d'un point de vue "traitement des informations et signaux". Actuellement de très nombreuses techniques sont mises en jeu afin de d'améliorer le fonctionnement et les résultats d'analyses du radar. Toutes ces techniques reposent sur un principe physique fondamental : l'émission d'une onde électromagnétique dont la propriété est de se réfléchir sur tout obstacle et de créer une onde en retour susceptible d'être captée par un récepteur adapté (voir figure (I.1)). Le radar, système actif, i.e. qui possède sa propre source d'énergie d'émission présente également les avantages d'être utilisable de jour comme de nuit et quelles que soient les conditions météorologiques. La connaissance de la célérité de l'onde électromagnétique permet ainsi de mesurer la distance des réflecteurs tandis que la connaissance des phases et autres caractéristiques des signaux émis permet de former des images multidimensionnelles dans différents espaces (temporels, fréquentiels, etc...).

Dans le cadre de la détection, la problématique majeure est de réussir à isoler dans le signal reçu les cibles d'intérêt des perturbations causées par l'environnement du radar et le radar lui-même. En effet, ces perturbations, également appelées bruit, peuvent provenir soit de l'électronique du radar, soit de l'environnement extérieur à celui-ci (brouilleur, échos de sol ou de mer, environnement urbain, interférences...). Dans ce cadre, le bruit en général est considéré comme étant un processus aléatoire. Le bruit électronique ou bruit "thermique" est modélisé comme du bruit blanc gaussien tandis que le bruit environnemental est modélisé par des processus aléatoires qui se superposent au bruit gaussien. C'est cette superposition que l'on nomme en radar "le fouillis". Il est alors clair que le fouillis, principale source d'erreurs de détection radar, doit faire l'objet de toutes les attentions afin d'améliorer les performances des radars. Dans le cadre de nombreuses études menées depuis des dizaines d'années, le modèle de fouillis gaussien a été largement utilisé afin de développer des récepteurs appropriés. C'est le cas notamment des radars classiques, à basse résolution, pour lesquels l'hypothèse gaussienne permet une détection optimale. Cependant, dans de nombreuses applications et avec le développement des techno-

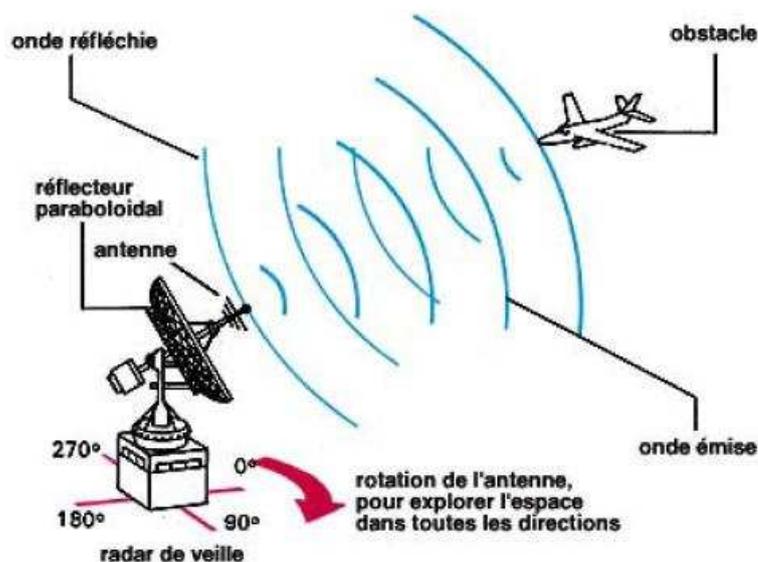


FIG. I.1 – Schéma de principe du fonctionnement d'un radar

logies "hyperfréquence", de nombreux modèles de radars ont été développés. Ceux-ci sont alors souvent qualifiés de radars Haute Résolution, voir même Très Haute Résolution pour lesquels les échantillons de signaux reçus ne vérifient plus les conditions d'application du théorème mathématique qui "défini" l'environnement gaussien : le Théorème Central Limite (voir annexe (B.10)), et autrement dit lesquels l'hypothèse gaussienne n'est plus validée. Ceci est également valable pour les radars de surveillance du sol ou de la mer pour lesquels la variation de puissance et de texture du terrain ne permet plus d'utiliser la statistique gaussienne. Dans ce cadre, il est très difficile de connaître la statistique exacte des milieux considérés. Le caractère impulsionnel de ces signaux non-gaussiens engendre alors un taux de fausses alarmes très élevé qui lorsqu'il doit être réduit, dégrade donc fortement les performances des radars, en terme de détection. Afin de parer à ce problème, des modèles de fouillis dits "gaussiens-composés" ont été développés et ont contribué à s'affranchir, dans une certaine mesure, de la méconnaissance statistique de ces perturbations.

Actuellement, la littérature propose de très nombreuses études concernant les détecteurs classiques en environnement gaussien. Le cas de l'environnement non-gaussien suscite également depuis plusieurs années un fort engouement, ceci du au fait que les modèles de fouillis utilisés sont alors beaucoup plus représentatifs de la réalité. Le modèle SIRP (Spherically Invariant Random Process) ou encore Processus Aléatoire Sphériquement Invariant et par extension les SIRV (SIR Vectors), font notamment l'objet de beaucoup d'attention. Étudiés notamment par [1, 2, 3, 4], ces processus, dont l'utilisation a été justifiée par de nombreuses campagnes de mesure (notamment à l'ONERA), ont permis de mettre en place des schémas de détection optimaux pour des fouillis dont la statistique est donnée. C'est par exemple le cas pour des fouillis K-Distribués, ou suivant une loi de Weibull, Cauchy, Laplace, etc... Il est donc important de noter que les SIRVs englobent une infinité de loi et prennent également en compte la statistique gaussienne.

Dans ce cadre cependant, la détection n'est optimale que si le fouillis suit parfaitement le modèle avec lequel le radar l'a caractérisé. Cette supposition n'est en réalité jamais totalement vérifiée et le taux de fausses alarmes régule en permanence la détection. L'enjeu est alors de réussir à caractériser au mieux

l'environnement et donc le fouillis, il s'agit là du principe de détection adaptative. L'idée majeure des travaux présentés dans ce document est donc de se baser sur cette adaptation à l'environnement, par le biais de l'estimation de la matrice de covariance du fouillis, sorte de "signature électronique" qui est l'identité statistique du fouillis du radar. L'amélioration de la qualité de l'estimation de cette matrice doit donc permettre une optimisation des performances du système. Nous proposons donc une transformation de l'estimateur de la matrice de covariance basée sur le modèle appelé "persymétrie" du fouillis. Ce modèle, qui s'appuie sur une structuration particulière de la matrice de covariance est exploitable mathématiquement par de judicieuses manipulations. Cette transformation permet donc de diminuer l'erreur d'estimation de la matrice de covariance et ainsi d'améliorer les performances de détection aussi bien dans le cas d'un environnement gaussien que non-gaussien modélisé par des SIRVs. Les estimateurs classiquement utilisés en radar seront donc améliorés par de nouveaux détecteurs développés grâce à cette structure. La transformation sera étudiée théoriquement puis nous présenterons les détecteurs exploitant la persymétrie et nous validerons les résultats obtenus par le biais de simulations et de données opérationnelles.

Cette étude sera donc présentée au cours des quatre chapitres qui constituent ce manuscrit. Tout d'abord le chapitre 1 présente un état de l'art de la détection radar et le contexte dans lequel évolueront les travaux. Après un bref rappel sur les principes de la détection, nous présentons les schémas classiques de tests binaires utilisés tout au long de l'étude. Dans le cadre de l'étude en milieu gaussien, nous présentons les détecteurs non adaptatifs Optimum Gaussian Detector (OGD) et Normalized Matched Filter (NMF), pour lesquels sont présentées les principales caractéristiques statistiques utiles en radar. Ces détecteurs parfaitement connus depuis des années constituent donc les schémas principaux dans cette partie de l'étude. Toutefois, ces détecteurs purement théoriques ne peuvent être utilisés en pratique du fait de la non-connaissance de la matrice de covariance. Nous présentons donc ensuite les détecteurs adaptatifs gaussiens basés sur l'estimée de la matrice de covariance appelé Sample Covariance Matrix. Ces détecteurs respectivement appelés Generalized Likelihood Ratio Test (GLRT) de Kelly, Adaptive Matched Filter (AMF) et Adaptive Normalized Matched Filter (ANMF) sont alors comparés en terme de performances de détection. La seconde partie de ce chapitre introduit les bases de la détection en environnement non-gaussien. Le modèle de fouillis utilisé et appelé SIRV est présenté et illustré par quelques simulations. Dans ce cadre, les détecteurs non-adaptatifs et adaptatifs sont également présentés d'un point de vue statistique et pratique du radar. Cette présentation permet alors d'introduire la problématique qui guidera les travaux de cette thèse.

Le chapitre 2 présente quant à lui le concept majeur étudié dans ce manuscrit : l'exploitation de la persymétrie. Une présentation générale de la persymétrie est proposée ainsi que la transformation unitaire des données permettant de passer d'un problème de détection classique à un problème équivalent mais "persymétrique". Dans ce cadre, l'étude propose au travers de ce chapitre le développement de nouveaux estimateurs de la matrice de covariance du fouillis, respectivement pour les milieux gaussiens (Persymétric-SCM) basé sur la classique Sample Covariance Matrix et non-gaussien basé sur la matrice du Point Fixe. La caractérisation statistique de ces estimateurs permet ensuite de les utiliser dans les détecteurs AMF et GLRT-FP qui deviennent ainsi de nouveaux détecteurs appelés PAMF (Persymmetric-AMF) et GLRT-PFP. Ces détecteurs sont alors étudiés sous un angle statistique et opérationnel afin d'en faire ressortir leurs caractéristiques opérationnelles et montrer ainsi le bénéfice de l'exploitation de la persymétrie en termes de performances de détection. Les preuves les plus longues des théorèmes de ce chapitre font l'objet d'un chapitre annexe en fin de thèse.

Suite à ce chapitre présentant la persymétrie et les détecteurs développés suivant ce modèle, le chapitre 3 propose de montrer l'apport théorique de la persymétrie dans le cadre du traitement adaptatif

spatio-temporel STAP et de sont application dans les méthodes dites "à rang réduit". Le traitement STAP est présenté dans un cadre général et on vérifie ainsi que le modèle de données utilisé correspond bien à l'hypothèse de fouillis persymétrique. Ceci permettra ensuite de valider les études théoriques sur des données réelles de type STAP. En ce qui concerne la méthode du rang réduit, qui permet de diminuer fortement le nombre de données secondaires nécessaire à l'estimation de la matrice de covariance, on présente tout d'abord le principe du rang réduit dit "classique". Cette méthode basée sur l'utilisation du projecteur orthogonal de la matrice de covariance sur le sous-espace fouillis permet de déterminer la loi du facteur de perte de la méthode, indice caractéristique de l'efficacité du traitement. Ceci permet de déterminer le nombre de données secondaires nécessaire pour une détection à 3 dB de perte au maximum. L'application de la persymétrie à la méthode du rang réduit est ensuite proposée dans ce chapitre. On cherche ainsi à déterminer la loi du rapport de vraisemblance, correspondant au test de détection choisi, dans le cas d'une matrice de covariance persymétrique. Cette loi illustre ainsi une nouvelle diminution du nombre de données secondaires nécessaires et illustre par la même le bénéfice et la richesse de l'apport de la persymétrie dans le STAP, que ce soit à pleine dimension ou en rang réduit.

Enfin, le chapitre 4 présente l'application à la détection radar des résultats théoriques proposées dans les chapitres précédents. Tout d'abord, le comportement du PAMF est analysé au travers des relations déterminées théoriquement au chapitre 2. On obtient ainsi les traditionnelles Caractéristiques Opérationnelles du Récepteur (COR) qui permettent de valider l'adéquation entre les résultats théoriques et des tirages Monte-Carlo. L'amélioration des performances de détection est ainsi illustrée. Une validation sur données réelles suit ces simulations, données réelles gaussiennes qui ont été extraites d'une carte de fouillis de sol réel provenant d'un radar THALES. En ce qui concerne la détection en environnement non-gaussien et le GLRT-PFP, son comportement est lui aussi vérifié en simulation mais ce détecteur est également confronté à plusieurs autres schémas de détection proposés dans la littérature. Ici encore, une validation sur données réelles THALES permet d'illustrer le gain opérationnel de l'exploitation de la persymétrie. Les résultats sont également présentés au travers de l'étude de données de fouillis de mer obtenues par l'intermédiaire du radar Trans-Horizon NOSTRADAMUS de l'ONERA. L'application sur des données STAP semi-synthétiques présentée ensuite permet de valider le gain en détection des détecteurs persymétriques ainsi que la pertinence du modèle persymétrique appliqué aux traitements STAP en visée latérale. Le cas des matrices de Toeplitz, structure particulière et caractéristique des données de type STAP est également présenté et étudié au travers de quelques simulations. Enfin, les résultats déterminés au chapitre (3) concernant la méthode du rang réduit sont illustrés en fin de ce chapitre sur les mêmes données STAP. La diminution du nombre de données secondaires nécessaire à l'estimation est clairement constatée et les résultats confirment donc de manière très claire la présentation théorique menée précédemment.

Ce manuscrit se termine par une conclusion générale et des perspectives. La conclusion permet donc de faire le point sur les principaux travaux et résultats présentés dans cette thèse. On s'attache ainsi à rappeler le bénéfice de l'exploitation de la persymétrie dans les processus de détection mais également quelles en sont les limites d'utilisation. La fin de cette partie concerne les perspectives de ce travail et nous présentons donc les travaux qui pourraient être effectués par la suite afin d'enrichir encore cette étude, de répondre à certaines questions et de consolider certains résultats.

Chapitre 1

État de l'Art de la Détection Radar.

Ce chapitre présente les éléments théoriques de base conduisant à la problématique de cette thèse. Les principes de la détection radar sont rappelés dans un cadre général au travers de la détection en milieu gaussien et non-gaussien. Les détecteurs classiques principalement utilisés durant l'étude sont présentés et détaillés au travers de leurs caractéristiques les plus importantes pour des milieux gaussiens ou non. Les principaux estimateurs de matrices de covariance utilisés dans ces détecteurs seront également analysés selon leur comportement et leurs propriétés statistiques et "radaristiques". Enfin, la problématique de l'optimisation des performances des détecteurs présentés sera posée en fin de chapitre. Cette problématique permettra d'introduire la méthode d'exploitation de la structure de la matrice de covariance, pierre angulaire de l'étude durant cette thèse.

1.1 Principes généraux des tests d'hypothèses de détection.

1.1.1 Principe général de la détection.

L'une des fonctions principales d'un radar est de détecter la présence d'objets d'intérêt noyés dans un bruit ambiant. Ce bruit perturbe alors la qualité de détection, il provient généralement de l'électronique du radar. Dans ce cas, il s'agit du bruit dit "bruit thermique", modélisé à juste titre comme du bruit blanc gaussien. Dans certains cas, le radar doit également faire face à l'environnement situé autour de la cible à détecter : c'est le cas par exemple des radars terrestres de surveillance du sol qui scrutent l'horizon. Ceux-ci sont alors perturbés par des échos indésirables dus aux réflecteurs constitutifs du sol ou de la mer. Ces signaux parasites sont généralement assimilés à du bruit aléatoire se superposant au bruit thermique, et constituent ce que l'on nomme "le fouillis". Typiquement, la problématique de la détection radar peut se formuler selon le principe suivant : pour une case d'analyse fixée (le radar découpe en effet sa zone d'analyse en cases, fonction de la distance au radar), dans un vecteur d'observation \mathbf{y} de dimension m , un signal complexe \mathbf{s} connu, caractérisant une cible est corrompu par un bruit de fouillis \mathbf{c} additif. Ce problème se formalise généralement par un test d'hypothèses binaires :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{y} = \mathbf{c} & \mathbf{y}_k = \mathbf{c}_k \quad k = 1, \dots, K \\ H_1 : \mathbf{y} = \mathbf{s} + \mathbf{c} & \mathbf{y}_k = \mathbf{c}_k \quad k = 1, \dots, K \end{cases} \quad (1.1)$$

où les \mathbf{y}_i sont des vecteurs d'observations supposés indépendants entre eux, identiquement distribués et sont appelés "données secondaires" par les radaristes. Ils sont supposés contenir uniquement le bruit de fouillis additif et permettent d'estimer les paramètres inconnus du fouillis.

Sous l'hypothèse H_0 , le signal complexe \mathbf{y} reçu par le radar est supposé ne contenir que les échos du fouillis, provenant des réflexions sur les différents éléments de l'environnement, ainsi que le bruit thermique. Ces parasites admettent une certaine densité de probabilité ou PDF (Probability Density Function), notée $p(\mathbf{y}/H_0) = p(\mathbf{c}/H_0)$.

Sous l'hypothèse H_1 , le signal reçu \mathbf{y} est supposé contenir le signal \mathbf{s} provenant des échos de la cible mais noyé parmi les mêmes échos parasites que sous H_0 . Sa densité de probabilité est alors notée $p(\mathbf{y}/H_1)$.

L'objectif de la détection est de déterminer laquelle des deux hypothèses est la plus vraisemblable, sachant que la non-détection minimise la probabilité de non-détection :

- Décider H_0 alors que H_1 est vraie. Dans ce cas, on parle de *non-détection*, avec la probabilité $P_{nd} = \mathbb{P}(H_0/H_1) = 1 - \mathbb{P}(H_1/H_1) = 1 - P_d$, où P_d représente la probabilité de détection ;
- Décider H_1 alors que H_0 est vraie. Dans ce cas, on parle de *fausse alarme*, avec la probabilité $P_{fa} = \mathbb{P}(H_1/H_0)$.

1.1.2 Courbes opérationnelles des récepteurs (COR) : exemples.

La transformation de l'observation \mathbf{y} en une variable aléatoire réelle Λ réalise ce que l'on qualifiera de résumé complet pour le choix entre H_0 et H_1 . On peut donc calculer un récepteur équivalent au récepteur $\Lambda(\mathbf{y})$ par le biais d'un rapport de vraisemblance, que nous présenterons plus en détail dans les paragraphes suivants.

Le calcul des performances d'un récepteur est un point essentiel de l'évaluation de l'intérêt du résultat. On qualifie un récepteur en calculant sa P_{fa} (ou probabilité d'erreur de première espèce) et sa P_d (Probabilité de détection, qui est le complément à l'unité de la probabilité de non-détection ou probabilité d'erreur de seconde espèce). La probabilité de fausse alarme est la probabilité que la sortie du récepteur dépasse le seuil de détection λ dans la situation H_0 . Dans le cadre du critère de Neyman-Pearson, il existe une probabilité maximale de fausse alarme, c'est cette quantité qui permet de fixer le seuil. Le seuil ne dépend donc que de la distribution statistique du récepteur sous H_0 . En introduisant la fonction de répartition de cette distribution, on établit explicitement la relation liant le seuil à la probabilité de fausse alarme.

Les deux probabilités P_{fa} et P_d sont des fonctions qui à tout moment du traitement radar, ne dépendent que de la valeur du seuil. On peut donc représenter le point de fonctionnement d'un récepteur dans un système d'axes où P_d est l'ordonnée et P_{fa} est l'abscisse. Le couple $(P_d(\lambda), P_{fa}(\lambda))$ désigne donc un point du système qui décrira une courbe en fonction du seuil. C'est cette courbe que l'on appelle Courbe Opérationnelle du Récepteur (voir figure (1.1)). Cette courbe peut alors permettre de déterminer la valeur d'un rapport signal sur bruit nécessaire pour atteindre une probabilité de détection voulue pour une probabilité de fausse alarme fixée. Le rapport signal à bruit (Signal to Noise Ratio, SNR en anglais) est défini comme le rapport de la puissance du signal utile reçu sur la puissance de bruit.

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{dB} = \log_{10} \left(\frac{P_u}{P_b}\right), \quad (1.2)$$

avec S, B, P_u et P_b qui représentent respectivement le signal utile, le bruit, la puissance du signal utile et la puissance du bruit.

Ceci, dans le cas du radar, revient à exprimer le rapport suivant à l'instant t :

$$SNR(t) = \frac{|y_s(t)|^2}{E[|y_b(t)|^2]}, \quad (1.3)$$

pour lequel $y_s(t)$ représente le vecteur des échantillons du signal utile en fonction du temps et $y_b(t)$ le vecteur des échantillons du bruit en fonction de temps. Cette courbe étant cependant d'une lecture et d'une interprétation opérationnelle délicate, on préfère, par extension, travailler sur des courbes caractéristiques plus lisibles et exploitables par l'intermédiaire des courbes " P_{fa} -seuil" et " P_d -SNR". Ces courbes permettent donc de comparer les récepteurs développés. De nombreux exemples seront donnés dans ce document.

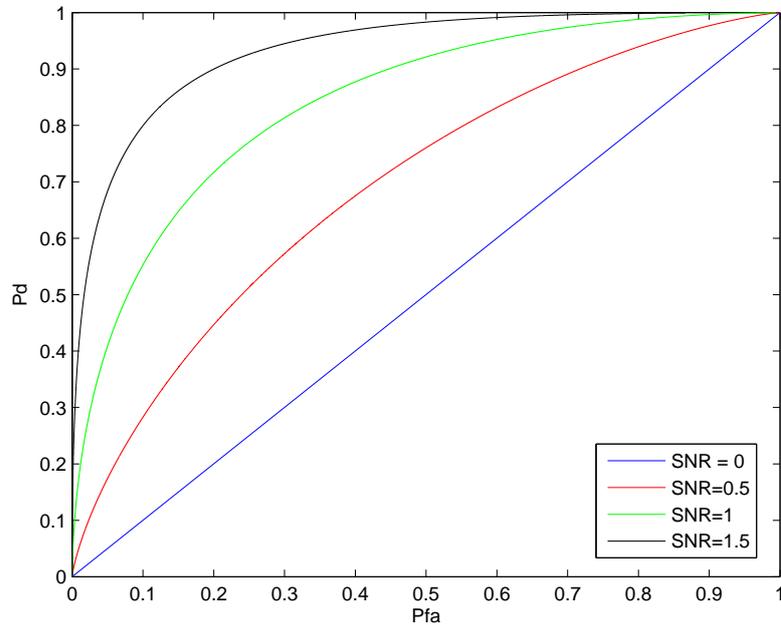


FIG. 1.1 – Courbe COR d'un récepteur dans le cas d'un bruit Gaussien centré.

1.1.3 Un test binaire simple : le critère de Neymann-Pearson.

En opération, la nature des cibles et de l'environnement étant le plus souvent inconnue, il est impossible d'éviter les erreurs de détection (fausses alarmes...). Le choix de l'hypothèse se fait alors par application du critère de Neymann-Pearson, critère qui vise à maximiser la probabilité de détection P_d pour un taux de fausses alarmes $P_{fa} = \alpha$ fixé. En pratique, ce taux est spécifié par l'utilisateur et choisi en fonction de l'application (en général, sa valeur est très faible, classiquement de 10^{-5} à 10^{-6}). Dans le cas de tests d'hypothèses binaires simples, le test du Rapport de Vraisemblance (RV) s'écrit :

$$\Lambda(\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}; \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_k / H_1)}{p(\mathbf{y}; \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_k / H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \lambda, \quad (1.4)$$

qui, du fait de l'hypothèse d'indépendance statistique de l'ensemble des observations, se simplifie pour devenir :

$$\Lambda(\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}/H_1)}{p(\mathbf{y}/H_0)} \underset{H_0}{\underset{H_1}{\gtrless}} \lambda, \quad (1.5)$$

et est alors le test optimal (voir par exemple [5]) pour le critère de Neymann-Pearson.

Dans ce test, λ , le seuil de détection, est déterminé pour avoir une probabilité de fausse alarme $P_{fa} = \alpha$ fixée, et se calcule en résolvant l'une des deux équations suivantes :

$$P_{fa} = \mathbb{P}(\Lambda(\mathbf{y}; H_0) > \lambda) = \alpha, \quad (1.6)$$

$$P_{fa} = \int_{\mathcal{D}_1} p(\mathbf{y}/H_0) d\mathbf{y}, \quad (1.7)$$

où \mathcal{D}_1 est l'ensemble des \mathbf{y} contenus dans le domaine de décision de l'hypothèse H_1 . Vu la difficulté d'obtention d'une expression analytique de ces équations, la détermination de λ s'obtient soit par une résolution numérique des équations (1.6) ou (1.7), soit par l'utilisation de tirages Monte-Carlo.

La relation entre la P_{fa} et le seuil de détection est alors une caractéristique importante lors du processus de détection, car elle permet la mise en oeuvre pratique du détecteur étudié sous l'hypothèse H_0 .

Une fois le seuil de détection déterminé, le calcul de P_d peut s'effectuer de deux manières :

$$P_d = \mathbb{P}(\Lambda(\mathbf{y}; H_1) > \lambda), \quad (1.8)$$

$$P_d = \int_{\mathcal{D}_1} p(\mathbf{y}/H_1) d\mathbf{y}, \quad (1.9)$$

Equation pour lesquelles, comme précédemment, il est très difficile de donner une expression analytique de P_d .

Ainsi, le processus de détection va consister en deux étapes indépendantes. la première étape va réguler la fausse alarme par la détermination, analytique ou par utilisation de tirages Monte-Carlo, du seuil de détection pour une probabilité de fausse alarme P_{fa} fixée. La seconde étape traitera le calcul de la probabilité de détection pour une P_{fa} donnée en fonction de différents rapports de SNR. La relation " P_{fa} -seuil" est donc une relation caractéristique importante des récepteurs radars. C'est en effet elle qui permet la régulation de la fausse alarme du détecteur en fonction de la P_{fa} souhaitée pour l'application concernée. Il s'agit ici d'une des relations caractéristiques du détecteur. On retrouve ainsi dans cette équation la "signature" statistique du détecteur. Ces caractéristiques permettent donc de tracer les relations importantes des détecteurs et permettent ainsi de comparer leurs performances respectives. Elles seront l'un des objets d'intérêt constant de l'étude menée dans ce document et de nombreux exemples en sont donnés en application au chapitre (4).

1.1.4 Des tests binaires composites : Test du Rapport de Vraisemblance Généralisé (TRVG) et méthodes de "Plug-In".

La mise en oeuvre du test de Neymann-Pearson suppose que la PDF des observations est connue sous les deux hypothèses. En pratique, dans le cadre de la détection radar, certains paramètres sont inconnus :

- L'amplitude complexe A du signal $\mathbf{s} : \mathbf{s} = A\mathbf{p}$ ou \mathbf{p} désigne le steering-vector spécifié généralement par l'application, comprenant les valeurs des paramètres autres que l'amplitude A (Doppler, direction d'arrivée, ...) de la case distance sous test.

– Les paramètres statistiques caractérisant le fouillis.

Soit Θ l'ensemble de ces paramètres inconnus. La loi de probabilité des observations est ainsi donnée par :

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_k, \boldsymbol{\theta} / H_0) \quad (1.10)$$

et

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_k, \boldsymbol{\theta} / H_1) \quad (1.11)$$

avec $\theta \in \Theta$.

Les méthodes de type "plug-in" consistent à estimer le vecteur des paramètres inconnus sous les deux hypothèses par des méthodes appropriées et à mettre en oeuvre un test du RV exploitant ces estimées. Soient alors $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ et $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ ces estimées respectivement sous les hypothèses H_0 et H_1 . Le test du RV ainsi obtenu s'écrit :

$$\Lambda = \frac{p(\mathbf{y}, \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_k, \hat{\boldsymbol{\theta}}_1 / H_1)}{p(\mathbf{y}, \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_k, \hat{\boldsymbol{\theta}}_0 / H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda. \quad (1.12)$$

Une méthode d'estimation réputée pour ses bonnes propriétés statistiques (consistance, efficacité) est la méthode du Maximum de Vraisemblance (MV). Lorsque ces estimées $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ et $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ sont obtenus par cette méthode :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_i = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{y}, \mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_k, \boldsymbol{\theta} / H_i), \quad (1.13)$$

le test de détection particulier qui en résulte s'appelle le test du rapport de vraisemblance généralisé (TRVG). Ces approches sont mises en oeuvre dans le cadre de la détection radar sous différents types quand à la nature du bruit dans les paragraphes qui suivent.

1.2 Détection Radar en milieu gaussien.

Nous nous plaçons dans ce paragraphe sous l'hypothèse classique de bruit additif complexe circulaire gaussien, i.e. $\mathbf{c} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{\Gamma})$, dont la densité de probabilité s'écrit :

$$f(\mathbf{c}) = \frac{1}{\pi^N |\mathbf{\Gamma}|} e^{-\mathbf{c}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{c}} \quad (1.14)$$

avec $\mathbf{\Gamma} = E[\mathbf{c} \mathbf{c}^H]$. Selon que $\mathbf{\Gamma}$ est connue ou inconnue, plusieurs types de tests d'hypothèses peuvent être envisagés. Il s'agit dans ce cas de détection respectivement dite non-adaptative ou adaptative. Dans tous les cas, les tests d'hypothèses sont composites car l'amplitude A du signal \mathbf{s} , equation (1.1.4), est inconnue.

1.2.1 La détection non-adaptative.

1.2.1.1 Cas de la matrice de covariance du bruit totalement connue.

Dans le cas où $\mathbf{\Gamma}$ est supposée totalement connue, les données secondaires sont inutiles. Le problème de détection consiste à décider entre les deux hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{y} = \mathbf{c} \\ H_1 : \mathbf{y} = A\mathbf{p} + \mathbf{c} \end{cases} \quad (1.15)$$

Nous nous intéressons dans ce paragraphe au TRVG pour lequel l'estimateur du maximum de vraisemblance \hat{A} du seul paramètre inconnu A s'écrit :

$$\hat{A} = \frac{\mathbf{p}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{y}}{\mathbf{p}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{p}}. \quad (1.16)$$

On en déduit alors aisément que le test du rapport de vraisemblance généralisée consiste à comparer la quantité test Λ suivante à un seuil λ :

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{p}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{y}|^2}{\mathbf{p}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{p}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda. \quad (1.17)$$

Ce test de détection est connue dans la littérature sous le nom d'Optimum Gaussian Detector (OGD) [5] noté maintenant Λ_{OGD} .

On peut remarquer que ce test revient à comparer la puissance en sortie du filtre adapté $\mathbf{w} = \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{s}$ à un seuil $s = \lambda(\mathbf{s}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{s})$:

$$|\mathbf{w}^H \mathbf{y}|^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} s. \quad (1.18)$$

En pratique, le seuil de détection λ doit être ajusté de façon à assurer la PFA que l'on se fixe. A cette fin, il faut déterminer la loi de probabilité de la quantité test Λ_{OGD} sous l'hypothèse H_0 et l'on montre que celle-ci est une loi du χ^2 :

$$\text{Sous } H_0, \Lambda_{OGD} \sim \frac{1}{2} \chi_2^2.$$

On en déduit alors la valeur du seuil de détection λ en fonction de la PFA :

$$\Lambda_{OGD} = -\ln(P_{fa}). \quad (1.19)$$

Enfin, la loi de Λ_{OGD} sous l'hypothèse H_1 permet d'évaluer les performances théoriques en détection (PD) :

Sous H_1 : $\Lambda_{OGD} \sim \frac{1}{2} \chi_{2, 2|A|^2 \mathbf{p}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{p}}^2$ d'où l'on en déduit :

$$PD = 1 - F_{\chi_{2,\delta}^2}(2 \lambda_{OGD}) \quad (1.20)$$

où $F_{\chi_{2,\delta}^2}(x)$ est la fonction de répartition d'une loi $\chi_{2,\delta}^2$ de paramètre de décentrement $\delta = 2 |A|^2 \mathbf{p}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{p}$.

1.2.1.2 Cas de la matrice de covariance connue à un facteur près.

Dans certains cas, la matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}$ du bruit est connue à un facteur de puissance près :

$$\mathbf{\Gamma} = \sigma^2 \mathbf{M} \quad (1.21)$$

où \mathbf{M} est une matrice hermitienne définie positive connue et σ^2 un facteur de puissance inconnu. Il s'agit alors de décider entre les hypothèses pour lesquelles les paramètres A et σ^2 sont inconnus.

Dans ce cadre, le test d'hypothèses est composite à la fois sous H_0 et sous H_1 , l'amplitude complexe du signal étant inconnue sous H_1 et la puissance du bruit l'étant sous les deux hypothèses. L'étude du TRVG dans ce cas a été menée dans [6] et donne comme estimateur du MV de A sous H_1 :

$$\hat{A} = \frac{\mathbf{p}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y}}{\mathbf{p}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p}} \quad (1.22)$$

et comme estimateurs de σ^2 sous les deux hypothèses respectivement :

$$\text{sous } H_0 : \hat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{y}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y}}{m} \quad (1.23)$$

$$\text{sous } H_1 : \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m} \left(\mathbf{y}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y} - \frac{|\mathbf{p}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y}|^2}{\mathbf{p}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p}} \right). \quad (1.24)$$

Le TRVG qui en découle est connu sous le nom de "Normalized Matched Filter" (NMF) et revient à comparer la quantité Λ_{NMF} à un seuil λ_{NMF} :

$$\Lambda_{NMF} = \frac{|\mathbf{p}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y}|^2}{(\mathbf{p}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p})(\mathbf{y}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_{NMF}. \quad (1.25)$$

On peut remarquer que Λ_{NMF} est insensible à un facteur d'échelle arbitraire sur l'observation \mathbf{y} . La mise en oeuvre de ce test nécessite le réglage du seuil λ_{NMF} de façon à satisfaire la PFA que l'on s'est fixée. A cette fin, on vérifie que Λ_{NMF} suit une loi Beta de première espèce sous H_0 (voir annexe B.6) :

$$\Lambda_{NMF} \sim \beta_{(1, m-1)}^1, \quad (1.26)$$

ce qui permet d'ajuster le seuil par la relation

$$\lambda_{NMF} = 1 - P_{fa}^{\frac{1}{m-1}}. \quad (1.27)$$

Cette dernière expression montre que le seuil est indépendant de la puissance σ^2 du bruit et donc que le test est TFAC par rapport à σ^2 .

Afin d'évaluer les performances en détection du NMF, la loi de probabilité de la quantité test Λ_{NMF} sous H_1 a été déterminée et s'exprime en fonction d'une loi de Fisher décentrée selon :

$$\Lambda_{NMF} \sim \frac{F(2, 2(m-1), 2|\alpha|^2 \mathbf{p}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p})}{F(2, 2(m-1), 2|\alpha|^2 \mathbf{p}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p}) + m - 1}. \quad (1.28)$$

On peut alors en déduire, en utilisant l'expression de la fonction de répartition d'une loi de Fisher décentrée [7], la valeur de la probabilité de détection :

$$P_d = 1 - (1 - \lambda_{NMF})^{m-1} e^{-SNR(1-\lambda_{NMF})} \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{\lambda_{NMF}}{1 - \lambda_{NMF}} \right)^i C_{m-1}^i \sum_{p=0}^{i-1} \frac{1}{p!} SNR^p (1 - \lambda_{NMF})^p, \quad (1.29)$$

avec $SNR = |A|^2 \mathbf{p}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p}$ (SNR après traitement) et C_p^n le symbole de Newton défini par $C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \leq n$ et $text{C}_p^n = 0$ si $p > n$.

1.2.2 La détection adaptative.

Les détecteurs rappelés précédemment en environnement gaussien souffrent cependant d'un problème important : la matrice de covariance du fouillis n'est pas connue en pratique, il faut par conséquent l'estimer. Un estimateur, noté de manière générique $\hat{\Gamma}$, est ensuite injecté dans les différents détecteurs utilisés pour en donner une version dite adaptative.

En règle générale, les méthodes adaptatives supposent que le nombre K de données secondaires utilisées pour l'estimation de Γ est supérieur ou égal à m de façon à assurer l'inversibilité de cette matrice de covariance empirique. Cette condition est supposée satisfaite dans les paragraphes qui suivent. Des performances satisfaisantes en termes de probabilité de détection nécessitent toutefois un nombre de données secondaires sensiblement supérieur à cette valeur limite m . Les techniques classiques de détection adaptative ne sont utilisées en pratique que lorsque K est supérieur à $2m$ (règle dite de Brennan dans le cas gaussien).

Enfin, pour utiliser ces tests adaptatifs de manière pertinente, il est utile de connaître la relation théorique liant le seuil et la PFA : celle-ci est fournie pour chacun d'eux dans les paragraphes qui suivent. Comme nous le verrons, l'expression des seuils de détection permettant d'assurer une PFA donnée est indépendante de la valeur de la matrice de covariance Γ du bruit : ces tests sont donc dits à Taux de Fausses Alarmes Constant (TFAC) par rapport à Γ , propriété très intéressante qui garantit cette PFA sans connaître Γ .

L'expression des performances théoriques en détection est quant à elle sensiblement plus complexe et ne sera pas abordée dans ce document.

Dans la suite de cette partie, nous étudierons deux cas de problèmes de détection adaptative. Dans le premier cas, les données secondaires seront distribuées selon la même loi que le bruit et on considèrera donc $\Gamma = \mathbf{M}$ (resp. $\hat{\Gamma} = \hat{\mathbf{M}}$). Dans un second cas, on considèrera que la covariance de la donnée primaire n'est pas partagée par la donnée secondaire : $\Gamma = \sigma^2 \mathbf{M}$. Dans cette partie, la matrice \mathbf{M} représentera donc la matrice de covariance des données secondaires.

1.2.2.1 Le Generalized Likelihood Ratio Test (GLRT) de Kelly.

Dans [8], Kelly a développé le GLRT pour le problème (1.1) dans lequel l'amplitude complexe du signal et la matrice de covariance Γ du bruit sont inconnus. Il y montre que ce test prend la forme

suivante :

$$\Lambda_{Kelly} = \frac{|\mathbf{p}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{y}|^2}{(\mathbf{p}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{p})(1 + \mathbf{y}^H \mathbf{S}^{-1} \mathbf{y})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \lambda_{Kelly} \quad (1.30)$$

où \mathbf{S} est, à un facteur près, la matrice de covariance empirique des données secondaires : $\mathbf{S} = \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^H$.

La loi de la quantité test sous les deux hypothèses est également précisée. Sous H_0 , Kelly montre le résultat suivant :

Sous H_0 , $\Lambda_{Kelly} \sim \beta_{(1, K-m+1)}^1$
 résultat qui permet de déterminer la relation " P_{fa} -seuil" :

$$\lambda_{Kelly} = 1 - P_{fa}^{\frac{1}{K-m+1}}.$$

Cette expression montre que la valeur du seuil de détection assurant une PFA donnée est indépendante de la matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}$ du bruit : le test de Kelly est TFAC par rapport à $\mathbf{\Gamma}$. Sous l'hypothèse H_1 , la loi de Λ_{Kelly} est compliquée et ne permet pas d'obtenir une relation analytique maniable de la probabilité de détection.

1.2.2.2 l'Adaptive Matched Filter (AMF).

Sous l'hypothèse de bruit gaussien et sans *a priori* sur la nature de la matrice de covariance, la théorie du maximum de vraisemblance fournit comme estimateur de la matrice de covariance basée uniquement sur les données secondaires la *Sample Covariance Matrix* (SCM), régulièrement étudiée dans la littérature [9, 10] et qui suit une loi de Wishart (voir annexe B.7) :

$$\widehat{\mathbf{M}}_{SCM} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^H. \quad (1.31)$$

Il ne s'agit pas alors de l'estimateur au sens du MV de $\mathbf{\Gamma}$ sous les deux hypothèses car la donnée primaire n'est pas exploitée. Son utilisation courante lors de processus gaussiens et son caractère de référence sont notamment dus à ses propriétés statistiques intéressantes : consistance, absence de biais (voir annexe B.11) et distribution asymptotique gaussienne.

L'utilisation de cet estimateur par une méthode de type "plug-in" dans l'OGD permet d'obtenir un détecteur adaptatif gaussien appelé classiquement Adaptive Matched Filter (AMF) [11] et défini par :

$$\Lambda_{AMF} = \frac{|\mathbf{p}^H \widehat{\mathbf{M}}_{SCM}^{-1} \mathbf{y}|^2}{\mathbf{p}^H \widehat{\mathbf{M}}_{SCM}^{-1} \mathbf{p}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \lambda_{AMF}. \quad (1.32)$$

La notion d'adaptativité prend ici tout son sens par le fait que le détecteur est construit sur la base d'une matrice de covariance estimée. Le bruit considéré dans ce cas est celui de l'environnement immédiat de la cellule sous test et le détecteur prend ainsi en compte "le monde réel" auquel il s'adapte. La distribution statistique de l'AMF, équation importante car permettant de calculer ensuite la relation " P_{fa} -seuil", est donnée par :

$$p(z) = \frac{(K-m+1)(K-m+2)}{K(K+1)} {}_2F_1\left(K-m+2, K-m+3; K+2; -\frac{z}{K}\right), \quad (1.33)$$

avec ${}_2F_1(\cdot)$ la fonction hypergéométrique [7] définie par

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1} (1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt.$$

Cette relation permet par intégration de la fonction hypergéométrique $\left(P_{fa} = \int_{\lambda}^{+\infty} p(z) dz \right)$, de définir la relation " P_{fa} -seuil" de l'AMF :

$$P_{fa} = {}_2F_1 \left(K - m + 1, K - m + 2; K + 1; -\frac{\lambda_{AMF}}{K} \right). \quad (1.34)$$

Cette expression montre que la valeur du seuil de détection assurant une PFA donnée est indépendante de la matrice de covariance \mathbf{M} du bruit : l'AMF est TFAC par rapport à \mathbf{M} .

L'AMF et le test de détection de Kelly s'appuient sur les mêmes hypothèses quant à la nature des observations. Il est donc intéressant de comparer leurs performances en détection à PFA donnée. Pour $K = 2m$ et $P_d < 0.9$, les résultats montrent une légère supériorité du détecteur de Kelly avec un gain de l'ordre du dB sur le rapport signal à bruit nécessaire pour assurer une PD donnée. Toutefois, à forts SNR correspondants à des P_d supérieures à 0.9, l'AMF présente des performances très légèrement supérieures. Pour $K \geq 5m$, les performances des deux tests sont pratiquement identiques. La figure (1.2) présente les performances de détection comparées pour les détecteurs AMF, OGD et Kelly, en fonction du nombre de données secondaires utilisées pour l'estimation de la matrice du fouillis. Cette figure illustre bien les commentaires présentés ci-dessus.

1.2.2.3 l'Adaptive Normalized Matched Filter (ANMF).

Le problème traité dans ce paragraphe diffère légèrement de la formulation 1.1 exploitée jusqu'ici par le fait que la covariance de la donnée primaire n'est pas partagée par les données secondaires. Plus précisément, le test d'hypothèses est maintenant le suivant :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{y} = \mathbf{c} & \mathbf{y}_k = \mathbf{c}_k \quad k = 1, \dots, K \\ H_1 : \mathbf{y} = A\mathbf{p} + \mathbf{c} & \mathbf{y}_k = \mathbf{c}_k \quad k = 1, \dots, K \end{cases} \quad (1.35)$$

ou $\mathbf{c}, \mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_k$ sont indépendants, $\mathbf{c} \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2 \mathbf{M})$ et $\mathbf{c}_k \sim \mathcal{CN}(0, \mathbf{M})$, $A \in \mathbb{C}$ et σ^2 sont inconnus, \mathbf{M} est une matrice hermitienne définie positive inconnue.

Dans ce contexte, Kraut a montré dans [12] que le TRVG correspondant s'écrit :

$$\Lambda_{ANMF} = \frac{|\mathbf{p}^H \widehat{\mathbf{M}}_{SCM}^{-1} \mathbf{y}|^2}{(\mathbf{p}^H \widehat{\mathbf{M}}_{SCM}^{-1} \mathbf{p})(\mathbf{y}^H \widehat{\mathbf{M}}_{SCM}^{-1} \mathbf{y})} \underset{H_0}{\underset{H_1}{\gtrless}} \lambda_{ANMF}. \quad (1.36)$$

ou $\widehat{\mathbf{M}}_{SCM}$ est la covariance empirique des données secondaires.

Afin de simplifier l'étude statistique de ce test, en remarquant que $\frac{x}{1-x}$ est une fonction croissante, on peut réécrire (1.36) sous la forme :

$$L_{ANMF} = \frac{\Lambda_{ANMF}}{1 - \Lambda_{ANMF}} \underset{H_0}{\underset{H_1}{\gtrless}} \eta = \frac{\lambda_{ANMF}}{1 - \lambda_{ANMF}}. \quad (1.37)$$

La loi de ce rapport sous H_0 est précisée dans [13] et rappelée ici :

$$L_{ANMF} \sim \frac{1}{K - m + 1} \frac{1}{\beta_{(m-1, K-m+2)}^1} F(2, 2(K - m + 1)). \quad (1.38)$$

On en déduit donc l'expression liant la PFA au seuil de détection λ :

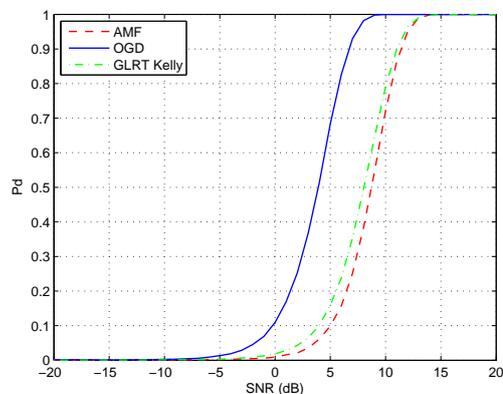
$$P_{fa} = \frac{\Gamma(K+1)}{\Gamma(K-m+2)\Gamma(m-1)} \int_0^1 \frac{1}{(1+\lambda x)^{K-m+1}} x^{m-2} (1-x)^{K-m+1} dx \quad (1.39)$$

qui s'exprime également en utilisant la fonction hypergéométrique :

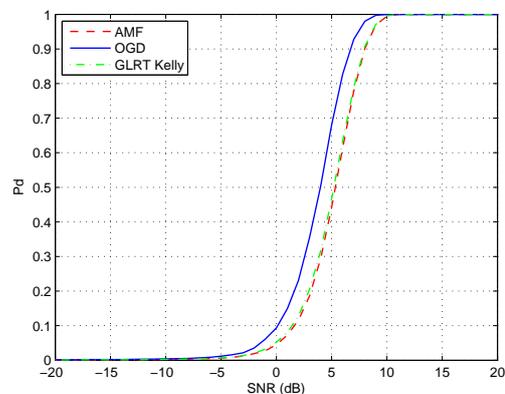
$$P_{fa} = {}_2F_1(K-m+1, m-1, K+1, \frac{\lambda}{\lambda-1}). \quad (1.40)$$

Cette expression montre que la valeur du seuil de détection assurant une PFA donnée est indépendante de la matrice de covariance \mathbf{M} du bruit affectant l'observation : l'ANMF est TFAC par rapport à \mathbf{M} .

La figure (1.3) illustre les performances comparées en détection pour les détecteurs OGD, NMF et ANMF. On constate également ici que le NMF présente des performances légèrement meilleures que l'ANMF pour $K = 2m$ mais que celles-ci sont pratiquement identiques pour $K = 5m$.

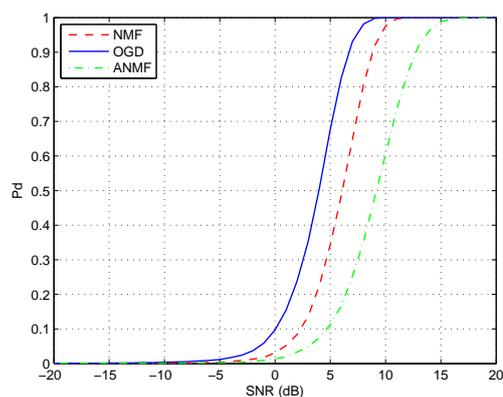


(a) Probabilité de détection avec $K = 20$.

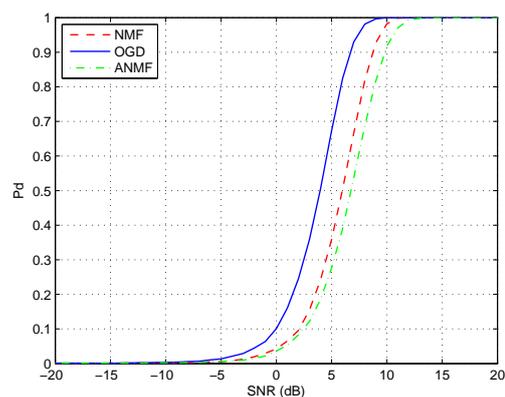


(b) Probabilité de détection avec $K = 50$.

FIG. 1.2 – Performances de détection pour l'AMF, l'OGD et le GLRT de Kelly en milieu gaussien. $PFA = 10^{-3}$, $m = 10$ et $K = 20$ (fig. gauche) ou $K = 50$ (fig. droite).



(a) Probabilité de détection avec $K = 20$.



(b) Probabilité de détection avec $K = 50$.

FIG. 1.3 – Performances de détection pour l'OGD, le NMF et l'ANMF en milieu gaussien. $PFA = 10^{-3}$, $m = 10$ et $K = 20$ (fig. gauche) ou $K = 50$ (fig. droite).

1.3 Détection Radar en milieu non-gaussien.

Les détecteurs étudiés dans les paragraphes précédents sont, par construction adaptés au fouillis gaussien. Cependant, dans un fouillis impulsionnel, leurs performances en détection se dégradent.

En effet, comme l'illustre la figure (1.4), sur laquelle sont représentés des rapports de vraisemblance dans le cas d'un bruit gaussien figure (1.4.a) et dans le cas d'un bruit K-distribué de paramètre $\nu = 0,1$ sur la figure (1.4.b), le seuil de détection λ (1.19) optimal pour le bruit gaussien devient sous-optimal et provoque de nombreuses fausses alarmes dans le cas du bruit de même puissance mais K-distribué. Ce seuil de détection doit donc dans ce dernier cas être rehaussé, en pratique souvent de manière manuelle par les opérateur, pour garantir la probabilité de fausse alarme souhaitée pour l'application. L'inconvénient de cette augmentation réside alors dans le fait qu'elle dégrade les performances de détection. Sur la figure, le seuil optimal λ_{opt} correspond parfaitement au seuil théorique λ dans le cas gaussien tandis qu'il est obtenu par tirages Monte-Carlo dans le cas non-gaussien (seuil rouge).

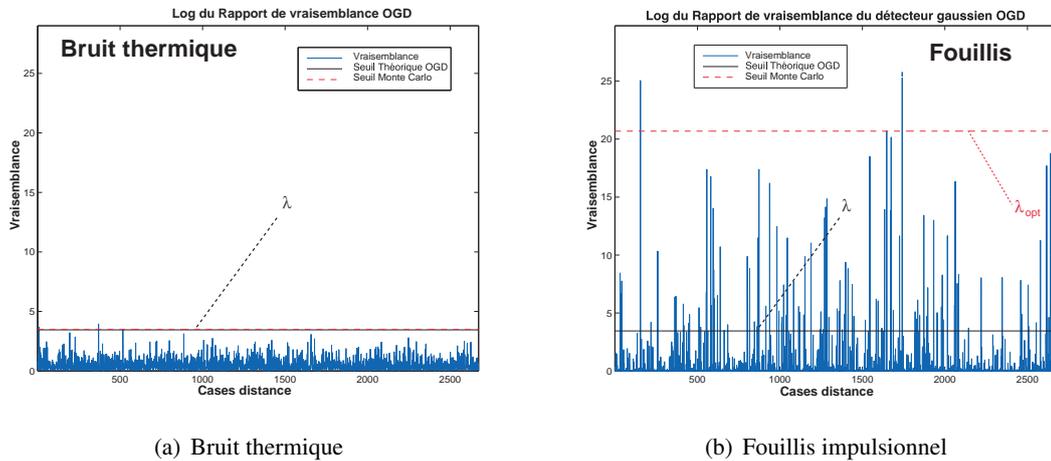


FIG. 1.4 – Mise en défaut de l'OGD dans du fouillis non gaussien, de même puissance que le bruit thermique - Ajustement du seuil de détection.

La figure (1.5) présente donc cette dégradation dans le cadre des courbes de performances de détection. La courbe bleue représente la probabilité de détection dans le cas gaussien et la courbe rouge, la probabilité dans le cas du fouillis non-gaussien, ici K-distribué. On voit clairement que pour un SNR à 0 dB, la P_d du bruit gaussien est de 0,7 alors qu'elle ne vaut que 10^{-2} dans le cas de la K-distribution.

La dégradation des performances peut donc être conséquente lorsque l'hypothèse sur le modèle de bruit ne correspond pas à l'environnement du radar. Des techniques d'optimisation du détecteur OGD pour différents environnements non-gaussiens ont été présentées dans [14]. Ces nouveaux détecteurs permettent de conserver une structure mathématique simple et réduisent chacun le taux de fausses alarmes. Cependant, ces détecteurs sont toujours mis en échec lorsque ils sont exploités avec des environnements de fouillis pour lesquels il n'ont pas été spécifiquement développés.

La connaissance parfaite de la statistique de l'environnement dans lequel va évoluer le radar est donc indispensable à l'obtention de détecteurs aux performances optimales. A défaut, une modélisation proche de la réalité, obtenue notamment par des campagnes de mesures, permet de palier la méconnaissance théorique de la statistique du bruit.

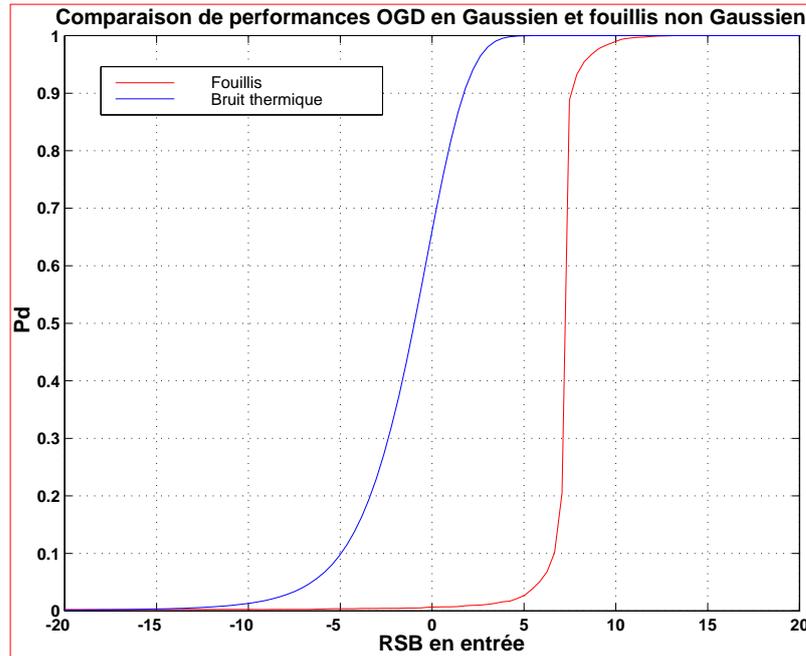


FIG. 1.5 – Mise en défaut de l’OGD dans du fouillis non gaussien, de même puissance que le bruit thermique - Probabilité de détection (le SNR considéré est ici avant traitement : $SNR = \frac{A^2}{\sigma^2}$).

1.3.1 Les vecteurs aléatoires sphériquement invariants ou SIRV

Ainsi donc, afin de connaître au mieux la nature réelle de l’environnement des radars, de nombreuses campagnes de mesures expérimentales du fouillis (clutter en anglais) ont été réalisées par des organismes tel que le MIT américain [1] ou l’ONERA en France. Ces campagnes ont montrées que les données pouvaient être correctement décrites par des modèles non-gaussiens. Certains de ces modèles appelés SIRP (*Spherically Invariant Random Process*) pour processus aléatoires sphériquement invariants sont connus comme étant des modélisations généraux et maniables des environnements non-gaussiens. Dans la suite de cette thèse, on fera par ailleurs référence aux SIRV (*Spherically Invariant Random Vectors*) ou vecteurs aléatoires sphériquement invariants, afin de respecter l’aspect vectoriel des modèles [2, 3, 15].

Un processus aléatoire sphériquement invariant est un processus gaussien non homogène de puissance aléatoire. Plus précisément, un SIRV \mathbf{c} [2] est le produit d’une variable aléatoire τ scalaire et positive, appelée la texture, et d’un vecteur aléatoire complexe gaussien circulaire \mathbf{x} , appelé *speckle* de dimension m , centré et ayant pour matrice de covariance $\mathbf{\Gamma} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H]$:

$$\mathbf{c} = \sqrt{\tau} \mathbf{x}. \quad (1.41)$$

D’autre part, la PDF $p_{\mathbf{c}}(\cdot)$ de \mathbf{c} est connue et son expression est la suivante :

$$p_{\mathbf{c}}(\mathbf{c}) = \int_0^{+\infty} g_m(\mathbf{c}, \tau) p_{\tau}(\tau) d\tau, \quad (1.42)$$

où $p_\tau(\cdot)$ désigne la PDF (inconnue) de la texture τ et la fonction $g_m(\cdot, \cdot)$, dépendant de la taille m des vecteurs est définie par :

$$g_m(\mathbf{c}, \tau) = \frac{1}{(\pi \tau)^m |\mathbf{\Gamma}|} \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{c}}{\tau}\right). \quad (1.43)$$

Ces modèles expriment donc une modulation aléatoire de la puissance instantanée d'un bruit gaussien. Cette modélisation permet par ailleurs de parfaitement décrire certaines situations expérimentales comme le fouillis de mer ou de terre [16]. Leur loi de probabilité est de plus connue dans de nombreux cas.

La modélisation SIRV permet donc d'obtenir un RV quelle que soit la statistique de l'environnement. L'expression de ces RV dépend de la densité de probabilité caractéristique du SIRV, ou plus simplement de la loi de la texture. A chaque SIRV correspondant une loi de texture, connue analytiquement ou pas, des stratégies de détection optimales pour chaque cas particulier de SIRV peuvent être développées. Par exemple, une K-distribution correspond à un SIRV présentant un texture de loi Gamma. Une loi de Weibull correspond à un SIRV ne pouvant être caractérisé par la loi de sa texture puisqu'elle n'est pas connue sous une forme analytique. Tous ces cas particuliers possibles de SIRV ont donc contribues à la production d'une littérature abondante [4, 17, 18, 19].

Les SIRV ont été largement étudiés dans la littérature, et une excellente synthèse de leurs propriétés et des détecteurs construits pour les différentes lois de probabilité, est disponible dans [14], chapitre 2.

Dans cette thèse, afin de travailler dans un cadre de description du fouillis le plus général et le plus réaliste possible, on utilisera la modélisation SIRV en supposant la loi de la texture inconnue.

Afin de définir précisément la problématique de cette thèse et d'introduire les résultats originaux de ce travail, il est nécessaire de s'attarder sur l'expression de la PDF du SIRV \mathbf{c} définie par l'équation (1.42).

En effet, cette PDF est à l'origine de la construction du test de RV ou en anglais, Likelihood Ratio Test (LRT), qui sera en fait un Rapport de Vraisemblance Généralisé puisque plusieurs paramètres dans (1.42) sont inconnus en pratique : la texture τ et la matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}$ du vecteur gaussien \mathbf{x} . C'est cette hypothèse de "non connaissance" de ces deux paramètres qui permet de conserver une problématique générale et réaliste.

De plus, pour des considérations d'identifiabilité, dans la grande majorité des études de modèles SIRV [20, 18], la matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}$ est normalisée selon $\text{Tr}(\mathbf{\Gamma}) = m$, appelée par la suite la $\mathbf{\Gamma}$ -normalisation, où $\text{Tr}(\cdot)$ représente la trace d'une matrice.

1.3.2 Détection non-adaptative.

Pour construire le détecteur correspondant à la modélisation SIRV, il faut revenir à l'expression (1.12) du rapport de vraisemblance et calculer la vraisemblance sous H_0 et celle sous H_1 grâce à la PDF (1.42) du SIRV. En effet, l'expression de ce détecteur s'obtient après formation du RV pour lequel les expressions des lois sous les hypothèses H_0 et H_1 résultent de l'intégration de la vraisemblance des observations $y_{obs}/H_{i,i=0..1}$ sur la loi estimée de la texture du SIRV $\hat{p}_N(\tau)$.

Ainsi, l'estimateur $\hat{p}_N(\tau)$ est obtenu dans [21] par une estimation bayésienne [22, 23, 24] à partir des K données de référence \mathbf{c}_k ou données secondaires définies par le modèle (1.1) :

$$\hat{p}_N(\tau) = \frac{\tau^{-m-1}}{2^m \Gamma(m) K} \sum_{k=1}^K (\mathbf{c}_k^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{c}_k)^m \exp\left(-\frac{\mathbf{c}_k^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{c}_k}{\tau}\right), \quad (1.44)$$

où $\Gamma(\cdot)$ désigne la fonction Gamma donnée $\forall z > 0$ par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt, \quad (1.45)$$

avec ce cas particulier bien connu, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\Gamma(m) = (m-1)! = (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$, le ! désignant l'opérateur factoriel.

Ensuite, en réinjectant l'estimateur de la PDF de la texture (1.44) dans le RVG (1.12), le Bayesian Optimum Radar Detector (BORD) est obtenu, mais, n'étant pas très maniable, il est préférable d'étudier sa version asymptotique (aBORD) en terme de K qui a la forme suivante :

$$\Lambda(\mathbf{M}) = \frac{|\mathbf{p}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{y}|^2}{(\mathbf{p}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{p})(\mathbf{y}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{y})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda, \quad (1.46)$$

où le seuil de détection λ est défini par [14]

$$\lambda = \frac{\sqrt[m]{\eta} - 1}{\sqrt[m]{\eta}}, \quad (1.47)$$

pour lequel η est le seuil de détection du BORD original. Le calcul du seuil de détection η pour une PFA donnée s'effectue alors selon :

$$\eta = P_{fa}^{\frac{m}{1-m}}. \quad (1.48)$$

Le BORD asymptotique conserve structurellement la propriété TFAC par rapport à la loi de la texture, de la même manière que le BORD. En effet, dans le cas d'une cible d'amplitude estimée selon le MV, le BORD asymptotique devient indépendant de la texture et, par conséquent, sa statistique est indépendante de la loi du SIRV considéré. Cette propriété permet donc d'appliquer, à PFA donnée, le même seuil de détection quel que soit l'environnement observé. L'expression du BORD Asymptotique ou aBORD coïncide avec l'expression de détecteurs obtenus par d'autres auteurs. Par exemple, K. J. Sangston et al. dans [25] l'obtiennent en considérant la texture du SIRV comme un paramètre déterministe et en la remplaçant par son estimée au sens du MV sous chacune des hypothèses.

Ce dernier détecteur connu sous le nom de GLRT-LQ ou encore NMF déjà présenté précédemment, peut s'exprimer un détecteur classique de type OGD mais pour lequel la puissance moyenne du fouillis est estimée sous l'hypothèse H_0 . Cette propriété est présentée dans [18], où F. Gini en donne une expression similaire. E. Conte et al. dans [20] en ont également obtenus une expression identique après un calcul asymptotique en environnement K-distribué. Antérieurement, V.A. Korado dans [26], et B. Picinbono et G. Vezzosi dans [27] avaient déjà obtenu cette expression sous des hypothèses de bruit non-gaussien.

La simplicité de l'expression du GLRT-LQ présentée ici associée à l'expression théorique pour le calcul du seuil de détection permettent maintenant d'imaginer tous les scénarios possibles pour étudier les performances de ce détecteur dans des environnements quelconques...

1.3.3 Détection adaptative.

Dans le cadre de la détection adaptative, la matrice de covariance du speckle $\mathbf{\Gamma}$ est inconnue. une solution à ce problème consiste à remplacer $\mathbf{\Gamma}$ par une estimée (par exemple $\widehat{\mathbf{M}}_{SCM}$). Dans ce cas, le GLRT-LQ devient ainsi l'Adaptive Normalized Matched Filter (ANMF) vu précédemment, ou encore appelé Adaptive Cosine Estimator (ACE) [28, 29] dont l'expression est :

$$\Lambda_{ANMF} = \frac{|\mathbf{p}^H \widehat{\mathbf{M}}_{SCM}^{-1} \mathbf{y}|^2}{(\mathbf{p}^H \widehat{\mathbf{M}}_{SCM}^{-1} \mathbf{p})(\mathbf{y}^H \widehat{\mathbf{M}}_{SCM}^{-1} \mathbf{y})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_{ANMF}. \quad (1.49)$$

En environnement non-gaussien, l'estimée $\widehat{\mathbf{\Gamma}}$ de la matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}$ est toujours basée sur les données de bruit seul $\mathbf{y}_k = \mathbf{c}_k$ pour lesquelles les échantillons \mathbf{c}_k sont modélisés comme étant des SIRV, partageant la même matrice de covariance que \mathbf{c} : $\mathbf{c}_k = \sqrt{\tau_k} \mathbf{g}_k$ et $E[\mathbf{g}_k \mathbf{g}_k^H] = \mathbf{\Gamma}$. Dans ce cas, en traitant les τ_k comme des paramètres déterministes inconnus, Conte et Gini dans [30, 31] ont proposé un estimé au sens du maximum de vraisemblance $\widehat{\mathbf{M}}_{FP}$ de $\mathbf{\Gamma}$ appelé l'estimateur du Point Fixe et défini comme la solution de l'équation dont l'implémentation est la suivante :

$$\widehat{\mathbf{M}}_{FP} = \frac{m}{K} \sum_{k=1}^K \frac{\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^H}{\mathbf{y}_k^H \widehat{\mathbf{M}}_{FP}^{-1} \mathbf{y}_k}. \quad (1.50)$$

Les propriétés statistiques de cette matrice (biais, unicité...) ont été étudiées par Pascal dans [32] et [33]. Il en ressort que le Point Fixe (Fixed Point en anglais), comme nous l'appellerons dorénavant, ne dépend pas de la texture du fouillis et peut-être obtenu par un algorithme récursif qui converge quel que soit le point de départ. Ainsi, l'utilisation de cette matrice estimée dans le GLRT-LQ permet d'en obtenir une version adaptative permettant d'obtenir de bons résultats en environnement non-gaussien, le GLRT-FP :

$$\Lambda_{GLRT-FP} = \frac{|\mathbf{p}^H \widehat{\mathbf{M}}_{FP}^{-1} \mathbf{y}|^2}{(\mathbf{p}^H \widehat{\mathbf{M}}_{FP}^{-1} \mathbf{p})(\mathbf{y}^H \widehat{\mathbf{M}}_{FP}^{-1} \mathbf{y})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_{GLRT-FP}, \quad (1.51)$$

et dont la distribution asymptotique (c'est à dire quand $K \rightarrow \infty$) est donnée dans [34] par :

$$g_{K',m}(x) = \frac{(K' - m + 1)(m - 1)}{(K' - 1)(1 - x)^{(K' - m)}} {}_2F_1(a, a; b; x) \quad (1.52)$$

avec $K' = \frac{m}{m+1}K$, $a = K' - m + 2$ et $b = K' + 2$. Dans ce cas également, cette distribution permet de caractériser de manière opérationnelle le détecteur par sa relation " P_{fa} -seuil" :

$$P_{fa} = (1 - \lambda_{GLRT-FP})^{a-1} {}_2F_1(a, a - 1; b - 1; \lambda_{GLRT-FP}). \quad (1.53)$$

Afin de caractériser l'estimateur, puis le détecteur associé, on rappelle quelques définitions préalables :

- Un test statistique est dit "texture-CFAR" lorsque sa distribution est indépendante de la distribution de la texture,
- Un test statistique est dit "matrice-CFAR" lorsque sa distribution est indépendante de \mathbf{R} ,
- Un test statistique est dit "SIRV-CFAR" lorsqu'il est à la fois texture-CFAR et matrice-CFAR.

Ce détecteur GLRT-LQ possède donc la propriété importante au sens du radariste d'être "SIRV-CFAR", donc indépendant de la matrice et de la texture. De dernier point est important d'un point de vue opérationnel car il permet ensuite d'obtenir les courbes caractéristiques des détecteurs par comptage en utilisant des masques CFAR, nous présenterons ce principe lors des essais sur données opérationnelles au chapitre (4).

1.4 Problématique de l'étude.

Actuellement, l'AMF et le GLRT-FP forment aujourd'hui un des meilleurs duo, en terme de performance de détection, en ce qui concerne les détecteurs en environnement gaussien et non-gaussien. Il est cependant clair que l'estimation de la matrice de covariance a une forte influence sur les performances des détecteurs, quel qu'en soit l'environnement d'évolution. Le cas gaussien étant toujours régulièrement utilisé de par sa simplicité, il est nécessaire de s'y intéresser. Cependant, l'exploitation de modèles composés, plus réalistes d'un point de vue opérationnel, est absolument nécessaire en vue de l'amélioration de performances de détection. L'estimation de la matrice de covariance dans ces milieux présentant un intérêt croissant au sein de la communauté radar, l'idée majeure des travaux présentés dans ce document est d'utiliser une information *a priori* sur la structure de la matrice afin d'en améliorer l'estimation. Cette structure *a priori* se base sur la nature particulière du fouillis de sol observé par le radar et présentée par la suite.

Parmi les structures connues, la structure de Toeplitz, résulte de la stationnarité du fouillis. Elle a été présentée par Burg dans [35] tandis que Fuhrmann l'utilisait dans [36] en milieu gaussien à des fins de détection radar. Dans cette même perspective, les systèmes radar utilisant des capteurs ou réseaux de capteurs centro-symétriques à fréquence de récurrence d'impulsions constante et elles-même centro-symétriques, présentent des matrices de covariance à structure dite persymétrique. C'est cette structure particulière, présentée dans le chapitre suivant, qui sera exploitée afin d'améliorer l'estimation de la matrice de covariance et d'augmenter les performances de détection des détecteurs développés sur la base de l'hypothèse de persymétrie.

En environnement gaussien, l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance de la matrice de covariance persymétrique du clutter a été calculé dans [37] tandis que le GLRT correspondant a été étudié dans [38]. En environnement non-gaussien, modélisé par des SIRV, un schéma de détection a été proposé dans [39] et [40].

Notre approche, basée sur les matrices SCM (1.31) et FP (1.50) ainsi que les détecteurs correspondants AMF (1.32) et GLRT-FP (1.51), exploite une transformation originale dont l'intérêt est de rendre réelles les matrices de covariance utilisées. Cette méthode amène à développer deux nouveaux détecteurs pour environnement gaussien et non-gaussien respectivement appelés Persymmetric-Adaptive Matched Filter (PAMF) et GLRT-Persymmetric Fixed Point (GLRT-PFP). La richesse de cette transformation réside dans le fait qu'elle amène à un problème de détection simplifié, une meilleure estimation de la matrice de covariance et donc une amélioration des performances de détection. Cette technique est de plus extensible au processus STAP (Space Time Adaptive Processing ou traitement adaptatif spatio-temporel) et à la méthode du "rang réduit", présentés ensuite. Les caractéristiques statistiques des détecteurs sont également déterminés théoriquement, ce qui permet une exploitation opérationnelle de la méthode.

Chapitre 2

La structure Persymétrique de la matrice de covariance du fouillis.

Dans ce chapitre, la structure particulière persymétrique des matrices de covariance du clutter est étudiée ainsi que la transformation exploitant cette structure et permettant de rendre réels les éléments de ces matrices. La nouvelle modélisation proposée est également présentée et permet d'introduire les deux nouveaux détecteurs développés, pour les environnements gaussien et non-gaussien. Ces deux détecteurs sont alors étudiés statistiquement mais également d'un point de vue opérationnel.

2.1 La structure persymétrique et son exploitation.

Depuis de nombreuses années, la structure particulière de certaines matrices (Toeplitz, Hankel...) est étudiée pour l'optimisation de nombreuses applications (estimation en radar, télécom, mécanique...) et afin de réduire la complexité et le temps de calcul des algorithmes utilisés dans ces domaines. Dans les systèmes radar à PRF (Pulse Repetiting Frequency en anglais, plus connue sous le nom de fréquence de répétition) et antennes centro-symétriques, la matrice de covariance du clutter \mathbf{M} présente une structure dite "persymétrique" et définie par :

$$\mathbf{M} = \mathbf{J}_m \mathbf{M}^* \mathbf{J}_m, \quad (2.1)$$

avec \mathbf{J}_m matrice antidiagonale identité (i.e qui ne possède que des "1" sur son antidiagonale) de dimension m :

$$\mathbf{J}_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

et \mathbf{M}^* , matrice conjuguée de \mathbf{M} .

Le steering vector du problème est également persymétrique, satisfaisant donc la relation suivante :

$$\mathbf{p} = \mathbf{J}_m \mathbf{p}^*. \quad (2.3)$$

Cette structure persymétrique va donc être exploitée afin d'améliorer l'estimation de la matrice de covariance du fouillis et donc d'améliorer les performances en détection des détecteurs associés. Pour ce faire, le théorème suivant permet de transformer une matrice (resp. vecteur) persymétrique en une

matrice (resp. vecteur) réelle :

Théorème 2.1.0.1 (Transformation unitaire de la matrice de covariance)

Soit \mathbf{T} la matrice unitaire définie par :

$$\mathbf{T} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m/2} & \mathbf{J}_{m/2} \\ i \mathbf{I}_{m/2} & -i \mathbf{J}_{m/2} \end{pmatrix} & \text{pour } m \text{ pair} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{(m-1)/2} & 0 & \mathbf{J}_{(m-1)/2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ i \mathbf{I}_{(m-1)/2} & 0 & -i \mathbf{J}_{(m-1)/2} \end{pmatrix} & \text{pour } m \text{ impair.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Les matrices hermitiennes persymétriques et les steering vectors persymétriques sont alors caractérisés par les propriétés suivantes :

- $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^m$ est un vecteur persymétrique si et seulement si $\mathbf{T} \mathbf{p}$ est un vecteur réel.
- \mathbf{M} est une matrice hermitienne persymétrique si et seulement si $\mathbf{T} \mathbf{M} \mathbf{T}^H$ est une matrice réelle symétrique.

L'intérêt de ce théorème, dont la preuve est donnée ci-après, est donc ici immédiatement visible : la transformation rendant les éléments réels est unitaire et ne fait intervenir que des produits matriciels simples. Elle est donc facilement implémentable sur un calculateur sans augmenter les coûts de calcul.

Preuve 2.1.0.1

La preuve de ce théorème traitera d'abord le cas du steering vector \mathbf{p} puis dans un second temps, le cas de la matrice \mathbf{M} . Tout au long de cette preuve, on utilisera le fait que $\mathbf{J}_m^2 = \mathbf{I}_m$. Afin de d'alléger et de faciliter la lecture, le raisonnement est présenté pour le cas m pair, il est identique pour le cas m impair.

- Première partie de la preuve : persymétrie de \mathbf{p} .

Soit $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{pmatrix}$ un vecteur persymétrique avec \mathbf{p}_1 et $\mathbf{p}_2 \in \mathbb{C}^{m/2}$.

$$\mathbf{p} = \mathbf{J}_m \mathbf{p}^* \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{p}_1 = \mathbf{J}_{m/2} \mathbf{p}_2^* \\ \mathbf{p}_2 = \mathbf{J}_{m/2} \mathbf{p}_1^* \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{p}_1^* = \mathbf{J}_{m/2} \mathbf{p}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{p}_1 + \mathbf{J}_{m/2} \mathbf{p}_2 \text{ est réel} \\ i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{J}_{m/2} \mathbf{p}_2) \text{ est réel} \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{T} \mathbf{p} \text{ est réel.}$$

Ceci complète la première partie de la preuve de la proposition (2.1.0.1).

- Seconde partie de la preuve : persymétrie de \mathbf{M} .

Soit $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix}$. On montre facilement que la propriété de persymétrie de $\mathbf{M} (\mathbf{J}_m \mathbf{M} \mathbf{J}_m = \mathbf{M}^*)$ est équivalente à

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{11}^* = \mathbf{J}_{m/2} \mathbf{M}_{22} \mathbf{J}_{m/2} \\ \mathbf{M}_{12} \mathbf{J}_{m/2} = (\mathbf{J}_{m/2} \mathbf{M}_{21})^* \end{cases} \quad (2.5)$$

On développe ensuite :

$$\mathbf{T} \mathbf{M} \mathbf{T}^H = \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} + \mathbf{J}_{m/2} \mathbf{M}_{22} \mathbf{J}_{m/2} + \mathbf{J}_{m/2} \mathbf{M}_{21} + \mathbf{M}_{12} \mathbf{J}_{m/2} & -i(\mathbf{M}_{11} - \mathbf{J}_{m/2} \mathbf{M}_{22} \mathbf{J}_{m/2} + \mathbf{J}_{m/2} \mathbf{M}_{21} - \mathbf{M}_{12} \mathbf{J}_{m/2}) \\ i(\mathbf{M}_{11} - \mathbf{J}_{m/2} \mathbf{M}_{22} \mathbf{J}_{m/2} + \mathbf{M}_{12} \mathbf{J}_{m/2} - \mathbf{J}_{m/2} \mathbf{M}_{21}) & \mathbf{M}_{11} + \mathbf{J}_{m/2} \mathbf{M}_{22} \mathbf{J}_{m/2} - \mathbf{J}_{m/2} \mathbf{M}_{21} - \mathbf{M}_{12} \mathbf{J}_{m/2} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$(2.8)$$

et dans ce cas, (2.5) implique que \mathbf{TMT}^H est réel (l'antidiagonale est nulle).

Réciproquement, si \mathbf{TMT}^H est réel, alors

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{11} + \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \mathbf{M}_{22} \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} + \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \mathbf{M}_{21} + \mathbf{M}_{12} \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \text{ réel} \\ \mathbf{M}_{11} + \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \mathbf{M}_{22} \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} - \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \mathbf{M}_{21} - \mathbf{M}_{12} \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \text{ réel} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{M}_{11} + \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \mathbf{M}_{22} \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \text{ réel} \triangleq \mathbf{A} \\ \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \mathbf{M}_{21} + \mathbf{M}_{12} \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \text{ réel} \triangleq \mathbf{B} \end{cases} \quad (2.9)$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{11} - \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \mathbf{M}_{22} \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} + \mathbf{M}_{12} \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} - \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \mathbf{M}_{21} \text{ imaginaire} \\ \mathbf{M}_{11} - \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \mathbf{M}_{22} \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} + \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \mathbf{M}_{21} - \mathbf{M}_{12} \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \text{ imaginaire} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{M}_{11} - \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \mathbf{M}_{22} \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \text{ imaginaire} \triangleq i \mathbf{C} \\ \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \mathbf{M}_{21} - \mathbf{M}_{12} \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \text{ imaginaire} \triangleq i \mathbf{D} \end{cases} \quad (2.10)$$

avec \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D} matrices réelles.

On en déduit que $\mathbf{M}_{11} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + i \mathbf{C})$, $\mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \mathbf{M}_{22} \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - i \mathbf{C})$ et donc $\mathbf{M}_{11}^* = \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \mathbf{M}_{22} \mathbf{J}_{\frac{m}{2}}$.

De manière équivalente, $\mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \mathbf{M}_{21} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + i \mathbf{D})$ et $\mathbf{M}_{12} \mathbf{J}_{\frac{m}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} - i \mathbf{D})$.

Ainsi on obtient que $\mathbf{J}_{\frac{m}{2}} \mathbf{M}_{21} = (\mathbf{M}_{12} \mathbf{J}_{\frac{m}{2}})^*$ ce qui conclut cette preuve.

On peut maintenant utiliser cette proposition (2.1.0.1) afin de réécrire le problème original (1.1) en un problème équivalent utilisant les données transformées comme suit : soient \mathbf{x} les données primaires transformées, \mathbf{x}_k les données secondaires transformées, \mathbf{n} le vecteur de fouillis transformé et \mathbf{s} le steering vector transformé, tels que, respectivement, $\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{y}$, $\mathbf{x}_k = \mathbf{T} \mathbf{y}_k$, $\mathbf{n} = \mathbf{T} \mathbf{c}$, $\mathbf{n}_k = \mathbf{T} \mathbf{c}_k$ et $\mathbf{s} = \mathbf{T} \mathbf{p}$.

En utilisant la proposition (2.1.0.1), le steering vector transformé \mathbf{s} et la nouvelle matrice de covariance du clutter sont tous deux réels. Le problème original (1.1) est donc équivalent à :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{x} = \mathbf{n} & \mathbf{x}_k = \mathbf{n}_k, \text{ for } 1 \leq k \leq K, \\ H_1 : \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{s} + \mathbf{n} & \mathbf{x}_k = \mathbf{n}_k, \text{ for } 1 \leq k \leq K, \end{cases} \quad (2.11)$$

avec $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ et \mathbf{s} vecteur réel.

En environnement gaussien et sous l'hypothèse H_0 , \mathbf{n} et les K données secondaires transformées \mathbf{x}_k sont indépendantes et identiquement distribuées. Ces données suivent une distribution $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ avec $\mathbf{R} = \mathbf{TMT}^H$ matrice réelle symétrique grâce à la proposition (2.1.0.1).

En environnement non-gaussien, la modélisation SIRV permet de définir les données comme suit :

$$\mathbf{n} = \sqrt{\tau} \mathbf{h} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{n}_k = \sqrt{\tau_k} \mathbf{h}_k \quad (2.13)$$

Dans ce cas, $\mathbf{h} = \mathbf{T} \mathbf{g}$ et $\mathbf{h}_k = \mathbf{T} \mathbf{g}_k$ représentent les vecteurs "speckle" transformés avec la même matrice de covariance réelle $\mathbf{R} = \mathbf{TMT}^H$.

Les vecteurs \mathbf{n} et \mathbf{n}_k sont bien évidemment toujours des SIRVs avec la même texture et la matrice de covariance $\mathbf{R} = \mathbf{TMT}^H$.

Dans la suite de ce document, les études seront donc effectuées dans le cadre du problème équivalent (2.11). L'avantage principal de ce problème équivalent est qu'il va permettre d'estimer la matrice de covariance \mathbf{R} dans le cadre de la théorie du Maximum de Vraisemblance de manière simple. Ceci n'était par exemple pas le cas dans [37] lorsque les données originales \mathbf{y}_k étaient manipulées avec seule la matrice de covariance persymétrique. Une des richesses de cette transformation basée sur l'hypothèse de persymétrie est qu'elle est extrêmement simple d'utilisation. Nous allons donc maintenant nous intéresser à l'estimateur de la matrice persymétrique et à ce que cette persymétrie peut apporter dans le cadre d'une détection radar.

2.2 Schéma de détection en environnement "gaussien persymétrique".

Le but de cette section est d'étudier le principe de la détection en environnement gaussien sous l'hypothèse de persymétrie. Plus précisément, on étudiera maintenant le problème de l'estimation de la matrice de covariance persymétrique et on proposera un schéma de détection adapté au milieu gaussien et basé sur l'estimateur étudié. Ce nouveau schéma de détection sera décrit sous un angle statistique et "radaristique".

2.2.1 Estimation de la matrice de covariance.

Dans le cadre de la détection adaptative, il est maintenant nécessaire d'étudier l'estimateur du Maximum de Vraisemblance de la matrice de covariance réelle \mathbf{R} . Dans le contexte de notre problème (2.11), cette matrice est toujours estimée à partir des K données secondaires \mathbf{x}_k .

L'estimateur du maximum de vraisemblance de \mathbf{R} , sous contrainte de persymétrie, est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.2.1.1 (Estimateur du MV de \mathbf{R})

L'estimateur du Maximum de Vraisemblance $\hat{\mathbf{R}}_{PSCM}$ de la matrice réelle \mathbf{R} est donné par :

$$\hat{\mathbf{R}}_{PSCM} = \mathcal{R}e(\hat{\mathbf{R}}_{SCM}), \quad (2.14)$$

avec

$$\hat{\mathbf{R}}_{SCM} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H = \mathbf{T} \hat{\mathbf{M}}_{SCM} \mathbf{T}^H. \quad (2.15)$$

Dans ce cadre, $\hat{\mathbf{R}}_{PSCM}$ est un estimateur non biaisé et $K \hat{\mathbf{R}}_{PSCM}$ est distribué selon une loi de Wishart réelle à $2K$ degrés de liberté et de matrice paramètre $\frac{1}{2} \mathbf{R}$.

Ainsi donc, comme souhaité, cet estimateur est d'une forme assez simple à déterminer et à implémenter sur ordinateur. La partie réelle permet ainsi de s'assurer une diminution du nombre d'éléments à estimer pour la matrice et permet donc, a priori, de diminuer les erreurs d'estimation. Cette diminution sera visible lors des simulations et des validations sur données réelles. Avant cette étape, nous présentons la démonstration du théorème précédent :

Preuve 2.2.1.1 (Preuve du théorème (2.2.1.1).)

La preuve de cette proposition va comporter deux parties. La première consacrée à la démonstration de l'estimateur du maximum de vraisemblance de la matrice de covariance et la seconde consacrée à l'étude des propriétés statistiques de cet estimateur.

- L'estimation par maximum de vraisemblance.

Dans le cadre de la théorie du maximum de vraisemblance, la fonction de log-vraisemblance à maximiser, pour le vecteur \mathbf{x}_k sous l'hypothèse H_0 est donnée par :

$$\begin{aligned} \ln L(\mathbf{x}) &= \ln \prod_{k=1}^K \frac{1}{\pi^m |\mathbf{R}|} e^{-\mathbf{x}_k^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}_k} \\ &= -K \ln(\pi^m) - K \ln(|\mathbf{R}|) - K \text{Tr}(\hat{\mathbf{R}}_{SCM} \mathbf{R}^{-1}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

En notant que pour deux matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} hermitiennes, $\text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) \in \mathbb{R}$, on obtient dans (2.16) :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\widehat{\mathbf{R}}_{SCM} \mathbf{R}^{-1}) &= \mathcal{R}e(\text{Tr}(\widehat{\mathbf{R}}_{SCM} \mathbf{R}^{-1})) \\ &= \text{Tr}(\mathcal{R}e(\widehat{\mathbf{R}}_{SCM} \mathbf{R}^{-1})) \\ &= \text{Tr}(\mathcal{R}e(\widehat{\mathbf{R}}_{SCM}) \mathbf{R}^{-1}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Cette dernière équation est valable pour \mathbf{R} réelle.

Ainsi donc $\ln L(\mathbf{x}) = -K \ln(\pi^m) - K \ln(|\mathbf{R}|) - K \text{Tr}(\mathcal{R}e(\widehat{\mathbf{R}}_{SCM}) \mathbf{R}^{-1})$ et le maximum de cette fonction est obtenu pour

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{R}^{-1}} &= \frac{\partial \left(K \ln |\mathbf{R}^{-1}| - K \text{Tr}(\mathcal{R}e(\widehat{\mathbf{R}}_{SCM}) \mathbf{R}^{-1}) \right)}{\partial \mathbf{R}^{-1}} = \mathbf{0} \\ &= \frac{K \partial \ln |\mathbf{R}^{-1}|}{\partial \mathbf{R}^{-1}} - \frac{K \partial \text{Tr}(\mathcal{R}e(\widehat{\mathbf{R}}_{SCM}) \mathbf{R}^{-1})}{\partial \mathbf{R}^{-1}} = \mathbf{0} \\ &= K \mathbf{R}^{\top} - K (\mathcal{R}e(\widehat{\mathbf{R}}_{SCM}))^{\top} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

La solution de cette équation est alors :

$$\mathbf{R} = \mathcal{R}e(\widehat{\mathbf{R}}_{SCM}) \quad (2.19)$$

On en déduit que la solution de notre problème est : $\widehat{\mathbf{R}}_{PSCM} = \mathcal{R}e(\widehat{\mathbf{R}}_{SCM})$.

- Propriétés statistiques de l'estimateur.

On pose \mathbf{a}_k et \mathbf{b}_k , respectivement partie réelle et imaginaire des données secondaires :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{a}_k + i \mathbf{b}_k, \quad (2.20)$$

et

$$K \widehat{\mathbf{R}}_{PSCM} = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^{\top} + \sum_{k=1}^K \mathbf{b}_k \mathbf{b}_k^{\top}. \quad (2.21)$$

Sous l'hypothèse de circularité de \mathbf{x}_k , i.e. $E[\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^{\top}] = \mathbf{0}$, on obtient :

$$\begin{aligned} E[\mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^{\top}] - E[\mathbf{b}_k \mathbf{b}_k^{\top}] &= \mathbf{0} \\ E[\mathbf{a}_k \mathbf{b}_k^{\top}] + E[\mathbf{b}_k \mathbf{a}_k^{\top}] &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.22)$$

de plus, \mathbf{x}_k possède une matrice de covariance réelle. Ceci implique que :

$$\begin{aligned} E[\mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^{\top}] + E[\mathbf{b}_k \mathbf{b}_k^{\top}] &= \mathbf{R} \\ E[\mathbf{a}_k \mathbf{b}_k^{\top}] - E[\mathbf{b}_k \mathbf{a}_k^{\top}] &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Les équations (2.22) et (2.23) amènent à :

$$\begin{aligned} E[\mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^{\top}] &= E[\mathbf{b}_k \mathbf{b}_k^{\top}] = \frac{1}{2} \mathbf{R} \\ E[\mathbf{a}_k \mathbf{b}_k^{\top}] &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.24)$$

montrant ainsi que les \mathbf{a}_k et \mathbf{b}_k sont indépendants et partagent la même matrice de covariance $\frac{1}{2} \mathbf{R}$.

De par l'équation (2.21), on obtient que $K\widehat{\mathbf{R}}_{PSCM}$ est distribué selon une loi de Wishart réelle à $2K$ degrés de liberté et de matrice paramètre $\frac{1}{2}\mathbf{R}$. De plus, sachant que

$$E[K\widehat{\mathbf{R}}_{PSCM}] = 2K\frac{1}{2}\mathbf{R}, \quad (2.25)$$

on obtient au final $E[\widehat{\mathbf{R}}_{PSCM}] = \mathbf{R}$, ce qui conclut cette étude statistique.

Il est par ailleurs important de noter que l'utilisation de cette structure réelle de \mathbf{R} , donc de la persymétrie de \mathbf{M} permet de doubler virtuellement le nombre de données secondaires lors de l'estimation de $\widehat{\mathbf{R}}$. Comme on l'a également montré ici, l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance de l'estimée persymétrique de \mathbf{M} est assez simple à déterminer et à utiliser, contribuant à la pertinence de la méthode.

2.2.2 Le détecteur "gaussien persymétrique".

Le but de l'amélioration de l'estimation de la matrice de covariance étant d'améliorer les performances en détection, l'utilisation de ce nouvel estimateur $\widehat{\mathbf{R}}_{PSCM}$ dans le détecteur gaussien AMF permet de développer un nouveau détecteur appelé Persymmetric AMF ou PAMF et défini par :

$$\Lambda_{PAMF} = \frac{\left| \mathbf{s}^\top \widehat{\mathbf{R}}_{PSCM}^{-1} \mathbf{x} \right|^2}{\mathbf{s}^\top \widehat{\mathbf{R}}_{PSCM}^{-1} \mathbf{s}} \underset{H_0}{\underset{H_1}{\gtrless}} \lambda_{PAMF}. \quad (2.26)$$

On peut réécrire ce détecteur avec les données originales, qui font apparaître la matrice de transformation \mathbf{T} :

$$\Lambda_{PAMF} = \frac{\left| \mathbf{p}^H \mathbf{T}^H [\mathcal{R}e(\mathbf{T} \widehat{\mathbf{M}}_{SCM} \mathbf{T}^H)]^{-1} \mathbf{T} \mathbf{y} \right|^2}{\mathbf{p}^H \mathbf{T}^H [\mathcal{R}e(\mathbf{T} \widehat{\mathbf{M}}_{SCM} \mathbf{T}^H)]^{-1} \mathbf{T} \mathbf{p}} \underset{H_0}{\underset{H_1}{\gtrless}} \lambda. \quad (2.27)$$

La distribution de l'AMF est connue et a été rappelée par l'équation (1.33). Dans notre problème, contrairement au cas classique de l'AMF, $K\widehat{\mathbf{R}}_{PSCM}$ suit une loi de Wishart réelle à $2K$ degrés de liberté tandis que \mathbf{x} est complexe. Il s'agit donc maintenant de déterminer la distribution du PAMF sous l'hypothèse H_0 afin de pouvoir ensuite en déterminer la relation " P_{fa} -seuil". Ces deux relations sont ainsi présentées dans le théorème suivant :

Théorème 2.2.2.1 (Relations caractéristiques du PAMF)

- Sous H_0 , la PDF $p(z)$ de Λ_{PAMF} définit par l'équation (2.26) est :

$$p(z) = \frac{(2K - m + 1)(2K - m + 2)}{2K(2K + 1)} {}_2F_1 \left(\frac{2K - m + 3}{2}, \frac{2K - m + 4}{2}; \frac{2K + 3}{2}; -\frac{z}{K} \right), \quad (2.28)$$

- La relation entre la P_{fa} et le seuil de détection λ est donnée par :

$$P_{fa} = {}_2F_1 \left(\frac{2K - m + 1}{2}, \frac{2K - m + 2}{2}; \frac{2K + 1}{2}; -\frac{\lambda_{PAMF}}{K} \right). \quad (2.29)$$

Ici encore, la relation " P_{fa} -seuil" se déduit simplement de la PDF grâce à l'expression sous forme de loi hypergéométrique. Les calculs nécessaires à l'obtention de ces relations sont détaillés dans la preuve de ce théorème.

Preuve 2.2.2.1 (Preuve du théorème (2.2.2.1))

Afin de faciliter la lecture, le raisonnement suivi pour obtenir ces relations est présenté en annexe (A.1).

Cette section consacrée à l'environnement gaussien a donc permis de définir et de caractériser l'estimateur persymétrique $\widehat{\mathbf{R}}_{PSCM}$ de la matrice de covariance du fouillis ainsi que le détecteur PAMF optimisé s'y rapportant. Ces résultats théoriques seront illustrés par des simulations et les performances de détection associées seront présentées et analysées au chapitre (4). Par ces relations, on montre au chapitre 4 que les performances du PAMF sont améliorées par rapport aux performances de l'AMF, en terme de détection. Ceci est notamment vrai pour un faible nombre de données secondaires.

2.3 Le cas de l'environnement non-gaussien.

Dans cette section, on s'intéresse à l'utilisation de la structure persymétrique de la matrice de covariance dans le cas d'un fouillis non-gaussien modélisé par des SIRVs. On suivra dans ce cas la même démarche que pour le cas gaussien, à savoir l'étude de l'estimateur de la matrice de covariance puis l'utilisation et l'étude dans le détecteur non-gaussien construit avec cet estimateur.

2.3.1 L'estimateur de la matrice de covariance : le "Point-Fixe Persymétrique (PFP)".

Dans le cas non-gaussien, l'estimateur approché du Maximum de Vraisemblance de \mathbf{M} a été présenté au chapitre 1, sous le nom de matrice du Point-Fixe (1.50). Si la matrice transformée du speckle est réelle, sa structure peut être prise en compte lors de la procédure d'estimation en ne retenant que la partie réelle de l'estimateur du point fixe. Ceci amène à considérer un nouvel estimateur, appelé le "Point Fixe Persymétrique" ou PFP résultant de l'exploitation de la structure persymétrique de la matrice de covariance originale du speckle :

$$\widehat{\mathbf{R}}_{PFP} = \mathcal{R}e(\widehat{\mathbf{R}}_{FP}), \quad (2.30)$$

avec

$$\widehat{\mathbf{R}}_{FP} = \mathbf{T} \widehat{\mathbf{M}}_{FP} \mathbf{T}^H. \quad (2.31)$$

Bien que $\widehat{\mathbf{R}}_{PFP}$ ne soit pas l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance de \mathbf{R} , l'utilisation de la transformation par \mathbf{T} peut également présenter, tout comme dans le cas gaussien, des avantages remarquables en termes d'amélioration de l'estimation de la matrice. Toutefois, afin de s'assurer du bénéfice de la transformation, il est nécessaire de caractériser de manière statistique ce nouvel estimateur. Dans cette section, on s'intéresse donc toujours aux propriétés statistiques de cet estimateur sous l'hypothèse H_0 .

La définition d'un détecteur SIRV-CFAR a été donnée au chapitre précédent, section (1.3). Ce caractère CFAR du test statistique utilisant $\widehat{\mathbf{R}}_{PFP}$ est toujours intéressant à étudier en vue de la régulation de fausse alarme et de l'utilisation, lors de comptages sur données opérationnelles, d'un masque CFAR. Néanmoins on s'intéresse tout d'abord à l'estimateur lui-même.

Suivant la démarche initiée dans le cas gaussien, les propriétés statistiques de $\widehat{\mathbf{R}}_{PFP}$ sont présentées dans le théorème suivant :

Théorème 2.3.1.1 (Performances statistiques de $\widehat{\mathbf{R}}_{PFP}$)

- La distribution de $\widehat{\mathbf{R}}_{PFP}$ ne dépend pas de la texture,
- $\widehat{\mathbf{R}}_{PFP}$ est un estimateur consistant de \mathbf{R} ,
- $\widehat{\mathbf{R}}_{PFP}$ est un estimateur non biaisé de \mathbf{R} ,
- $\frac{\widehat{\mathbf{R}}_{PFP}}{\text{Tr}(\mathbf{R}^{-1} \widehat{\mathbf{R}}_{PFP})}$ a la même distribution asymptotique que $\frac{\widehat{\mathbf{R}}}{\text{Tr}(\mathbf{R}^{-1} \widehat{\mathbf{R}})}$, avec $\widehat{\mathbf{R}}$ distribuée selon une loi de Wishart réelle à $\frac{m}{m+1} 2K$ degrés de liberté et à matrice de paramètre \mathbf{R} .

Preuve 2.3.1.1

La preuve de ce théorème comporte deux parties. La première s'intéresse au biais et à la consistance de l'estimateur, la seconde à sa distribution.

- Consistance et biais.

Le caractère consistant et non-biaisé de $\widehat{\mathbf{R}}_{FP}$ a été prouvé dans [33]. Ne prendre en compte que la partie réelle de cet estimateur ne change rien à ces deux propriétés statistiques. En conséquence, notre nouvel estimateur est bien consistant et non-biaisé.

- Distribution de l'estimateur.

Toujours dans [33], on montre que $\frac{\widehat{\mathbf{R}}_{FP}}{\text{Tr}(\mathbf{R}^{-1} \widehat{\mathbf{R}}_{FP})}$ a la même distribution asymptotique que $\frac{\widehat{\mathbf{R}}_c}{\text{Tr}(\mathbf{R}^{-1} \widehat{\mathbf{R}}_c)}$ avec $\widehat{\mathbf{R}}_c$ matrice distribuée selon une loi de Wishart complexe à $\frac{m}{m+1} K$ degrés de liberté et matrice paramètre \mathbf{R} . De plus, $\frac{\widehat{\mathbf{R}}_{PFP}}{\text{Tr}(\mathbf{R}^{-1} \widehat{\mathbf{R}}_{PFP})}$ a la même distribution asymptotique que $\frac{\mathcal{R}e(\widehat{\mathbf{R}}_{FP})}{\text{Tr}(\mathbf{R}^{-1} \mathcal{R}e(\widehat{\mathbf{R}}_{FP}))}$. Sachant que $\text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{A} \mathcal{R}e(\mathbf{B}))$ lorsque \mathbf{A} est réelle symétrique et \mathbf{B} hermitienne, on en déduit que $\frac{\widehat{\mathbf{R}}_{PFP}}{\text{Tr}(\mathbf{R}^{-1} \widehat{\mathbf{R}}_{PFP})}$ a la même distribution asymptotique que $\frac{\widehat{\mathbf{R}}}{\text{Tr}(\mathbf{R}^{-1} \widehat{\mathbf{R}})}$, avec $\widehat{\mathbf{R}} = 2 \mathcal{R}e(\widehat{\mathbf{R}}_c)$ distribuée selon une loi de Wishart complexe à $K' = \frac{m}{m+1} 2K$ degrés de liberté et de matrice \mathbf{R} .

2.3.2 Le détecteur optimisé : GLRT-PFP.

L'estimateur amélioré étant maintenant connu, il ne reste plus qu'à l'intégrer au GLRT-FP (1.51) qui va devenir le GLRT-PFP (GLRT-Persymmetric Fixed-Point) défini par :

$$\Lambda_{GLRT-PFP} = \frac{|\mathbf{s}^\top \widehat{\mathbf{R}}_{PFP}^{-1} \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{s}^\top \widehat{\mathbf{R}}_{PFP}^{-1} \mathbf{s}) (\mathbf{x}^H \widehat{\mathbf{R}}_{PFP}^{-1} \mathbf{x})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \lambda_{GLRT-PFP}. \quad (2.32)$$

Il s'agit donc maintenant d'étudier les caractéristiques de ce détecteur, notamment ses propriétés CFAR, toujours importante pour le radariste en vue de la régulation de fausses alarmes. Cette partie de l'étude détaillée ici précède donc la partie analyse statistique qui s'intéressera aux propriétés déjà évoquées pour $\widehat{\mathbf{R}}_{PFP}$ à travers le théorème (2.3.1.1).

Théorème 2.3.2.1 (Propriétés statistiques du GLRT-PFP.)

– $\Lambda_{GLRT-PFP}$ est SIRV-CFAR.

– $\Lambda_{GLRT-PFP}$ a la même distribution que $\Lambda = \frac{|\mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{w}|^2}{(\mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{e}_1) (\mathbf{w}^H \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{w})}$ avec $\mathbf{w} \sim \mathcal{CN}(0, \mathbf{I})$,

$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^\top$ et $\widehat{\mathbf{W}}$ réelle-Wishart distribuée à $K' = \frac{m}{m+1} 2K$ degrés de liberté et de matrice paramètre \mathbf{I} .

Preuve 2.3.2.1 (Preuve du théorème (2.3.2.1) : propriétés du GLRT-PFP)

- Propriété SIRV-CFAR.

Comme $\widehat{\mathbf{M}}_{FP}$ ne dépend pas de la texture du fouillis, on déduit des équations (2.31) et (2.30) que $\widehat{\mathbf{R}}_{PFP}$

ne dépend pas non plus de la texture. De plus, on note que $\Lambda_{GLRT-PFP}$ est homogène en terme de τ sous H_0 . On en déduit donc que $\Lambda_{GLRT-PFP}$ est texture-CFAR.

En ce qui concerne le caractère CFAR-matrice de $\widehat{\mathbf{R}}_{PFP}$, il est nécessaire de s'intéresser au comportement de \mathbf{R} afin de montrer que cette matrice n'entre pas en jeu dans la statistique du détecteur. Pour ce faire, on pose $\mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \mathbf{R}^{\frac{\top}{2}}$ une factorisation réelle de \mathbf{R} et \mathbf{Q} une matrice unitaire réelle telle que :

$$\mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{s} = (\mathbf{s}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s})^{1/2} \mathbf{e}_1, \quad (2.33)$$

avec $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^\top$.

Cette équation n'est par ailleurs valable que parce que \mathbf{Q} et \mathbf{s} sont tous deux réels. $\Lambda_{GLRT-PFP}$ peut donc se réécrire comme suit :

$$\Lambda_{GLRT-PFP} = \frac{|\mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{w}|^2}{\left(\mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{e}_1\right) \left(\mathbf{w}^H \widehat{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{w}\right)}, \quad (2.34)$$

avec

$$\mathbf{w} = \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{h} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I}) \quad (2.35)$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{A}} &= \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{R}}_{PFP} \mathbf{R}^{-\frac{\top}{2}} \mathbf{Q}^\top \\ &= \mathcal{Re} \left(\mathbf{Q} \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{R}}_{FP} \mathbf{R}^{-\frac{\top}{2}} \mathbf{Q}^\top \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Il est montré dans [41] que $\mathbf{Q} \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{R}}_{FP} \mathbf{R}^{-\frac{\top}{2}} \mathbf{Q}^\top$ est un estimateur du point fixe de la matrice identité et que sa distribution est indépendante de \mathbf{R} . Cette propriété est également valable pour sa partie réelle $\widehat{\mathbf{A}}$ définie à l'équation (2.36). Ceci démontre le caractère matrice-CFAR de $\Lambda_{GLRT-PFP}$ et conclut ainsi cette partie de la preuve.

- Distribution de $\Lambda_{GLRT-PFP}$.

De par le dernier point du théorème (2.3.1.1), $\Lambda_{GLRT-PFP}$ a la même distribution que

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{s}^\top \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{x}|^2}{\left(\mathbf{s}^\top \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{s}\right) \left(\mathbf{x}^H \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{x}\right)}, \quad (2.37)$$

avec $\widehat{\mathbf{R}}$ distribuée selon une loi de Wishart à $K' = \frac{m}{m+1} 2K$ degrés de liberté et de matrice \mathbf{R} . On utilise alors la factorisation \mathbf{Q} définie en (2.33) et on pose $\widehat{\mathbf{W}} = \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{R}^{-\frac{\top}{2}} \mathbf{Q}^\top$. La matrice $\widehat{\mathbf{W}}$ est distribuée elle aussi selon une loi de Wishart réelle à K' degrés de liberté mais de matrice \mathbf{I} . Ainsi donc, Λ défini par l'équation (2.37) peut se réécrire comme suit :

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{w}|^2}{\left(\mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{e}_1\right) \left(\mathbf{w}^H \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{w}\right)}, \quad (2.38)$$

ce qui conclut la preuve.

Ce théorème revêt dans ce cas une importance particulière car la propriété CFAR-texture de $\Lambda_{GLRT-PFP}$ permet, lors des analyses de propriétés statistiques, de choisir \mathbf{n} et \mathbf{n}_k gaussiens.

Là encore, il est maintenant utile de s'intéresser à la détermination de la PDF de $\Lambda_{GLRT-PFP}$, ceci toujours dans l'objectif opérationnel d'une régulation de la fausse alarme. Cette PDF n'a pas encore pu être calculée intégralement, mais le théorème suivant donne un début de résultat :

Théorème 2.3.2.2 (Approche de la distribution du GLRT-PFP)

La distribution du GLRT-PFP peut-être approchée comme suit :

$\Lambda_{GLRT-PFP}$ a la même distribution asymptotique que $\frac{F}{F+1}$ avec :

$$F = \frac{(\alpha_1 l_{22} - \alpha_2 l_{21})^2 + \left(1 + \left(\frac{\beta_3}{l_{33}}\right)^2\right) (a l_{22} - b l_{21})^2}{(\alpha_2 l_{11})^2 + \left(l_{11} l_{22} \frac{\beta_3}{l_{33}}\right)^2 + l_{11}^2 \left(1 + \left(\frac{\beta_3}{l_{33}}\right)^2\right) b^2} \quad (2.39)$$

et pour laquelle toutes les variables aléatoires sont indépendantes et distribuées comme suit :

$a, b, \alpha_1, l_{21} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\alpha_2^2 \sim \chi_{m-1}^2$, $\beta_3^2 \sim \chi_{m-2}^2$, $l_{11}^2 \sim \chi_{K'-m+1}^2$, $l_{22}^2 \sim \chi_{K'-m+2}^2$, $l_{33}^2 \sim \chi_{K'-m+3}^2$,
avec $K' = \frac{m}{m+1} 2K$.

Preuve 2.3.2.2 (Preuve du théorème (2.3.2.2))

Ici encore, afin de ne pas surcharger la lecture, le détail de la détermination de cette distribution est présenté en annexe (A.2).

Dans ce chapitre, nous avons donc présenté la persymétrie et son utilisation *a priori*. Nous avons ensuite présenté et étudié deux estimateurs de la matrice de covariance, la PSCM pour le milieu gaussien et le PFP pour le milieu non-gaussien. Enfin, les deux détecteurs associés à ces estimateurs, respectivement le PAMF et le GLRT-PFP ont été introduits et étudiés théoriquement. Suite à cette introduction théorique nous allons présenter un contexte physique d'utilisation de ces détecteurs et nous verrons ainsi quels sont leurs apports en termes d'utilisation réelle et opérationnelle.

Chapitre 3

Applications de la persymétrie aux traitements "STAP" et "Rang Réduit".

Ce chapitre est consacré à l'étude des traitements spatio-temporels, qui permettent une forte rejection du fouillis, ainsi qu'à l'apport de la persymétrie à ces traitements. Il sera divisé en deux parties, la première traitera de la modélisation des signaux et du fouillis dans ces traitements. Dans cette partie, on présentera les avantages de ces traitements dans le cadre d'un processus de détection, ainsi que la modélisation utilisée qui nous permettra d'introduire la problématique de l'exploitation de la persymétrie dans ces procédés. La seconde partie sera consacrée à l'étude théorique du traitement spatio-temporel adaptatif (STAP) à travers l'utilisation de la méthode dite de "réduction du rang". A cette méthode sera appliquée la persymétrie et nous montrerons quel bénéfice sera tiré de cette exploitation appliquée au STAP.

3.1 Les Traitements Spatio-Temporels.

3.1.1 Contexte et problématique.

Comme nous l'avons brièvement évoqué au début de ce manuscrit, une des fonctions principales d'un radar est de détecter une cible. Pour ce faire, de nombreux processus ont été développés depuis des années pour arriver à un but ultime, objectif majeur du radariste, supprimer la fausse alarme. Les détecteurs présentés auparavant permettent d'avancer un peu plus vers ce but. Un autre objectif opérationnel qui présente un intérêt grandissant depuis de nombreuses années est la détection de cibles mobiles par un radar aéroporté. En effet, par rapport aux radars sols classiques, où le fouillis est à vitesse nulle, les échos de fouillis dans le cadre d'un radar aéroporté présentent un étalement en vitesse qui peut masquer des cibles se déplaçant à vitesse faible, les rendant ainsi indétectables. Cet étalement, du au mouvement du porteur de la plate-forme radar, a contribué au développement d'autres traitements en parallèle de la détection classique, c'est le cas du STAP.

Le Space Time adaptive Processing ou traitement adaptatif spatio-temporel en français est un procédé de traitement des données qui fait intervenir la combinaison d'un réseau de capteurs avec un traitement conjoint des données spatiales et temporelles reçues (voir figures (3.1) et (3.3)) et dont le principe a été introduit en 1973 dans [42]. La mise en oeuvre de traitements adaptatifs spatio-temporels de suppression de fouillis et/ou de brouilleurs, exploitant les propriétés spécifiques bidimensionnelles spatiotemporelles (ou dans le domaine dual, angle-fréquence), des signaux reçus, améliore donc la détection par rapport aux antennes monovoies. A cause du mouvement du porteur, la fréquence Doppler d'une cible fixe est

donnée par la relation $f_d = \frac{2V \sin \theta}{\lambda}$ (V : vitesse du porteur, θ : localisation angulaire de la cible, λ : longueur d'onde). C'est pourquoi un filtre opérant dans le domaine temporel uniquement ne peut éliminer efficacement le fouillis qu'au prix d'une forte atténuation des cibles lentes (figure (3.3)). La solution consiste alors à effectuer un filtrage bidimensionnel spatio-temporel pour exploiter la relation de proportionnalité entre la fréquence Doppler d'une cible fixe et sa fréquence spatiale ($\frac{\cos \theta}{\lambda}$). La capacité à filtrer les données dans le domaine spatial est apportée par la formation de plusieurs voies sur l'antenne de réception. Du fait de la présence de mouvements parasites du porteur, de la nature inhomogène du fouillis (niveau, mouvement propre, inhomogénéité spatiale), et des défauts de calibration de l'antenne, les traitements mis en oeuvre ne peuvent s'envisager que de manière adaptative. Ils seront qualifiés dans la suite de manière générique de traitements STAP. Dans le cas classique du STAP, le radar est dit en

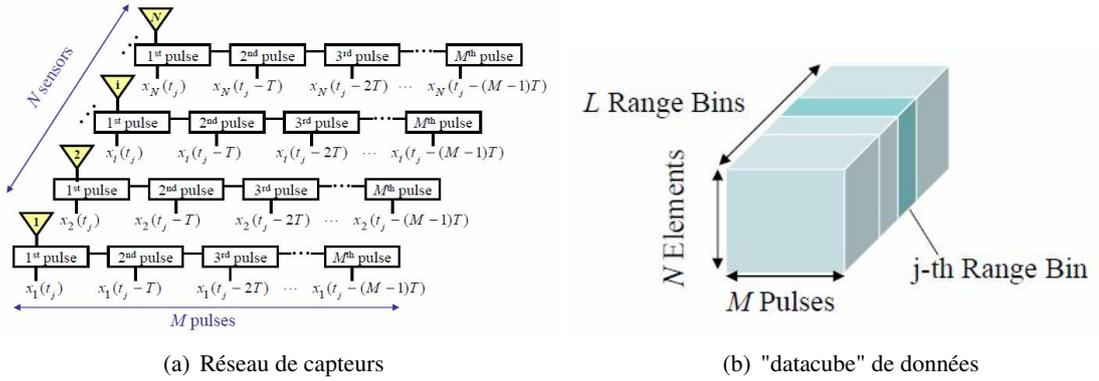


FIG. 3.1 – Schéma de principe du réseau de capteurs et des données produites.

configuration à visée latérale ("sidelooking radar" en anglais). L'antenne est alors à implantation latérale, cette configuration est typique d'un système air-sol sur avion rapide. Il s'agit alors ici de détecter des cibles lentes en compétition avec les échos de fouillis en provenance du lobe principal de l'antenne et vues à des vitesses comparables à celles des cibles recherchées, comme illustré sur la figure (3.2).

3.1.2 Modélisation.

Le traitement STAP, dont l'engouement se fait sentir dans la communauté radar depuis quelques années, possède l'avantage de permettre une rejection forte du clutter et améliore ainsi la détection. Il est de ce fait de plus en plus étudié [43, 44, 45, 46]. L'emploi de détecteurs optimisés dans ces traitements doit donc permettre d'augmenter encore les performances en termes de détection. On considère dans cette partie de l'étude le cas d'un radar à impulsions doppler cohérent à visée latérale dont l'antenne linéaire possède N capteurs uniformément répartis, séparés de la distance d . Ce radar émet des rafales (longueur d'onde λ) de M impulsions et L cases distances sont collectées pour chaque période de récurrence.

3.1.2.1 Modèle du signal.

Dans ce contexte, le problème de détection se formalise toujours par le test d'hypothèses binaire (1.1). Il s'agit donc toujours ici de détecter un signal $\mathbf{s} = A\mathbf{p} \in \mathbb{C}^{MN}$ corrompu par un bruit additif \mathbf{c} . Le signal reçu \mathbf{y} est un vecteur complexe de taille MN formé par les données spatio-temporelles reçues. A est l'amplitude complexe inconnue et \mathbf{p} est le steering-vector.

En STAP, ce steering-vector \mathbf{p} est formé par le produit de Kronecker (noté \otimes) d'un steering-vector tempo-

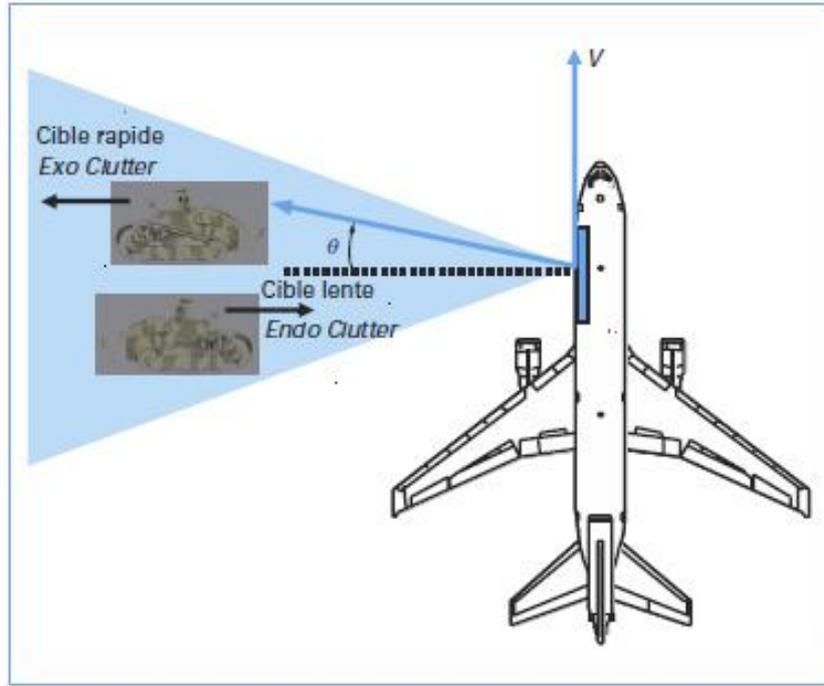


FIG. 3.2 – Radar en configuration à visée latérale.

rel $\mathbf{b}(f_d)$ de taille M , dépendant du Doppler, et d'un steering-vector spatial $\mathbf{a}(f_s)$ de taille N dépendant de l'angle d'arrivée de la cible :

$$\mathbf{p}(f, \theta) = \mathbf{b}(f_d) \otimes \mathbf{a}(f_s). \quad (3.1)$$

avec $\mathbf{b}(f)$ de la forme $\mathbf{b}(f_d) = [1 \dots e^{j2\pi f_d m T_r} \dots e^{j2\pi f_d (M-1) T_r}]^\top$ et $\mathbf{a}(f_s)$ de la forme $\mathbf{a}(f_s) = [1 \dots e^{j2\pi f_s m d} \dots e^{j2\pi f_s (M-1) d}]^\top$. Ce sont ces vecteurs spatio-temporels qui sont rangés dans le data-cube et permettent une exploitation des données dans les trois dimensions disponibles. Les fréquences f_d et f_s représentent les fréquences Doppler et spatiale [43] dont la géométrie est précisée figure (3.5) et définies respectivement par :

$$f_s = \frac{1}{\lambda} \cos(\theta_e) \sin(\theta_a) \quad (3.2)$$

et

$$f_d = \frac{2V}{\lambda} \sin(\theta_a) \cos(\theta_e). \quad (3.3)$$

La résolution distance du radar est déterminée par la largeur de bande B du signal émis : $\delta_r = \frac{c}{2B}$, avec c , célérité de la lumière dans le vide. Le nombre de cases distances disponibles est approximé par $L = \frac{B}{f_r}$ avec $f_r = \frac{1}{T_r}$ fréquence de récurrence du signal émis.

3.1.2.2 Modèle de fouillis.

• Fouillis sans ICM (Intrinsic Clutter Motion).

Le modèle de clutter de sol couramment utilisé et appelé GCM pour General Clutter Model (Modèle Général de Fouillis) est présenté dans [43]. Dans ce cas de figure, le fouillis est dit sans ICM (mouvement

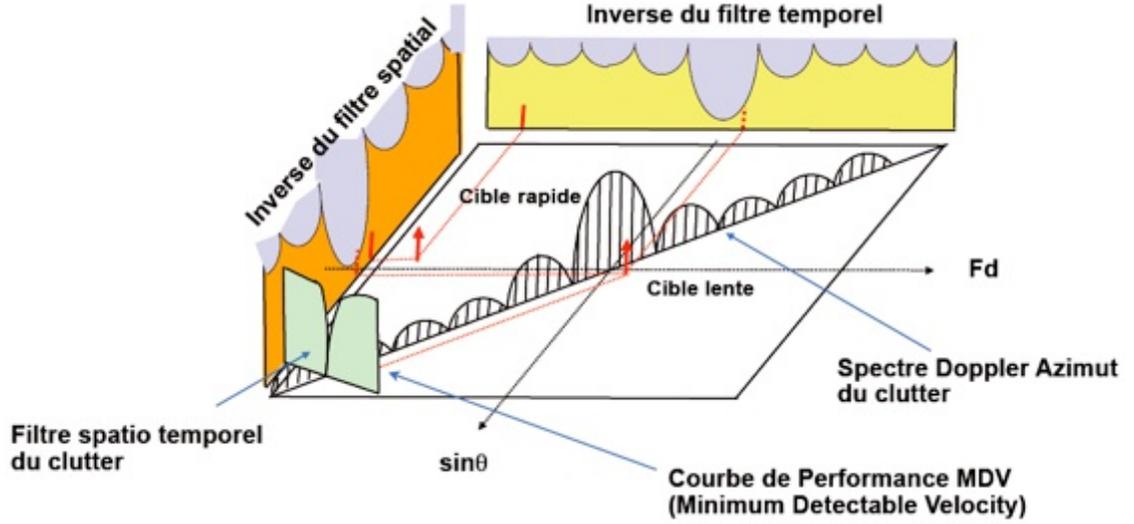


FIG. 3.3 – Schéma de principe du filtrage STAP.

intrinsèque du fouillis). L'ICM traduit le phénomène d'étalement du spectre Doppler du fouillis, causé par exemple par le mouvement de la végétation. L'ICM est fonction du type de la source réfléchissante et de la longueur d'onde du radar. En configuration de visée latérale, la matrice de covariance du fouillis sans ICM $\mathbf{M} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H]$ est définie comme la somme des contributions indépendantes des N_c éléments de sol dans chaque case distance (voir figure (3.5)). En terme de vecteurs spatiaux et temporels, cette matrice peut-encore se réécrire sous la forme :

$$\mathbf{M} = \sigma^2 \epsilon \sum_{i=1}^L \sum_{k=1}^{N_c} (\mathbf{b}_{ik} \mathbf{b}_{ik}^H) \otimes (\mathbf{a}_{ik} \mathbf{a}_{ik}^H) \quad (3.4)$$

pour laquelle σ^2 est la puissance du bruit, $\mathbf{b}_{ik} = \mathbf{b}(f_{ik})$ et $\mathbf{a}_{ik} = \mathbf{a}(\theta_{ik})$. ϵ représente dans ce cas une atténuation due au bilan radar [47].

• Fouillis avec ICM.

L'ICM considéré dans ce cas peut-être dû à la fois à l'ingénierie du radar (pour des radars à visée non latérale par exemple) et à l'état de l'environnement (vent dans les arbres...). Cet ICM crée des fluctuations d'impulsion à impulsion dans les retours du fouillis vers le radar. On considère donc ici l'ICM du clutter et, pour chaque ambiguïté r le sol est toujours découpé en N_c éléments équi-répartis en azimuth (figure (3.5)). L'élément numéro p est caractérisé par sa signature spatio-temporelle $\mathbf{b}_{r,p}(f) \otimes \mathbf{a}_{r,p}(\theta)$ et sa puissance $P_{r,p}$, qui est donnée par l'équation du radar. La matrice du fouillis de sol est alors de la forme :

$$\mathbf{M}_c = \sum_{r=1}^{N_a} \sum_{p=1}^{N_c} P_{r,p} (I_{r,p} \odot \mathbf{b}_{r,p}(f) \mathbf{b}_{r,p}(f)^H) \otimes (\mathbf{a}_{r,p}(\theta) \mathbf{a}_{r,p}(\theta)^H) \quad (3.5)$$

où $I_{r,p}$ est une matrice de taille $M \times M$ représentant le mouvement intrinsèque du fouillis de l'élément r, p . Il est d'usage de modéliser cet effet de décorrélation par un processus aléatoire stationnaire de spectre défini. Trois formes de spectre ont été proposées dans la littérature : la forme gaussienne, le

spectre de loi en puissance (power-law), et enfin la forme exponentielle. Lombardo et al. montrent dans [48] grâce à des données réelles, que le modèle exponentiel peut être dans certains cas le plus adapté mais est plus compliqué à manipuler. Dans le cas simple et plus couramment utilisé d'un spectre gaussien, la matrice d'ICM est de la forme :

$$I = \text{Toeplitz}(\gamma(0); \dots; \gamma(M-1)) \quad (3.6)$$

avec

$$\gamma(m) = e^{\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{4\pi\sigma_v m T_r}{\lambda_0}\right)^2\right)} \quad (3.7)$$

avec σ_v qui représente l'écart type en vitesse de l'étalement Doppler et *Toeplitz* qui représente une matrice à structure de Toeplitz, dont les caractéristiques seront présentés dans le paragraphe suivant. Typiquement σ_v varie de 0 jusqu'à 2 m/s pour du fouillis de mer.

• **Géométrie de la matrice de covariance du fouillis.**

Comme précisé précédemment, nous nous plaçons dans ce travail dans le cadre d'un radar à visée latérale. L'ICM du fouillis dans notre modèle est le degré de corrélation d'impulsion à impulsion que l'on propose et dans ce cas, la matrice de covariance **M** présente une structuration particulière de type matrice de Toeplitz par bloc, appelé Block-Toeplitz. Une matrice de Toeplitz est définie comme une matrice à diagonales constantes, c'est à dire une matrice pour laquelle les éléments sur chaque diagonale descendante de gauche à droite sont égaux. Dans le cas d'une matrice Block-Toeplitz, la matrice est de type bloc, et tous les blocs sur chaque diagonale descendante de gauche à droite sont égaux comme présenté sur la figure (3.4). Dans le cas d'une antenne linéaire à capteurs équidistants (Uniform Linear

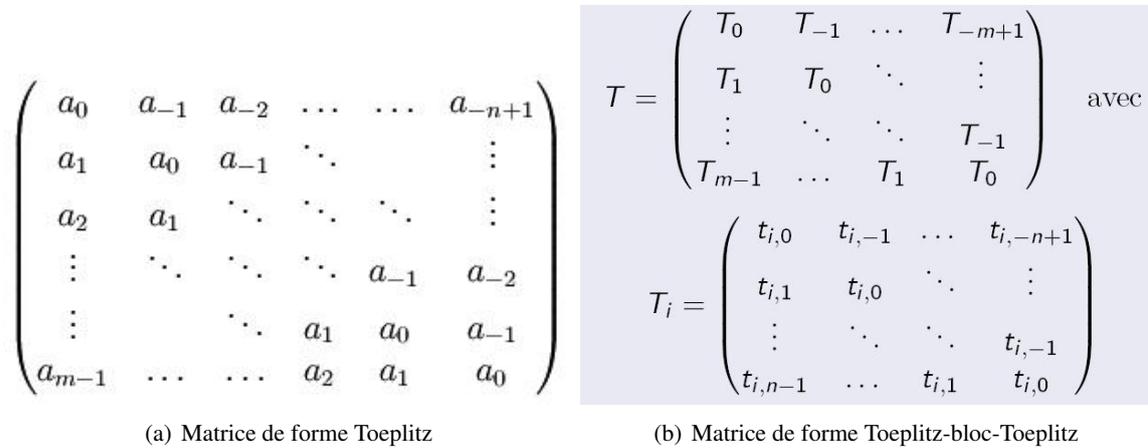


FIG. 3.4 – Structures particulières des matrices de Toeplitz.

array, ULA), les retours radars de chaque patch de fouillis sont considérés comme mutuellement indépendants. Chaque bloc de la matrice est donc lui-même de forme Toeplitz et la matrice est alors dite Toeplitz-Block-Toeplitz [49].

• **Rang du fouillis.**

Le rang du fouillis est un paramètre important à analyser, car il permet de caractériser la "sévérité" du fouillis, c'est à dire son influence sur le procédé de traitement et de déterminer le nombre de degrés

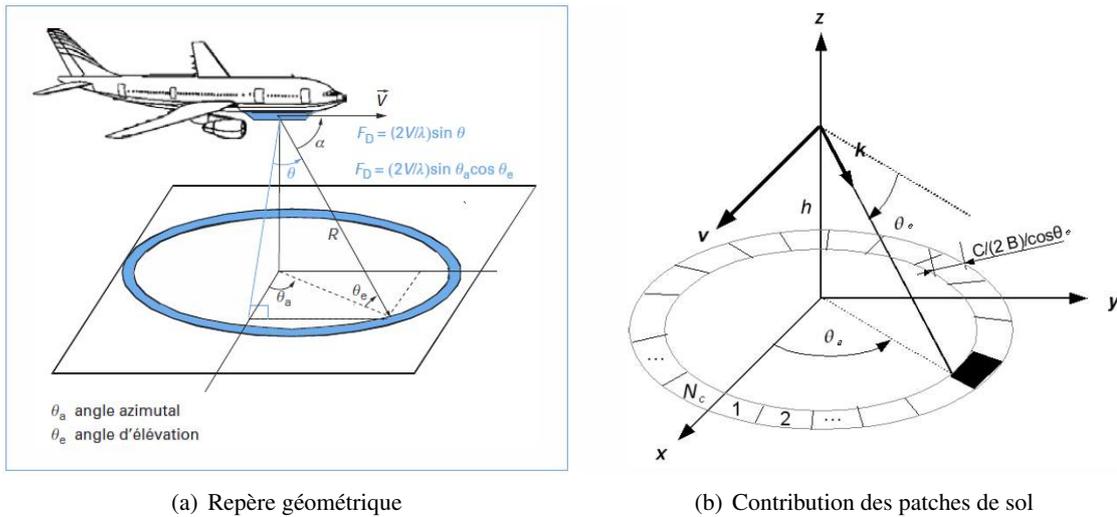


FIG. 3.5 – Repère de calcul des contributions des éléments de sol.

de liberté nécessaires pour mettre en œuvre l'annulation efficace du clutter. En STAP latéral, le rang du clutter est donné par la règle de Brennan [43] :

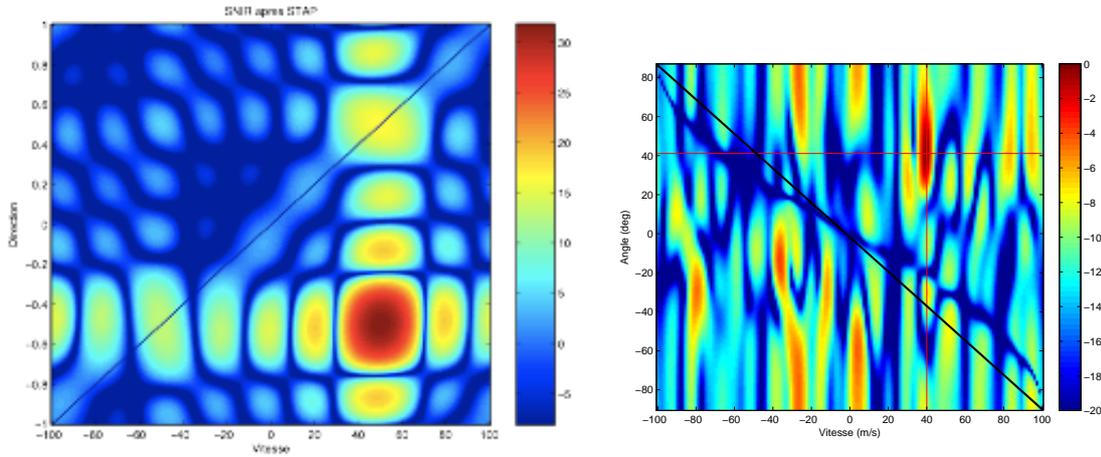
$$r = N + \beta(M - 1) \quad (3.8)$$

avec $\beta = 2 \frac{V_a T r}{\lambda}$. Dans le cas où β n'est pas un entier, un arrondi à l'entier inférieur de ce nombre est à effectuer afin de déterminer un rang entier pour le fouillis. Dans l'objectif d'une détection avec 3dB de perte, objectif classique du radar, il est nécessaire d'utiliser $K \geq 2NM$ données secondaires. Typiquement, le rang du clutter en STAP est considéré comme assez faible ($r < NM$), mais certains facteurs, l'ICM par exemple, contribuent à son augmentation.

La figure (3.6) suivante permet donc de visualiser le résultat d'une simulation de données STAP. La figure de gauche montre une simulation d'annulation de fouillis qui fait ressortir la cible dans un cas optimal. En ce qui concerne la figure de droite, on se place ici dans une case distance du "datacube" afin de visualiser une cible ainsi que la fameuse "arrête" ("ridge") du clutter, visible au niveau du trait noir. Ce clutter ridge est le lieu dans l'espace fréquence spatiale-fréquence Doppler où le fouillis est présent. Cette courbe représente ainsi la répartition spatio-temporelle de la puissance spectrale du fouillis. Le fouillis dans ce cas est gaussien, on considère un réseau de 4 capteurs et de 30 impulsions. On utilise le détecteur AMF avec 300 données secondaires. Ceci illustre le principe du STAP, qui permet de rejeter fortement le clutter, au prix, il est vrai, d'un temps de traitement assez longs et de l'utilisation de réseaux de capteurs. Ceci contribue également à expliquer le faible nombre de radars STAP opérationnels.

3.1.2.3 Apport de la persymétrie.

L'utilisation de la persymétrie, qui permet de doubler virtuellement le nombre de données secondaires, peut s'avérer utile en STAP, processus pour lequel peu de données secondaires sont en général disponibles. La persymétrie pourrait alors permettre de s'affranchir de la fameuse règle de Reed, Mallet et Brennan [50] qui impose $K > 2NM$ pour obtenir un maximum de 3 dB de perte lors de la détection. Le problème qui se pose alors dans le cadre de l'utilisation de la persymétrie en STAP est celui de la validité du modèle. En effet, l'hypothèse de persymétrie de la matrice de covariance vue dans les cas de radar



(a) Image d'une simulation STAP après traitement (faible nombre d'impulsions, une cible présente). (b) Simulation STAP après traitement, une cible présente, fouillis homogène gaussien et grand nombre d'impulsions utilisés. Détecteur AMF.

FIG. 3.6 – Exemples de visualisation de simulations STAP dans une case distance. Visualisation de l'annulation du fouillis (clutter ridge) et de la cible présente.

à antenne unique est peut-être mise en défaut par le réseau de capteurs du STAP. Dans le cas de matrice Toeplitz-Block-Toeplitz, la structure persymétrique plus générale, est respectée. La persymétrie peut être vue comme une structure "Toeplitz du pauvre" c'est à dire une contrainte plus générale et, de ce fait, la géométrie de la matrice ne pose donc pas de problème pour appliquer les traitements détaillés précédemment et espérer une amélioration des performances de détection des traitements spatio-temporels. De plus, afin de traiter également le cas Toeplitz, *a priori* plus efficace en termes de performances de détection mais plus complexe à étudier, on présente également au chapitre (4) quelques résultats de simulation de courbes caractéristiques sous contrainte de Toeplitz.

3.2 Les traitements Spatio-Temporels Adaptatifs.

Comme présenté dans les paragraphes précédents, le STAP diffère de la formation de voie classique par la combinaison des données spatiales et temporelles. Son objectif principal est cependant toujours de maximiser la réponse du signal utile tout en minimisant celle du clutter. Plusieurs méthodes sont maintenant présentées afin de satisfaire cet objectif.

3.2.1 Le traitement spatio-temporel optimal.

Dans le cas où la matrice de covariance exacte du fouillis est connue, le filtrage optimal consiste à maximiser la probabilité de détection, ou de manière identique le rapport signal à bruit. On pose \mathbf{x} , vecteur des observations, \mathbf{p} steering vector et \mathbf{c} le bruit. En termes de traitement, on a donc un signal exprimé classiquement par $\mathbf{x} = A\mathbf{p} + \mathbf{c}$, avec A l'amplitude complexe du signal. Soit un filtre \mathbf{w} . La sortie de ce filtre est exprimée (à une constante près) par :

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{w}^H \mathbf{x} \\ &= A \mathbf{w}^H \mathbf{p} + \mathbf{w}^H \mathbf{c}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$(3.10)$$

filtre pour lequel $A \mathbf{w}^H \mathbf{p}$ est le signal et $\mathbf{w}^H \mathbf{c}$ est l'expression du bruit.

Le SNR (\mathbf{w}) est donc le rapport de la puissance du signal sur la puissance du bruit :

$$\begin{aligned} SNR(\mathbf{w}) &= \frac{|A|^2 |\mathbf{w}^H \mathbf{p}|^2}{E(\mathbf{w}^H \mathbf{c} \mathbf{c}^H \mathbf{w})} \\ &= \frac{|A|^2 |\mathbf{w}^H \mathbf{p}|^2}{\mathbf{w}^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{w}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Le filtre optimal ou filtre adapté est le filtre qui permet d'obtenir le SNR_{max} . Il est défini par :

$$\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{p}. \quad (3.12)$$

On obtient donc une expression du SNR maximum :

$$SNR_{max} = |A|^2 \mathbf{p}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{p} \quad (3.13)$$

3.2.2 Le facteur de pertes.

Pour comparer les performances entre différents algorithmes, il est utile de définir le facteur de pertes en SNR : ρ . Le SNR loss ρ est défini comme le rapport du SNR du filtre considéré avec le SNR max ; il permet d'observer les pertes du filtrage utilisé par rapport au filtrage optimum :

$$\rho = \frac{SNR_w}{SNR_{max}} = \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{p}|^2}{(\mathbf{w}^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{w})(\mathbf{p}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{p})}. \quad (3.14)$$

Dans le cadre de la détection en environnement gaussien, maximiser le SNR équivaut à maximiser la PD à PFA fixée. Quel que soit l'environnement, le calcul du SNR loss permet ainsi de visualiser quel sera le filtre qui engendrera le moins de pertes par rapport à l'optimum et donc qui optimisera les performances de détection. De nombreux outils de comparaison de performances du STAP sont disponibles et présentés par exemple dans [46].

3.2.3 Le STAP adaptatif.

Comme nous l'avons déjà vu au chapitre 1, la matrice de covariance du fouillis n'est en pratique pas connue. Classiquement dans le cas gaussien, cette matrice est donc estimée à partir de K données secondaires \mathbf{y}_k par l'équation suivante :

$$\widehat{\mathbf{M}}_{SCM} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^H, \quad (3.15)$$

dont la formulation est à rapprocher de l'équation de la SCM (1.31) dans le cas de vecteurs Gaussiens i.i.d. La cellule sous test est bien évidemment exclue de ce traitement afin d'éviter que la cible ne s'annule elle-même (self-nulling). Dans certains cas également, des cellules adjacentes à la cellule sous test sont aussi retirées du procédé de calcul et servent alors de cellules de garde. Ceci permet d'éviter que d'éventuels lobes secondaires de la cible ne perturbent le procédé. L'algorithme basé sur cet estimateur est appelé le "Sample Matrix Inversion" (SMI) dont le vecteur de pondération (équation du filtre) est donné par :

$$\mathbf{w}_{smi} = \varepsilon \widehat{\mathbf{M}}_{SCM}^{-1} \mathbf{p}(f, \theta), \quad (3.16)$$

où ε est une constante. Le SNR loss dans ce cadre a été étudié par Reed dans [50] et sa distribution de probabilité suit donc une loi Beta de première espèce de paramètres $K + 2 - NM$ et $NM - 1$. Cette étude permet de retrouver le résultat classique qui impose d'utiliser $K > 2NM$ lors de la détection afin de ne pas dépasser 3 dB de perte. La complexité de calcul de cet algorithme est en $(O(NM))^3$ du fait de l'inversion matricielle, ce qui contribue à expliquer la difficulté de mise en oeuvre en temps-réel de ces traitements.

3.2.4 Algorithmes à Rang Réduit.

Afin de parer à ce grand besoin de données secondaires d'estimation et à un long temps de calcul, les méthodes à rang réduit (RR) réalisent l'adaptation sur un espace de dimension réduit obtenu après une transformation adaptative sur les données. Elles exploitent également la nature de faible rang du fouillis. Dans le cas du STAP à visée latérale et toujours dans l'optique d'améliorer la détection, la recherche d'un nombre de données secondaires toujours plus faible est le souci constant. La technique dite du rang réduit présenté notamment dans [51, 52, 53, 54] prend alors toute sa valeur dans le cadre d'un processus de détection. Elle permet ainsi de n'utiliser que $K > 2r$ données secondaires avec $r < NM$. La méthode RR permet donc de diminuer la taille de l'ensemble de données d'apprentissage comparée au STAP à pleine dimension. L'application de la persymétrie, avec son augmentation virtuelle du nombre de données secondaires, peut apporter ainsi une nouvelle diminution de ce nombre et donc une amélioration des performances en terme de détection.

3.2.4.1 Principe.

Dans cette partie, et c'est l'idée majeure de la méthode de réduction du rang, on utilise la propriété exprimant que les valeurs propres de \mathbf{M} d'ordre supérieur sont toutes égales entre elles et égales à σ^2 , et de valeur très inférieure aux premières valeurs propres associées au signal (i.e. les valeurs propres de rang faible), d'où :

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r \gg \lambda_{r+1} \simeq \dots \simeq \lambda_m \simeq \sigma^2 \quad (3.17)$$

Afin de déterminer la loi du SNR loss dans le cas d'un algorithme à rang réduit, une méthode de calcul par séparation en composantes principales a été proposée dans [55] mais l'utilisation de projecteurs de la matrice du fouillis lors de la détermination de la loi du SNR_{loss} permet un calcul plus aisé et rapide.

Les vecteurs propres de \mathbf{M} sont ainsi définis : $u_1 \dots u_r, u_{r+1} \dots u_m$.

On exprime donc \mathbf{M} en fonction de ceux-ci :

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H + \sum_{i=r+1}^m \sigma^2 \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H, \quad (3.18)$$

avec $\lambda_i \gg \sigma^2$. Lors de l'inversion matricielle, on obtient donc :

$$\mathbf{M}^{-1} = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H + \sum_{i=r+1}^m \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H. \quad (3.19)$$

avec $\frac{1}{\lambda_i} \ll \frac{1}{\sigma^2}$. Cette équation nous permet de négliger les valeurs propres fortes et donc d'approximer la matrice de covariance à :

$$\mathbf{M}^{-1} \approx \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=r+1}^m \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H, \quad (3.20)$$

avec $\mathbf{\Pi}^\perp = \sum_{i=r+1}^m \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$ le projecteur orthogonal de \mathbf{M} sur le sous-espace clutter. Ce projecteur est donc de rang plus faible que la matrice originale et le filtre qui lui est associé est défini par :

$$\mathbf{w}_{RR} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{\Pi}^\perp \mathbf{p}. \quad (3.21)$$

A partir de cette expression du filtre en rang réduit, il est possible de déterminer le SNR loss de l'application et d'en calculer sa loi, déterminant les performances de détection associées. Toutefois, avant de déterminer cette loi, on introduit les notations suivantes qui simplifieront les calculs :

On exprime \mathbf{M} par :

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H + \sum_{i=r+1}^m \sigma^2 \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H + \sum_{i=1}^r \sigma^2 \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H - \sum_{i=1}^r \sigma^2 \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H. \quad (3.22)$$

Dans cette expression, on voit que $\sum_{i=r+1}^m \sigma^2 \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H + \sum_{i=1}^r \sigma^2 \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H = \sigma^2 \mathbf{I}$ d'où :

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^r (\lambda_i - \sigma^2) \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H + \sigma^2 \mathbf{I}. \quad (3.23)$$

On pose alors

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^r (\lambda_i - \sigma^2) \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H, \quad (3.24)$$

qui permet d'obtenir : $\mathbf{M} = \mathbf{S} + \sigma^2 \mathbf{I}$. On introduit ensuite $\mathbf{\Pi}$, projecteur de \mathbf{M} sur le sous-espace signal et $\mathbf{\Pi}^\perp$ son projecteur (orthogonal) sur le sous-espace bruit :

$$\mathbf{\Pi} = \sum_{i=1}^r \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \quad (3.25)$$

et

$$\mathbf{\Pi}^\perp = \sum_{i=r+1}^m \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H = \mathbf{I} - \mathbf{\Pi} \quad (3.26)$$

On définit également \mathbf{S}^\sharp , matrice pseudo-inverse de \mathbf{S} :

$$\mathbf{S}^\sharp = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\lambda_i - \sigma^2} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H. \quad (3.27)$$

dont on démontre facilement que $\mathbf{S}^\sharp \mathbf{S} = \mathbf{S} \mathbf{S}^\sharp = \mathbf{\Pi}$ et $\mathbf{\Pi}^\perp \mathbf{S}^\sharp = \mathbf{0}$. On pose alors l'hypothèse suivante : on suppose que $\forall i = 1 \dots r, \mathbf{S} \mathbf{p} = 0$ et $\mathbf{u}_i^H \mathbf{p} = 0$. Ceci exprime le fait que \mathbf{p} est orthogonal aux \mathbf{u}_i dans le sous-espace désigné. Ceci implique donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} \mathbf{p} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{\Pi}^\perp \mathbf{p} &= \mathbf{p} \\ \mathbf{M} \mathbf{p} &= \sigma^2 \mathbf{p} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p} &= \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{p} \\ \mathbf{S}^\sharp \mathbf{p} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Physiquement, cela revient à dire que la source est supposée loin du clutter. Ces notations permettent donc de passer au calcul de la loi du SNR loss.

3.2.5 Rang réduit classique : calcul de la loi du facteur de pertes.

L'apport de la technique de réduction du rang réside dans la loi de son SNR_{loss} , loi qui permet de déterminer le nombre de données secondaire nécessaire à l'estimation du projecteur de la matrice. Cette loi a été déterminée théoriquement par Haimovich dans [54] mais la méthode présentée ici, basée sur l'utilisation du projecteur orthogonal de la matrice \mathbf{M} , permet une détermination plus aisée et rapide. Cette loi est présentée dans le théorème suivant :

Théorème 3.2.5.1 (Loi du SNR_{loss} du rang réduit complexe)

Dans le cas du rang réduit avec $\widehat{\mathbf{M}}_{SCM}$ complexe Wishart, le SNR_{loss} ρ est distribué comme suit :

$$\rho \sim 1 - \frac{1}{2K} \chi_{2r}^2. \quad (3.29)$$

Remarque : Dans ce cas, $\rho_{moyen} = E[\rho] = 1 - \frac{r}{K}$. Un $\rho_{moyen} = \frac{1}{2}$ (soit 3 dB de pertes en SNR) est obtenu pour $K = 2r$.

Preuve 3.2.5.1 (Preuve du théorème 3.2.5.1)

Nous nous plaçons pour cette partie de l'étude dans le cadre des hypothèses et notations présentées au paragraphe précédent. On a donc, en théorie, $\mathbf{M}^{-1} \approx \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{\Pi}^\perp$ et $\mathbf{w}_{RRC} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{\Pi}^\perp \mathbf{p}$. Cependant, en pratique, la matrice de covariance n'étant pas connue, il est nécessaire de l'estimer. Dans notre cas, ceci équivaut à calculer un projecteur estimé de la matrice : $\widehat{\mathbf{\Pi}}$ estimé sur K données secondaires. On obtient donc un SNR_{loss} du à l'estimation sur K données secondaires :

$$\rho = \frac{|\mathbf{p}^H \widehat{\mathbf{\Pi}}^\perp \mathbf{p}|^2}{(\mathbf{p}^H \widehat{\mathbf{\Pi}}^\perp \mathbf{M} \widehat{\mathbf{\Pi}}^\perp \mathbf{p})(\mathbf{p}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p})}, \quad (3.30)$$

or $(\mathbf{p}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p}) = \frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{p}\|^2 = \frac{1}{\sigma^2} MN$ donc :

$$\rho = \frac{\sigma^2}{MN} \frac{|\mathbf{p}^H \hat{\Pi}^\perp \mathbf{p}|^2}{(\mathbf{p}^H \hat{\Pi}^\perp \mathbf{M} \hat{\Pi}^\perp \mathbf{p})}. \quad (3.31)$$

Afin de déterminer l'influence de l'estimation sur la méthode de réduction du rang, on effectue une analyse de perturbation.

On a : $\hat{\Pi} = \hat{\Pi}(\hat{\Pi}(\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}))$ donc $\hat{\Pi} = \Pi + \Delta\Pi$.

La détermination de $\Delta\Pi$ est donnée dans [56] et résumée ici :
La décomposition en série de $\Delta\Pi$ donne :

$$\Delta\Pi = \delta\Pi + \delta^2\Pi + \dots + \delta^n\Pi \quad (3.32)$$

pour lequel dans le calcul on se limitera aux termes d'ordre prépondérant donc au maximum à l'ordre 2. Nous définissons donc :

$$\delta\Pi = \Pi^\perp \Delta\mathbf{M} \mathbf{S}^\sharp + \mathbf{S}^\sharp \Delta\mathbf{M} \Pi^\perp. \quad (3.33)$$

Le second ordre est donné par :

$$\delta^2\Pi = -\Pi^\perp \delta\Pi \Delta\mathbf{M} \mathbf{S}^\sharp \quad (3.34)$$

$$+ \Pi^\perp \Delta\mathbf{M} \delta\Pi \mathbf{S}^\sharp \quad (3.35)$$

$$- \mathbf{S}^\sharp \Delta\mathbf{M} \delta\Pi \Pi^\perp \quad (3.36)$$

$$+ \mathbf{S}^\sharp \delta\Pi \Delta\mathbf{M} \Pi^\perp \quad (3.37)$$

$$- \Pi \delta\Pi \delta\Pi \Pi \quad (3.38)$$

$$+ \Pi^\perp \delta\Pi \delta\Pi \Pi^\perp. \quad (3.39)$$

En utilisant les relations (3.28) et en développant le calcul des termes de (3.34) grâce à (3.33), nous obtenons les expressions de chaque terme en fonction de $\Delta\mathbf{M}$ et des éléments présentés précédemment. Le premier terme (3.34) vaut alors :

$$-\Pi^\perp \delta\Pi \Delta\mathbf{M} \mathbf{S}^\sharp = -\Pi^\perp \Delta\mathbf{M} \mathbf{S}^\sharp \Delta\mathbf{M} \mathbf{S}^\sharp. \quad (3.40)$$

Pour le terme (3.35) :

$$\Pi^\perp \Delta\mathbf{M} (\Pi^\perp \Delta\mathbf{M} \mathbf{S}^\sharp + \mathbf{S}^\sharp \Delta\mathbf{M} \Pi^\perp) \mathbf{S}^\sharp = \Pi^\perp \Delta\mathbf{M} \Pi^\perp \Delta\mathbf{M} \mathbf{S}^\sharp. \quad (3.41)$$

Pour le terme (3.36) :

$$-\mathbf{S}^\sharp \Delta\mathbf{M} (\Pi^\perp \Delta\mathbf{M} \mathbf{S}^\sharp + \mathbf{S}^\sharp \Delta\mathbf{M} \Pi^\perp) \Pi^\perp = -\mathbf{S}^\sharp \Delta\mathbf{M} \mathbf{S}^\sharp \Delta\mathbf{M} \Pi^\perp. \quad (3.42)$$

Pour le terme (3.37) :

$$\mathbf{S}^\sharp (\Pi^\perp \Delta\mathbf{M} \mathbf{S}^\sharp + \mathbf{S}^\sharp \Delta\mathbf{M} \Pi^\perp) \Delta\mathbf{M} \Pi^\perp = \mathbf{S}^{\sharp 2} \Delta\mathbf{M} \Pi^\perp \Delta\mathbf{M} \Pi^\perp. \quad (3.43)$$

Pour le terme (3.38) :

$$-\Pi \delta\Pi \delta\Pi \Pi = -\mathbf{S}^\sharp \Delta\mathbf{M} \Pi^\perp \Delta\mathbf{M} \mathbf{S}^\sharp, \quad (3.44)$$

que l'on exprime, afin de clarifier la lecture, par $\mathbf{S}^\# \beta \mathbf{S}^\#$ avec $\beta = -\Delta \mathbf{M} \Pi^\perp \Delta \mathbf{M}$ du second ordre en $\Delta \mathbf{M}$.

Pour le terme (3.39) :

$$\Pi^\perp \delta \Pi \delta \Pi \Pi^\perp = \Pi^\perp \Delta \mathbf{M} \mathbf{S}^{\#2} \Delta \mathbf{M} \Pi^\perp. \quad (3.45)$$

En résumé, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi &= -\Pi^\perp \Delta \mathbf{M} \mathbf{S}^\# \Delta \mathbf{M} \mathbf{S}^\# + \Pi^\perp \Delta \mathbf{M} \Pi^\perp \Delta \mathbf{M} \mathbf{S}^\# - \mathbf{S}^\# \Delta \mathbf{M} \mathbf{S}^\# \Delta \mathbf{M} \Pi^\perp \\ &+ \mathbf{S}^{\#2} \Delta \mathbf{M} \Pi^\perp \Delta \mathbf{M} \Pi^\perp + \mathbf{S}^\# \beta \mathbf{S}^\# + \Pi^\perp \Delta \mathbf{M} \mathbf{S}^{\#2} \Delta \mathbf{M} \Pi^\perp. \end{aligned} \quad (3.46)$$

En remarquant que l'on peut poser $\alpha = -\Delta \mathbf{M} \mathbf{S}^\# \Delta \mathbf{M} + \Delta \mathbf{M} \Pi^\perp \Delta \mathbf{M} \mathbf{S}^\#$, on peut réécrire :

$$\widehat{\Pi} = \Pi + \Pi^\perp \Delta \mathbf{M} \mathbf{S}^\# + \mathbf{S}^\# \Delta \mathbf{M} \Pi^\perp + \Pi^\perp \alpha \mathbf{S}^\# + \mathbf{S}^\# \alpha^H \Pi^\perp + \mathbf{S}^\# \beta \mathbf{S}^\# + \Pi^\perp \Delta \mathbf{M} \mathbf{S}^{\#2} \Delta \mathbf{M} \Pi^\perp. \quad (3.47)$$

Une fois obtenu $\widehat{\Pi}$, on remplace $\widehat{\Pi}$ par $\widehat{\Pi}^\perp$ en utilisant le fait que $\Delta \widehat{\Pi}^\perp = -\Delta \widehat{\Pi}$, ce qui nous permet d'exprimer ρ par :

$$\rho = \frac{\sigma^2}{MN} \frac{|\mathbf{p}^H \widehat{\Pi}^\perp \mathbf{p}|^2}{\mathbf{p}^H \widehat{\Pi}^\perp \mathbf{M}^{-1} \widehat{\Pi}^\perp \mathbf{p}}. \quad (3.48)$$

Le calcul du terme $\mathbf{p}^H \widehat{\Pi}^\perp \mathbf{p}$ donne $MN - \mathbf{p}^H \Delta \mathbf{M} \mathbf{S}^{\#2} \Delta \mathbf{M} \mathbf{p}$ d'où le numérateur (NUM) de la fraction vaut :

$$NUM = M^2 N^2 - 2MN \mathbf{p}^H \Delta \mathbf{M} \mathbf{S}^{\#2} \Delta \mathbf{M} \mathbf{p}. \quad (3.49)$$

De même, en développant le calcul du dénominateur (DEN) $\mathbf{p}^H \widehat{\Pi}^\perp \mathbf{M}^{-1} \widehat{\Pi}^\perp \mathbf{p}$ et par utilisation des relations (3.28) en se limitant aux termes d'ordre 2, on obtient :

$$\begin{aligned} DEN &= \sigma^2 MN - 2\sigma^2 \mathbf{p}^H \Delta \mathbf{M} \mathbf{S}^{\#2} \Delta \mathbf{M} \mathbf{p} + \mathbf{p}^H \Delta \mathbf{M} \mathbf{S}^\# \mathbf{M} \mathbf{S}^\# \Delta \mathbf{M} \mathbf{p} \\ &= \sigma^2 MN + \mathbf{p}^H \Delta \mathbf{M} (\mathbf{S}^\# - 2\sigma^2 \mathbf{S}^{\#2}) \Delta \mathbf{M} \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Le développement limité à l'ordre 2 en $\Delta \mathbf{M}$ de DEN permet d'obtenir :

$$\rho = \frac{\sigma^2}{MN} (M^2 N^2 - 2MN \mathbf{p}^H \Delta \mathbf{M} \mathbf{S}^{\#2} \Delta \mathbf{M} \mathbf{p}) \frac{1}{\sigma^2 MN} \left(1 - \frac{1}{\sigma^2 MN} \mathbf{p}^H \Delta \mathbf{M} (\mathbf{S}^\# - 2\sigma^2 \mathbf{S}^{\#2}) \Delta \mathbf{M} \mathbf{p}\right). \quad (3.51)$$

Cette dernière equation se simplifie après développement et en négligeant les termes d'ordre supérieur à 2 en $\Delta \mathbf{M}$:

$$\rho = 1 - \mathbf{p}^H \Delta \mathbf{M} \left(\frac{1}{\sigma^2 MN} \mathbf{S}^\# + \frac{1}{MN} \mathbf{S}^{\#2} \right) \Delta \mathbf{M} \mathbf{p}. \quad (3.52)$$

Il s'agit donc du SNR_{loss} en fonction de l'erreur d'estimation.

On s'intéresse maintenant à la détermination de la distribution statistique du SNR_{loss} dans le cas où la matrice \mathbf{M} est remplacée par la SCM et suit donc une loi de Wishart complexe.

On a donc : $\rho = 1 - \mathbf{p}^H \Delta \mathbf{M} \left(\frac{1}{\sigma^2 MN} \mathbf{S}^\# + \frac{1}{MN} \mathbf{S}^{\#2} \right) \Delta \mathbf{M} \mathbf{p}$. On pose :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^r \left(\frac{1}{\sigma^2 (\lambda_i - \sigma^2)} + \frac{1}{(\lambda_i - \sigma^2)^2} \right) \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H, \quad (3.53)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma^2 MN} \mathbf{S}^\# + \frac{1}{MN} \mathbf{S}^{\#2} &= \frac{1}{MN} \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{MN} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\rho &= 1 - \frac{1}{MN} \mathbf{p}^H \Delta \mathbf{M} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \Delta \mathbf{M} \mathbf{p} \\ &= 1 - \frac{1}{MN} \|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \Delta \mathbf{M} \mathbf{p}\|^2.\end{aligned}\quad (3.55)$$

Pour un grand nombre de données d'estimation, (K grand), le théorème centrale limite appliqué à $\Delta \mathbf{M}$ indique que $\Delta \mathbf{M}$ est Gaussien centré ; donc $\rho = 1 - \|\mathbf{x}\|^2$ avec \mathbf{x} vecteur Gaussien centré car il ne s'agit ici que de combinaisons linéaires de vecteurs Gaussiens, combinaison qui reste donc Gaussienne.

On cherche donc maintenant à caractériser ce vecteur \mathbf{x} . Pour cela, il faut calculer $E(\mathbf{x} \mathbf{x}^\top)$ et $E(\mathbf{x} \mathbf{x}^H)$. Pour une matrice \mathbf{M} distribuée selon une loi de Wishart, on dispose des formules suivantes [56] :

$$E(\Delta \mathbf{M} \mathbf{Z} \Delta \mathbf{M}) = \frac{1}{K} \text{Tr}(\mathbf{M} \mathbf{Z}) \mathbf{M} \quad (3.56)$$

$$E(\Delta \mathbf{M} \mathbf{Z} \Delta \mathbf{M}^\top) = \frac{1}{K} \mathbf{M} \mathbf{Z}^\top \mathbf{M}^\top \quad (3.57)$$

pour une matrice \mathbf{Z} quelconque.

En appliquant ces formules aux calculs de $E(\mathbf{x} \mathbf{x}^\top)$ et $E(\mathbf{x} \mathbf{x}^H)$, on obtient donc :

$$\begin{aligned}E(\mathbf{x} \mathbf{x}^\top) &= (\mathbf{A})^{1/2} E(\Delta \mathbf{M} \mathbf{p} \mathbf{p}^\top \Delta \mathbf{M}^\top) (\mathbf{A})^{\top/2} \\ &= (\mathbf{A})^{1/2} \frac{1}{K} (\mathbf{M} \mathbf{p} \mathbf{p}^\top \mathbf{M}^\top) (\mathbf{A})^{\top/2} \\ &= \frac{1}{K} (\mathbf{A})^{1/2} (\sigma^2 \mathbf{p} \sigma^2 \mathbf{p}) \\ &= \frac{\sigma^4}{K} (\mathbf{A})^{1/2} \mathbf{p} \\ &= 0\end{aligned}\quad (3.58)$$

car \mathbf{A} fait intervenir les \mathbf{u}_i orthogonaux à \mathbf{p} . On a donc $E(\mathbf{x} \mathbf{x}^\top) = \mathbf{0}$ donc \mathbf{x} est un vecteur Gaussien centré circulaire.

On détermine maintenant $E(\mathbf{x} \mathbf{x}^H)$.

$$\begin{aligned}E(\mathbf{x} \mathbf{x}^H) &= (\mathbf{A})^{1/2} E(\Delta \mathbf{M} \mathbf{p} \mathbf{p}^H \Delta \mathbf{M}) (\mathbf{A})^{1/2} \\ &= (\mathbf{A})^{1/2} \frac{1}{K} (\mathbf{p}^H \mathbf{M} \mathbf{p}) \mathbf{M} (\mathbf{A})^{1/2} \\ &= \frac{\sigma^2 MN}{K} \mathbf{M} \mathbf{A} \text{ car les matrices commutent,} \\ &= \frac{\sigma^2 MN}{K} (\mathbf{S} + \sigma^2 \mathbf{I}) \mathbf{A} \\ &= \frac{\sigma^2 MN}{K} \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi} \mathbf{S}^\# + \mathbf{S}^\# + \sigma^2 \mathbf{S}^{\#2} \right) \\ &= \frac{\sigma^4 MN}{K} \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{\Pi} + \mathbf{S}^\# \right)^2\end{aligned}\quad (3.59)$$

Or :

$$\left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{\Pi} + \mathbf{S}^\# \right)^2 = \sum_{i=1}^r \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \sigma^2} \right)^2 \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H. \quad (3.60)$$

De ces deux caractéristiques, on déduit la loi de $\| \mathbf{x} \|^2$:

considérons le vecteur $\mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{K}}[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_r] \text{diag} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \sigma^2} \right) \mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{K}} \mathbf{D} \mathbf{U} \mathbf{y}$ avec $\mathbf{y} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_r)$. \mathbf{z} a la même loi que \mathbf{x} .

Or $\| \mathbf{z} \|^2 = \frac{1}{K} (\mathbf{y}^H \mathbf{D} \mathbf{y}) \sim \sum_{i=1}^r \frac{1}{2K} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \sigma^2} \right)^2 \chi_2^2$. Donc on obtient :

$$\| \mathbf{x} \|^2 = \sum_{i=1}^r \frac{1}{2K} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \sigma^2} \right)^2 \chi_2^2 \quad (3.61)$$

d'où

$$\begin{aligned} \rho &= 1 - \| \mathbf{x} \|^2 \\ &\sim 1 - \frac{1}{2K} \sum_{i=1}^r \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \sigma^2} \right)^2 \chi_2^2. \end{aligned} \quad (3.62)$$

On a fait l'hypothèse que $\lambda_i \gg \sigma^2$ donc

$$\rho \sim 1 - \frac{1}{2K} \chi_{2r}^2 \quad (3.63)$$

A noter que $\rho_{moy} = E(\rho) = 1 - \frac{r}{K}$. Si on veut $\rho_{moy} = \frac{1}{2}$, cas classique de la détection à 3dB de pertes, on doit employer $K = 2r$ données secondaires pour l'estimation.

3.2.6 Etude du rang réduit persymétrique.

Les résultats obtenus dans le cas d'une matrice de Wishart complexe et présentés par le théorème (3.2.5.1) sont légèrement modifiés pour une matrice de Wishart réelle. Ces résultats sont maintenant présentés :

Théorème 3.2.6.1 (Loi du SNR_{loss} dans le cas $\hat{\mathbf{M}}$ réelle Wishart)

Dans le cas du rang réduit avec $\hat{\mathbf{M}}$ distribuée suivant une loi de Wishart réelle, le SNR_{loss} ρ est distribué comme suit :

$$\rho \sim 1 - \frac{1}{K'} \chi_{2r}^2. \quad (3.64)$$

Dans ce cas, $\rho_{moyen} = E[\rho] = 1 - \frac{r}{K'}$. Un $\rho_{moy} = \frac{1}{2}$ est obtenu pour $K' = r$.

Dans le cadre de la persymétrie présentée au chapitre (2), la matrice $\hat{\mathbf{M}}$ est remplacée par $\hat{\mathbf{R}}_{PSCM}$ équation (2.14) qui est distribuée selon une loi de Wishart réelle à $2K$ degrés de liberté. On a donc dans ce cas $K' = 2K$. $\rho_{moyen} = 1 - \frac{r}{2K}$. Un $\rho_{moy} = \frac{1}{2}$ est obtenu pour $K = r$.

Preuve 3.2.6.1 (Preuve du théorème 3.2.6.1)

Afin de ne pas surcharger la démonstration, on ne présente ici que les éléments qui diffèrent de la preuve du théorème (3.2.5.1). Ces différences sont dues dans le cas étudié ici au fait que la matrice estimée est à éléments réels.

Le premier calcul modifié est celui de la covariance de \mathbf{x} :

$$\begin{aligned}
 E(\mathbf{x}\mathbf{x}^\top) &= (A)^{1/2} E(\Delta\mathbf{M}\mathbf{p}\mathbf{p}^\top \Delta\mathbf{M})(A)^{1/2} \\
 &= \frac{1}{K'} (A)^{1/2} (\text{Tr}(\mathbf{M}\mathbf{p}\mathbf{p}^\top)\mathbf{M})(A)^{1/2} \\
 &= \frac{\sigma^2 MN}{K'} \mathbf{M}\mathbf{A} \\
 &= \frac{\sigma^2 MN}{K'} \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{\Pi} + \mathbf{S}^\# \right)^2
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Comme $\widehat{\mathbf{M}}$ est Wishart réelle : $E(\mathbf{x}\mathbf{x}^\top) = \frac{1}{K'} \sum_{i=1}^r \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \sigma^2} \right)^2 \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^\top$.

Donc

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \frac{1}{K'} \sum_{i=1}^r \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \sigma^2} \right)^2 \chi_1^2 \tag{3.66}$$

d'où, toujours dans l'hypothèse où $\lambda_i \gg \sigma^2$,

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \frac{1}{K'} \chi_r^2 \tag{3.67}$$

et

$$\rho \sim 1 - \frac{1}{K'} \chi_r^2. \tag{3.68}$$

Dans ce cas, si un $\rho_{moy} = \frac{1}{2}$ est obtenu pour $K' = r$, ce qui conclut cette preuve.

Les théorèmes (3.2.5.1) et (3.2.6.1) illustrent donc parfaitement l'apport de la persymétrie à la méthode de réduction du rang. Le nombre de données secondaires nécessaires pour obtenir une détection optimale est ainsi divisé par un facteur 2. Lorsque l'on prend en compte la taille des matrices et le temps de calcul nécessaire à l'inversion et aux traitements, cette diminution apparaît donc comme non-négligeable. Ces résultats théoriques seront donc illustrés sur signaux réels dans le cadre de la détection au chapitre suivant.

Chapitre 4

Application à la Détection Radar

Ce chapitre traite de l'application des résultats obtenus selon les différents estimateurs de matrice de covariance et les détecteurs associés, ainsi que selon les types de données. Les données utilisées sont de plusieurs natures. Tout d'abord, on s'intéressera à des données gaussiennes, simulées mais également obtenues par extraction de données réelles. En ce qui concerne l'environnement non-gaussien, nous présenterons des simulations concernant le GLRT-PFP ainsi que son application sur des données opérationnelles de fouillis de sol fournies par THALES et enfin sur clutter de mer obtenu par le biais du radar transhorizon de l'ONERA. Nous présenterons ensuite les applications de la détection sur des données STAP semi-synthétiques sur lesquelles nous pourrons comparer plusieurs schéma de détection. Enfin, nous illustrerons l'apport de la persymétrie à la méthode du rang réduit sur des données STAP.

4.1 Régulation de la fausse alarme

Comme il a été rappelé dans le premier chapitre de ce manuscrit, la détection radar de cibles se décompose en deux étapes distinctes : tout d'abord, il faut déterminer un seuil de détection pour une probabilité de fausse alarme fixée par l'utilisateur, autrement dit, il faut calculer λ tel que

$$P_{fa} = \mathbb{P}(\hat{\Lambda}(\hat{\mathbf{M}}; H_0) > \lambda) = \alpha, \quad (4.1)$$

où $\hat{\Lambda}(\hat{\mathbf{M}}; H_0)$ désigne la version adaptative du détecteur considéré, construit avec un estimateur $\hat{\mathbf{M}}$ de la matrice de covariance, et sous l'hypothèse H_0 , i.e. l'observation ne contient que le fouillis.

Une fois cette régulation des fausses alarmes effectuée, la détection consiste à comparer, pour chaque observation \mathbf{y} , le détecteur au seuil de détection λ calculé précédemment.

Cependant, afin de comparer les détecteurs et d'en valider leurs performances, il est nécessaire au préalable d'en obtenir les caractéristiques opérationnelles plus connues en radar sous le nom de COR. Ce sont ces courbes qui fournissent les performances comparatives des détecteurs et que nous présentons, entres autres, dans les sections suivantes.

4.2 Détection en environnement Gaussien.

Dans cette section, on s'intéresse exclusivement aux performances de détection dans un environnement Gaussien. On présente d'abord les courbes caractéristiques du détecteur PAMF, puis l'application de ce détecteur sur des données réelles de fouillis de sol fournies par THALES¹ après sélection de la zone Gaussienne.

4.2.1 Courbes Opérationnelles du PAMF : simulation.

Le PAMF, détecteur optimisé pour le milieu Gaussien a été présenté au chapitre (2) par l'équation (2.26). La relation " $P_{fa}/seuil$ " de ce détecteur a également été déterminée théoriquement et présentée à l'équation (2.29). Nous présentons donc ici les résultats de simulation du comportement du PAMF en milieu Gaussien simulé. La figure (4.1(a)) présente les résultats de simulation de la relation " $P_{fa}/seuil$ " pour différents nombres de données secondaires. Les cercles représentent la relation théorique tandis que les courbes pleines représentent le comportement du détecteur obtenu par tirages Monte-Carlo. Comme le montre cette figure, il y a une parfaite adéquation entre la théorie et les tirages Monte-Carlo.

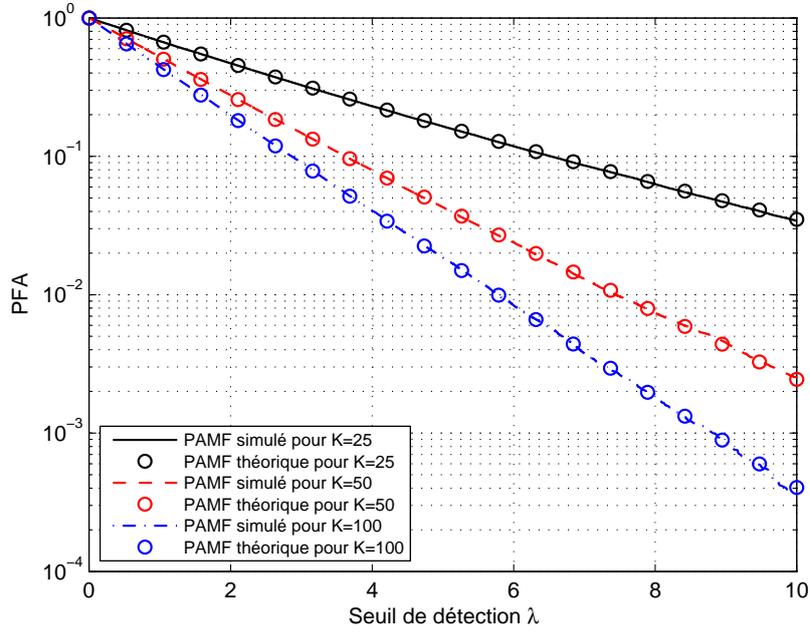
Les figures (4.1(b)) et (4.2) présentent les résultats simulés pour les 3 détecteurs gaussien présentés dans ce manuscrit, à savoir l'OGD en bleu, l'AMF en rouge et le PAMF en vert. La comparaison de ces détecteurs en fonction du nombre de données secondaires, permet de visualiser l'apport de la persymétrie dans le processus. En effet, le PAMF possède une courbe qui "se rapproche" de l'OGD, comparée à celle de l'AMF. Ceci indique donc que pour une P_{fa} donnée, le seuil à choisir sera plus faible pour le PAMF que pour l'AMF, la fausse alarme en sera donc mieux régulée. Ce comportement reste visible quel que soit le nombre de données secondaires. On constate toutefois que dans le cas limite où le nombre de données secondaires est strictement égal à la taille des données primaires, le PAMF voit son seuil fortement réduit par rapport à celui de l'AMF.

En terme de performance de détection, des résultats similaires se retrouvent. Les figures (4.3) et (4.4) montrent les résultats de détection comparés pour les 3 détecteurs en fonction du nombre de données secondaires. On constate que lorsque $m = K$ (figure (4.3)), cas limite pour l'AMF, un gain d'environ 20 dB est visible entre le PAMF et l'AMF. Ce gain se réduit mais est toujours visible lorsque $K = 2m$ cas limite de la règle de Brennan déjà évoquée au chapitre 3. Ainsi donc, ces courbes valident les résultats théoriques de distribution et relation " $P_{fa}/seuil$ " pour le PAMF. Ils confirment également l'intérêt de l'exploitation de la persymétrie et son application en détection.

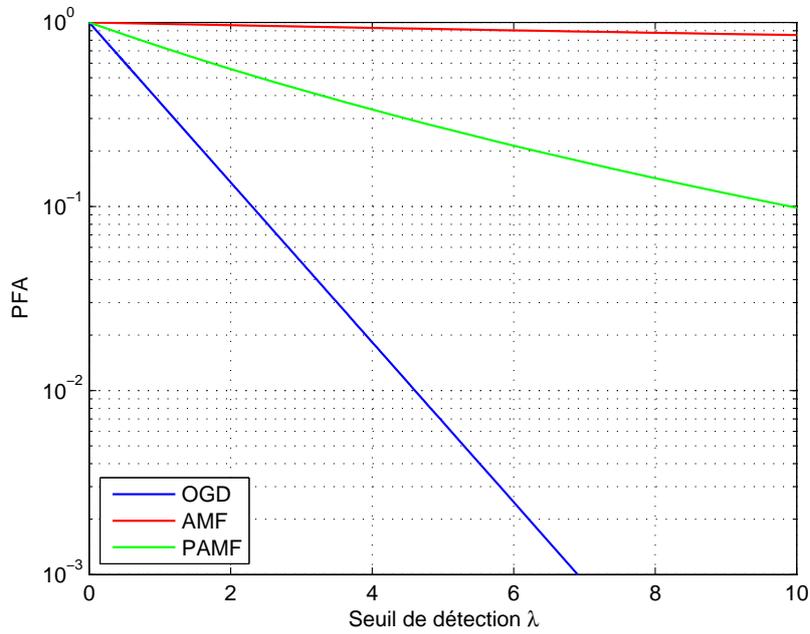
4.2.2 Validation sur données réelles.

Cependant ces résultats, aussi valables soient-ils, ne sont produits qu'en simulation. Il est nécessaire maintenant de les valider sur des données gaussiennes réelles. Pour se faire, on utilise les données fournies par un radar sol du groupe THALES, représentant la puissance des échos du fouillis de sol dans le signal opérationnel recueilli à 13m du sol en illuminant une zone de terrain à site bas, 0° et sans cible, comme illustré sur la figure (4.5). Ces échos de fouillis de sol de la région de Colmar sont situés dans 868 cases distances pour différents azimuts de l'antenne (70 azimuts couvrant chacun 1/8 de tour d'antenne) et $m = 8$ récurrences. La première case distance se situe à 2 km du radar et chaque case distance est d'une longueur de 60 m, ce qui indique que le radar éclaire environ 52 km de terrain.

¹Merci au groupe THALES AIR DEFENSE pour la fourniture de leurs données de sol.

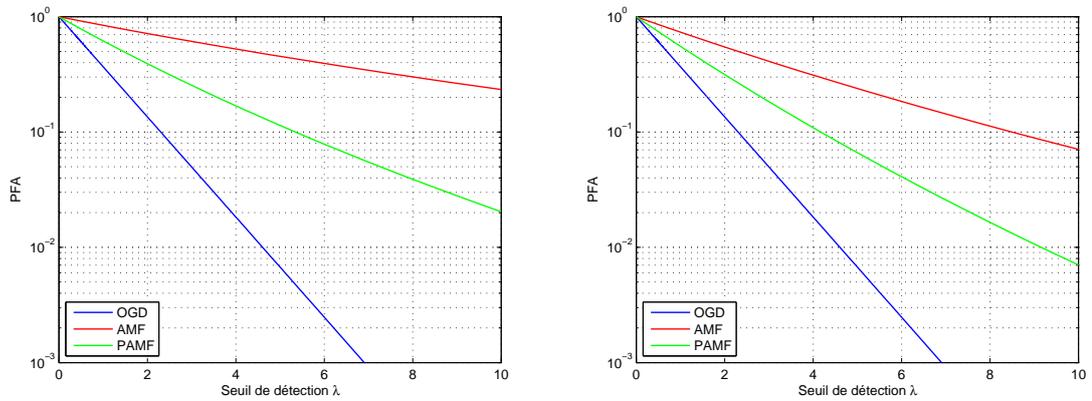


(a) Adéquation des résultats théoriques (cercles) et des tirages Monte-Carlo (traits pleins) pour différents nombres de données secondaires K avec $m = 10$.



(b) Comparaison des relations théoriques PFA-seuil pour les trois détecteurs. $m = 10$ et $K = 10$.

FIG. 4.1 – Courbes Caractéristiques de validation des résultats.



(a) Comparaison des relations PFA-seuil pour les trois détecteurs. $m = 10, K = 15$.

(b) Comparaison des relations PFA-seuil pour les trois détecteurs. $m = 10, K = 20$.

FIG. 4.2 – Comparaison de la régulation de fausse alarme pour les 3 détecteurs OGD, AMF et PAMF pour différents nombres de données secondaires.

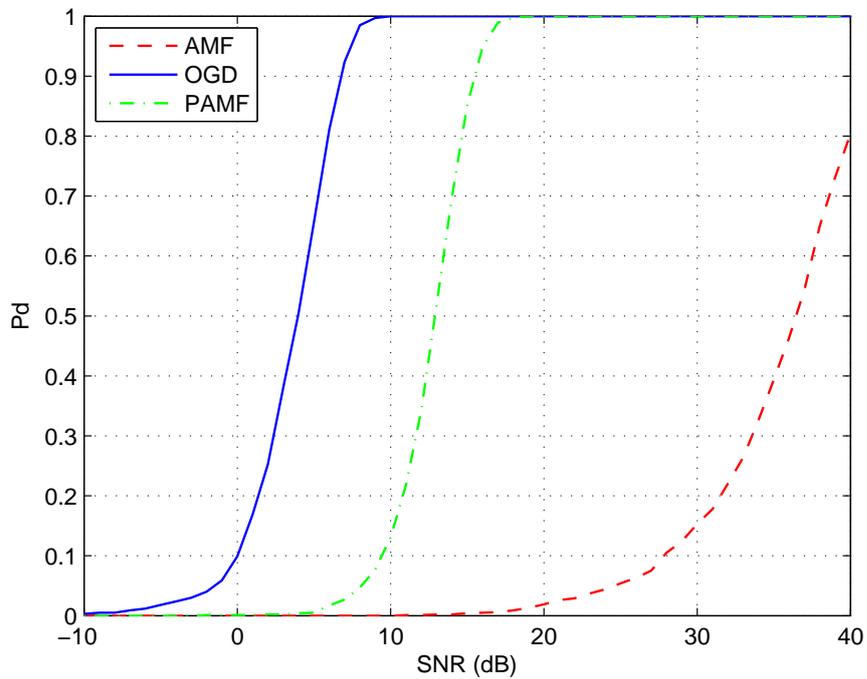
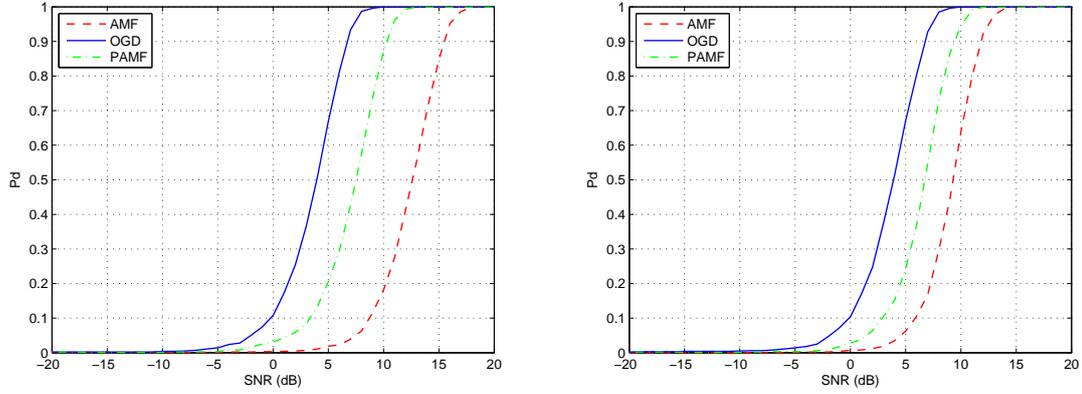


FIG. 4.3 – Comparaison des performances de détection pour les 3 détecteurs OGD, AMF et PAMF. $m = 10, K = 10$ et $P_{fa} = 10^{-3}$



(a) Comparaison des relations P_d -SNR pour les trois détecteurs. $m = 10$, $K = 15$ et $P_{fa} = 10^{-3}$. (b) Comparaison des relations P_d -SNR pour les trois détecteurs. $m = 10$, $K = 20$ et $P_{fa} = 10^{-3}$.

FIG. 4.4 – Comparaison des performances de détection pour les 3 détecteurs OGD, AMF et PAMF pour différents nombres de données secondaires.

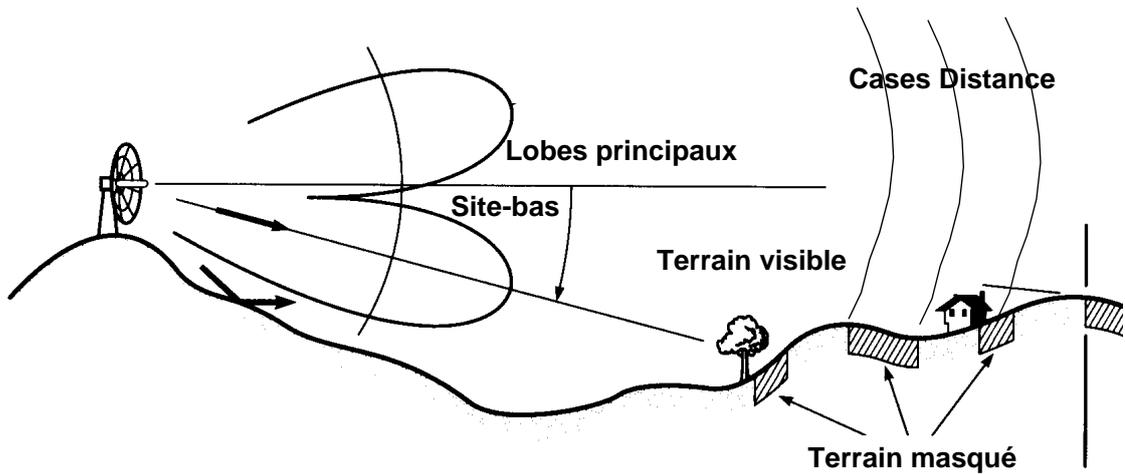


FIG. 4.5 – Principe d'un radar de surveillance du sol.

Les 8 impulsions temporelles sont présentées en figure (4.6) et montrent la non-homogénéité spatiale (par case distance) ainsi que la corrélation temporelle (par récurrence) des données. La faible incidence du radar entraîne une absence de réflecteur au delà de l'horizon électromagnétique, zone caractérisée par une faible amplitude du niveau traduisant la présence de bruit thermique gaussien résultant principalement de l'électronique du radar (zone bleue couvrant la partie droite de l'image, à environ 15 km du radar, voir figure (4.7a) pour l'impulsion n°1). La zone proche du radar, au contraire, présente un niveau fort de bruit caractérisant les échos de sol et donc un bruit assez impulsif (illustration en 3 dimensions sur la figure (4.7b)).

Afin d'obtenir les courbes COR sur ces données, on applique pour chaque case distance à tester un masque CFAR rectangulaire composé de la case sous test (case centrale du masque) et des cases de référence (cases périphériques du masque, voir figure (4.8)). Chaque masque est appliqué en même temps sur les 8 récurrences et présente donc une profondeur de $m = 8$. Souhaitant dans cette partie travailler sur des données gaussiennes, il est nécessaire de séparer la partie gaussienne de la partie impulsif des données présentes sur la carte. Pour ce faire, une procédure particulière a été mise en place et appliquée sur les données. La première partie de cette procédure a consisté à utiliser des tests d'adéquation tels Kolmogorov-Smirnov (KS) [57] ou Anderson-Darling [57] pour sélectionner la zone gaussienne. Ces tests vérifient l'adéquation d'un échantillon de données avec une loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$. Ils sont donc appliqués sur chaque zone de la carte afin de rejeter les données impulsives et de ne conserver que les gaussiennes. Le problème de ces tests est qu'ils ne tiennent pas compte de "l'inhomogénéité" des données et notamment des "bandes d'azimuts" présentes sur la carte. En effet, ces bandes présentent des différences significatives de moyennes et les tests en sont donc rendus inefficaces, ils fournissent des zones lacunaires. Afin de parer à ce problème, un algorithme de connexité a été mis en place. Il consiste suite à ces tests à regrouper ensemble dans la zone gaussienne toutes les petites zones rendues inhomogènes, mais pourtant elles aussi gaussiennes, par le KS-test. Les "trous" ainsi rendus par le KS-test s'ils sont plus petits qu'une taille définie et entourés par des données gaussiennes, sont intégrés à cette zone gaussienne. On récupère ainsi une frontière nette entre deux zones homogènes, gaussienne et impulsif. La figure (4.9a) présente les deux zones sélectionnées, en bleu l'impulsif et en rouge la gaussienne, tandis que la figure (4.9b) présente uniquement les données gaussiennes isolées de la zone impulsif sur la carte opérationnelle. Les données impulsives ont été mises à zéro.

Les données gaussiennes étant maintenant sélectionnées, on leur applique notre masque de comptage afin de visualiser les courbes COR. La figure (4.10) présente les courbes caractéristiques comparées pour les 3 détecteurs et les relations théoriques et obtenues par le comptage. Les résultats indiquent toujours une amélioration des performances du PAMF face à l'AMF et une bonne adéquation entre la théorie et les comptages. Cette adéquation n'est cependant pas parfaite car dans ce cas les données ne sont pas parfaitement gaussiennes (ce sont des données réelles, le bruit thermique n'est pas idéal !) et le nombre de données disponibles est assez faible. On constate cependant dans ce cas un gain d'environ 15 dB en détection, pour une P_d de 0.5 entre le PAMF et l'AMF. Ceci confirme bien les résultats obtenus en simulation.

La figure (4.11) présente des résultats similaires mais pour un plus grand nombre de données secondaires ($K = 14$) ce qui permet d'améliorer légèrement l'adéquation des courbes entre elles. Dans ce cas, le gain en détection n'est plus que de quelques dB mais reste toujours visible.

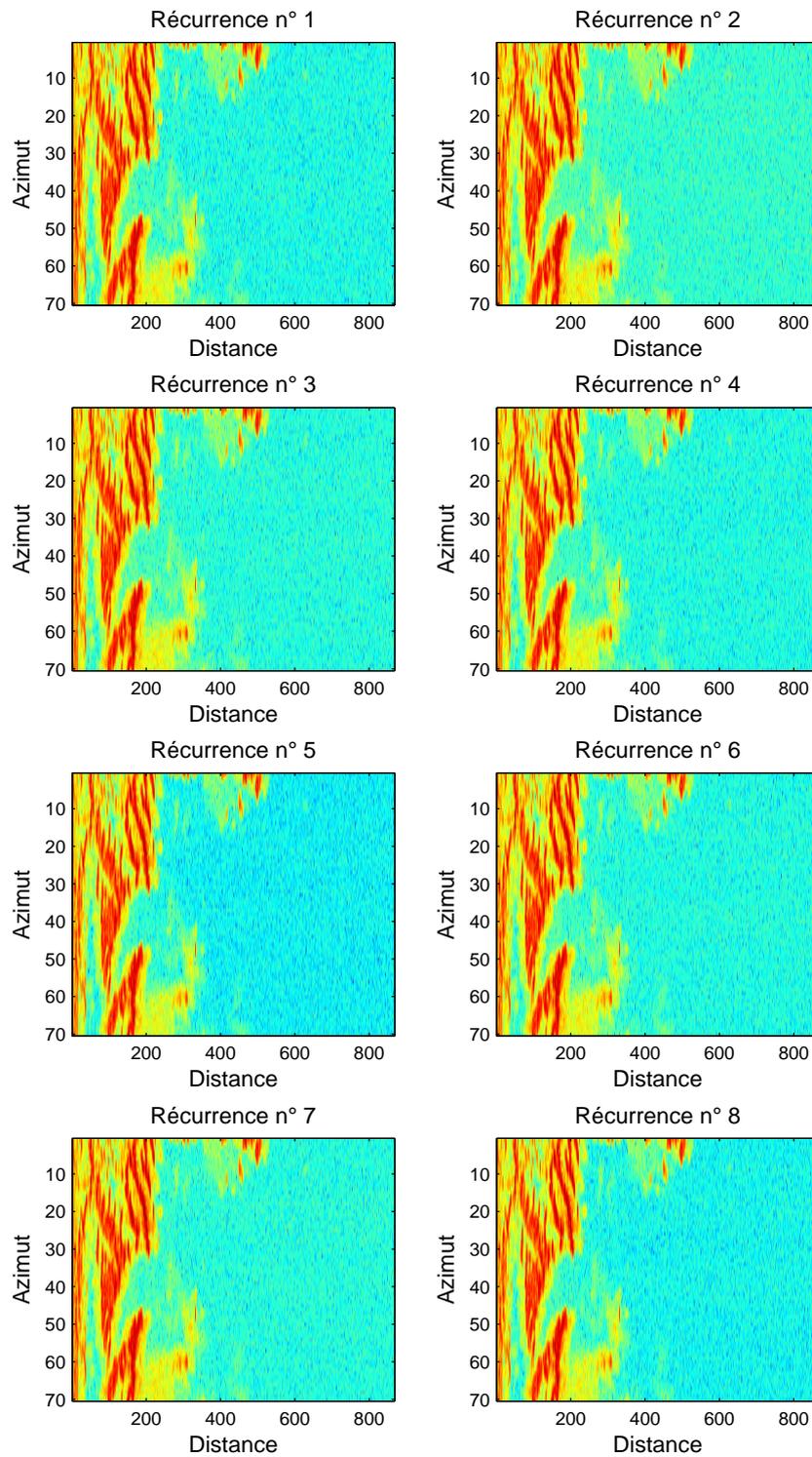
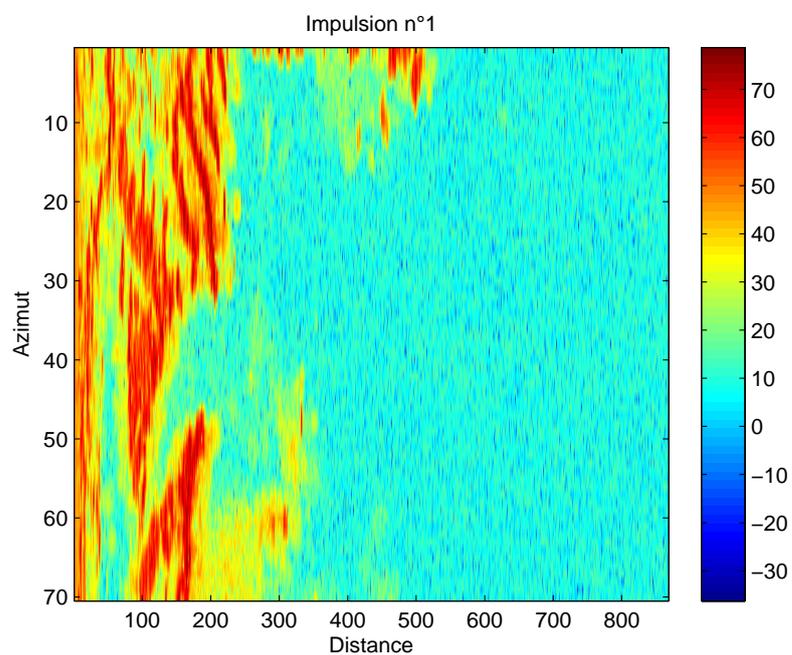
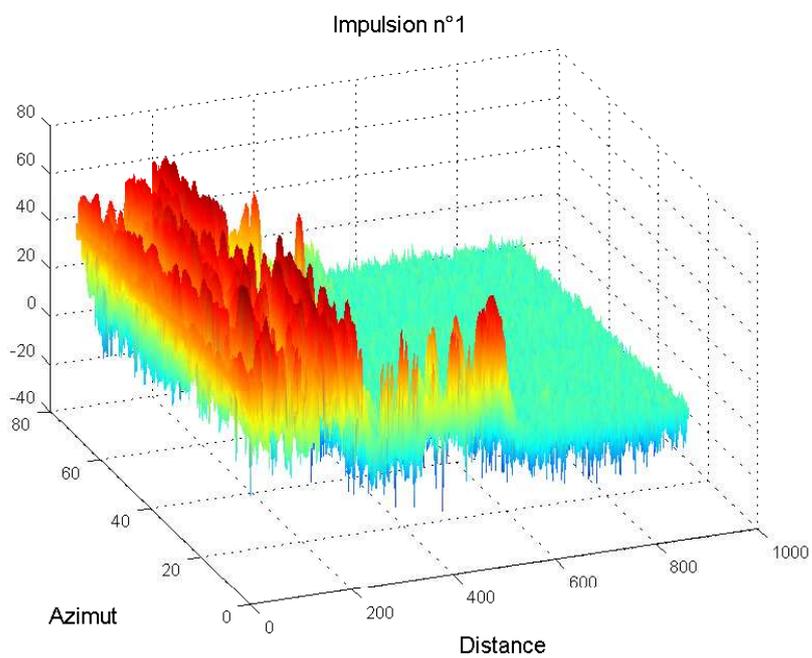


FIG. 4.6 – Visualisation des 8 récurrences.



(a) Visualisation en 2 dimensions



(b) Visualisation en 3 dimensions

FIG. 4.7 – Visualisation des zones gaussiennes et impulsives pour la récurrence n°1.

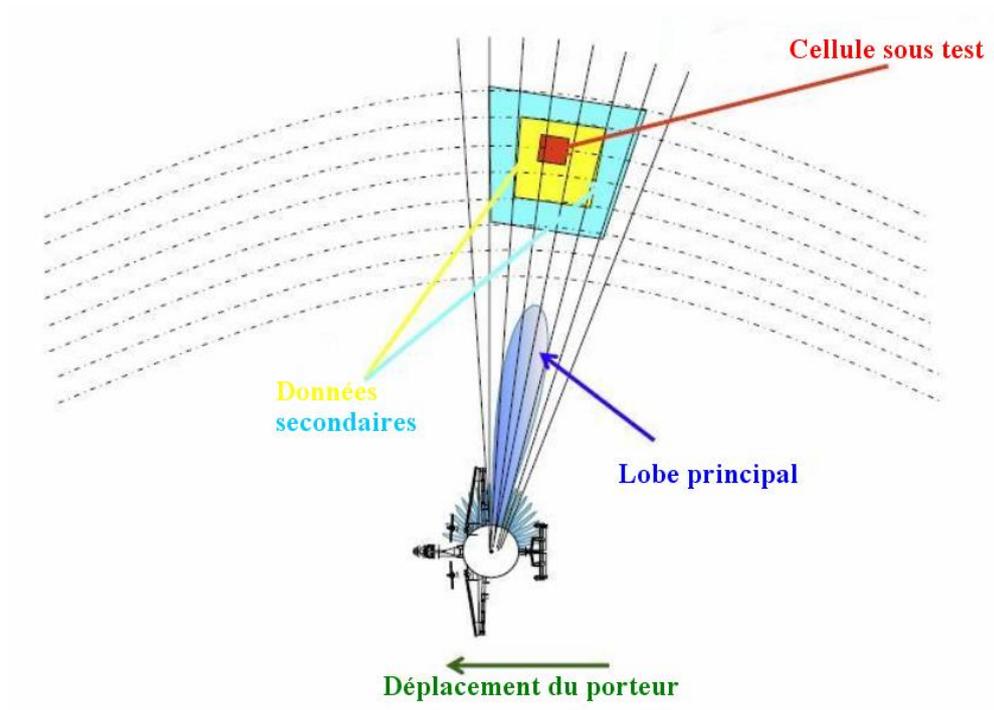


FIG. 4.8 – Illustration du masque d'estimation des matrices de covariance.

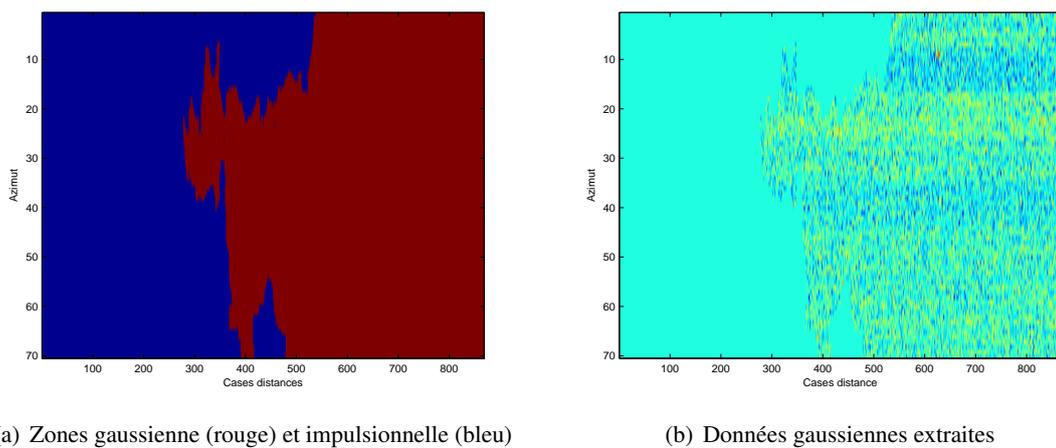
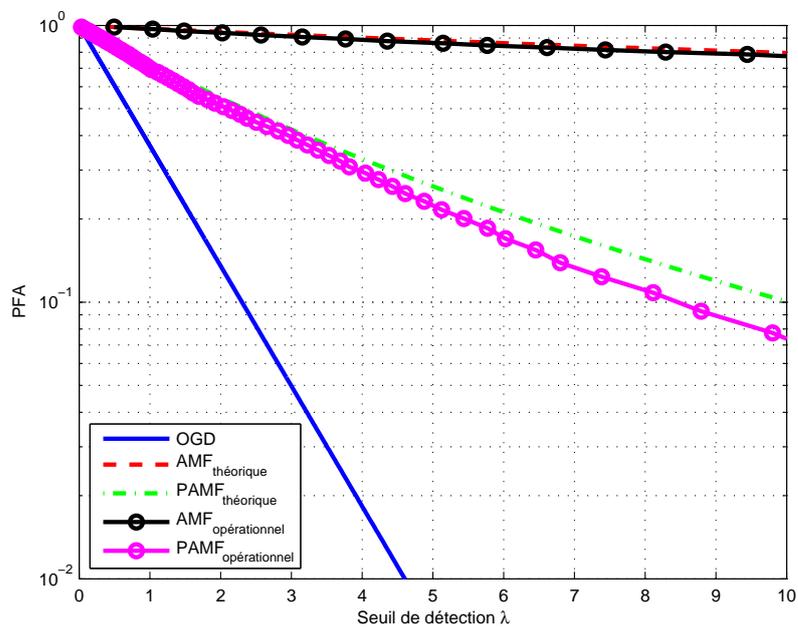
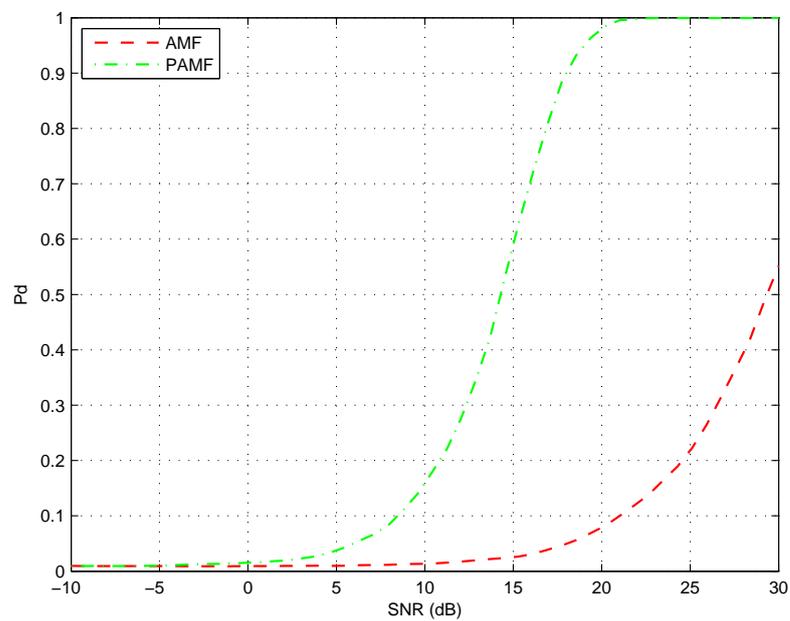


FIG. 4.9 – Sélection de la partie gaussienne.

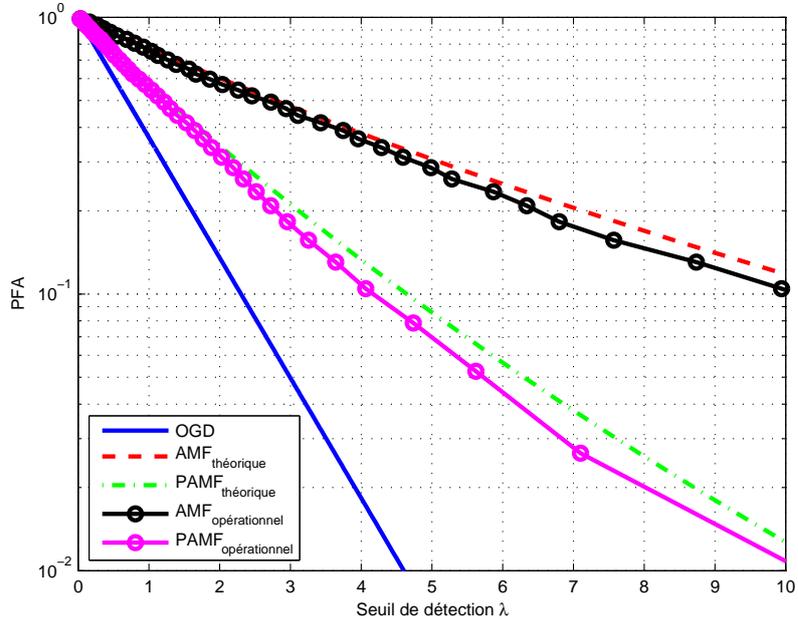


(a) Régulation de la fausse alarme

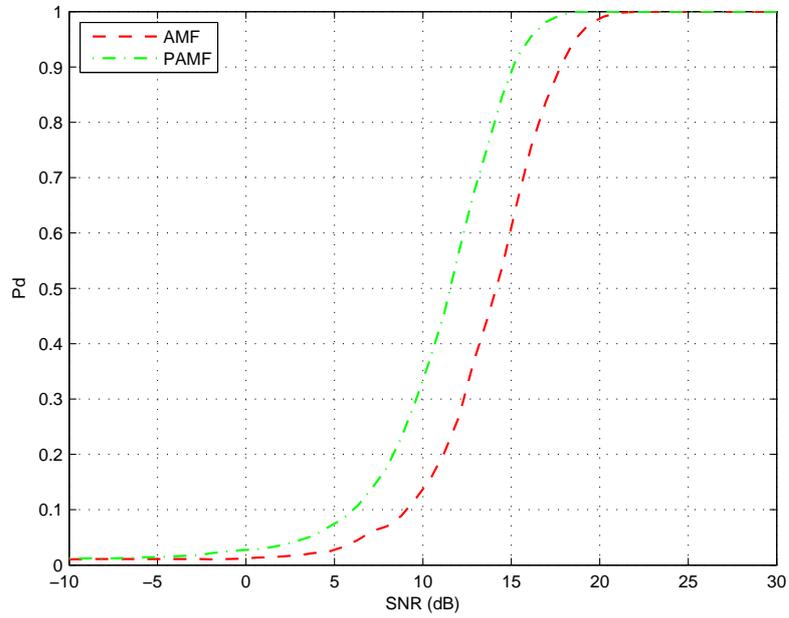


(b) Performance de détection

FIG. 4.10 – Courbes COR théoriques et opérationnelles pour l’AMF et le PAMF. Utilisation d’un masque 3×3 . $m = 8$, $K = 8$ et $P_{fa} = 10^{-2}$.



(a) Régulation de la fausse alarme



(b) Performance de détection

FIG. 4.11 – Courbes COR théoriques et opérationnelles pour l'AMF et le PAMF. Utilisation d'un masque 3×5 . $m = 8$, $K = 14$ et $P_{fa} = 10^{-2}$.

4.3 Détection en environnement non-Gaussien.

Après avoir qualifié de manière opérationnelle le PAMF, on s'intéresse dans cette section à valider l'étude théorique effectuée sur le GLRT-PFP défini par l'équation (2.32) avec la matrice PFP du point fixe persymétrique défini par l'équation (2.30), dans un environnement non-gaussien modélisé par les SIRV. Dans ce cadre et comme pour le PAMF, nous allons simuler le comportement de ce détecteur, puis valider les résultats sur données réelles. De plus, nous allons comparer ces résultats aux résultats d'autres détecteurs étudiés récemment dans la littérature.

4.3.1 Le GLRT-PFP face à ses pairs...

Afin de s'assurer de la validité des résultats de l'étude théorique concernant le GLRT-PFP, nous simulons le comportement du GLRT-PFP face à un milieu non-gaussien modélisé par une K-Distribution (voir annexe (B.3)) comparé à deux détecteurs étudiés dans la littérature. En effet, dans le contexte de la détection en environnement non-gaussien, Conte et De Maio dans [39] et [40] ont proposé deux détecteurs également dérivés du GLRT mais basés sur deux nouveaux estimateurs : le P-ANMF (Persymmetric ANMF) et le RP-ANMF (Recursive P-ANMF). Dans [39], Conte utilise la persymétrie afin de séparer son ensemble de données secondaires original \mathbf{n}_k en deux ensembles de données secondaires \mathbf{r}_{ek} et \mathbf{r}_{ok} décorrelés et donc indépendants, dans l'optique de rendre le détecteur CFAR-Matrice et d'améliorer les performances de détection. Ces deux nouveaux ensembles sont de même taille et partagent la même texture. Les composantes du speckle sont indépendantes et identiquement distribuées en vecteurs complexes gaussiens centrés. Par cette séparation en deux ensembles de données secondaires, Conte et De Maio introduisent leur nouvel estimateur défini de la façon suivante :

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{\mathbf{r}_{ek} \mathbf{r}_{ek}^H}{(|\mathbf{r}_{ok} \mathbf{r}_{ok}^H|)_{i,i}}. \quad (4.2)$$

avec $(\mathbf{A})_{i,i}$ désignant un sous ensemble de $\mathbb{K} = 1..K$ de cardinalité i . Pour toute matrice $N \times N$ \mathbf{A} , $(\mathbf{A})_{i,i}$ est obtenu en supprimant de \mathbf{A} la j -ième ligne et la j -ième colonne pour tout $j \neq i$.

Cet estimateur est ensuite utilisé dans le GLRT-LQ classique (1.46) et permet d'obtenir le P-ANMF :

$$\Lambda_{P-ANMF} = \frac{|\mathbf{p}^H \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{p}^H \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{p})(\mathbf{x}^H \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{x})} \underset{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} \lambda_{P-ANMF}. \quad (4.3)$$

Dans [40], la même méthode de séparation des données secondaires est utilisée afin d'obtenir deux ensembles distincts \mathbf{r}_{ek} et \mathbf{r}_{ok} . La nature recursive du détecteur provient du fait que dans ce cas, l'estimateur utilisé est l'estimateur du point fixe $\hat{\Sigma}_{(\text{inf})}$, solution de l'équation récursive suivante :

$$\hat{\Sigma}_{(t+1)} = \frac{N}{K} \sum_{k=1}^K \frac{\mathbf{r}_{ek} \mathbf{r}_{ek}^H}{\mathbf{r}_{ek}^H \left(\hat{\Sigma}_{(t)} \right)^{-1} \mathbf{r}_{ek}}, \quad (4.4)$$

dont le point de départ est défini comme suit :

$$\hat{\Sigma}_{(0)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{\mathbf{r}_{ek} \mathbf{r}_{ek}^H}{(|\mathbf{T} \mathbf{r}_{ok} \mathbf{r}_{ok}^H \mathbf{T}^H|)_{i,i}}. \quad (4.5)$$

Cet estimateur est lui aussi remplacé dans le GLRT-LQ qui devient alors le RP-ANMF :

$$\Lambda_{RP-ANMF} = \frac{\left| \mathbf{p}^H \hat{\Sigma}_{(\text{inf})}^{-1} \mathbf{x} \right|^2}{\left(\mathbf{p}^H \hat{\Sigma}_{(\text{inf})}^{-1} \mathbf{p} \right) \left(\mathbf{x}^H \hat{\Sigma}_{(\text{inf})}^{-1} \mathbf{x} \right)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \lambda_{RP-ANMF}. \quad (4.6)$$

A ce propos, il est important de noter que, comme démontré dans [32], la solution de l'équation implicite $\hat{\Sigma}_{(\text{inf})}$ est unique et la convergence de l'algorithme ne dépend pas du point de départ, ce qui tend à montrer que cette utilisation n'a que peu d'intérêt.

Afin de comparer les différents détecteurs GLRT-FP, GLRT-PFP, GLRT-LQ, GLRT-SCM, P-ANMF et RP-ANMF, on a choisi de simuler sur un même graphique toutes les performances de ces détecteurs. Cette comparaison est l'objet des figures (4.12) et (4.13). Sur chacune de ces figures, on peut visualiser la régulation de fausse alarme et les performances de détection simulées pour chaque détecteur. Le fouillis est ici modélisé par une K-Distribution. Il est clair sur ces courbes que, comme attendu, le GLRT-PFP a des performances améliorées par rapport au GLRT-FP, aussi bien en termes de régulation de la fausse alarme qu'en termes de performance de détection. Cependant, on voit également que le PFP a un comportement beaucoup plus performant que le P-ANMF et le RP-ANMF ce qui tend à montrer que la méthode d'exploitation de la persymétrie étudiée dans ce document est plus riche que les méthodes précédemment utilisées. Il n'y a en effet pas d'utilisation de la persymétrie dans la méthode de Conte. Quoiqu'il en soit, l'estimation de la matrice de covariance montre ici toute son importance, le GLRT-SCM, GLRT classique mais utilisé avec la SCM comme estimateur de la matrice de covariance, est dépassé par tous les autres détecteurs quel que soit le cas de figure.

Il est un dernier point mais non des moindres, l'adéquation entre les relations théoriques et simulées par tirages Monte-Carlo pour le GLRT-FP et le GLRT-PFP est également montrée par ces courbes. Cette adéquation confirme donc la validité de la théorie présentée au chapitre 2.

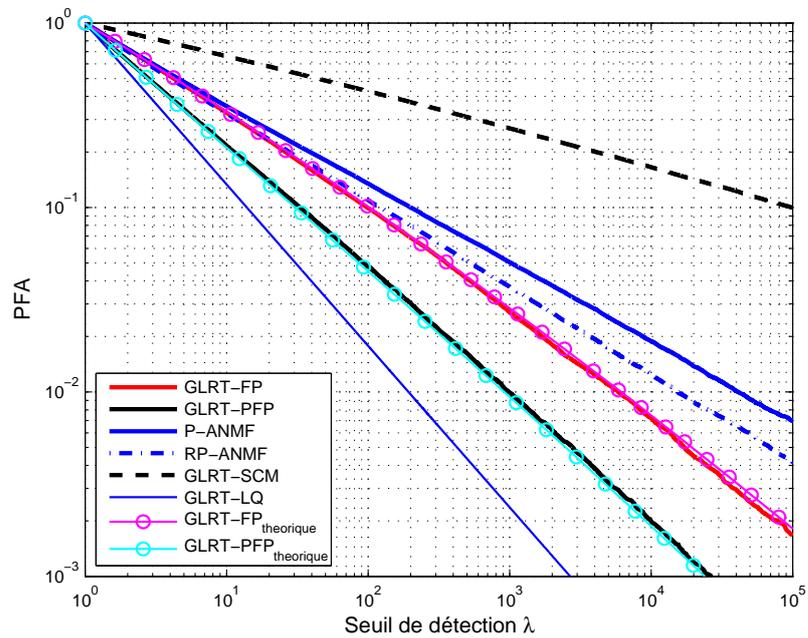
4.3.2 Validation sur données opérationnelles.

Une fois les performances simulées, nous passons ensuite à la validation opérationnelle, étape finale de cette partie de l'étude. Pour ce faire, deux types de données seront utilisées, premièrement les données de sol présentées à la section (4.2) puis des données de fouillis de mer obtenues par le radar Nostradamus de l'ONERA, que nous présenterons ensuite.

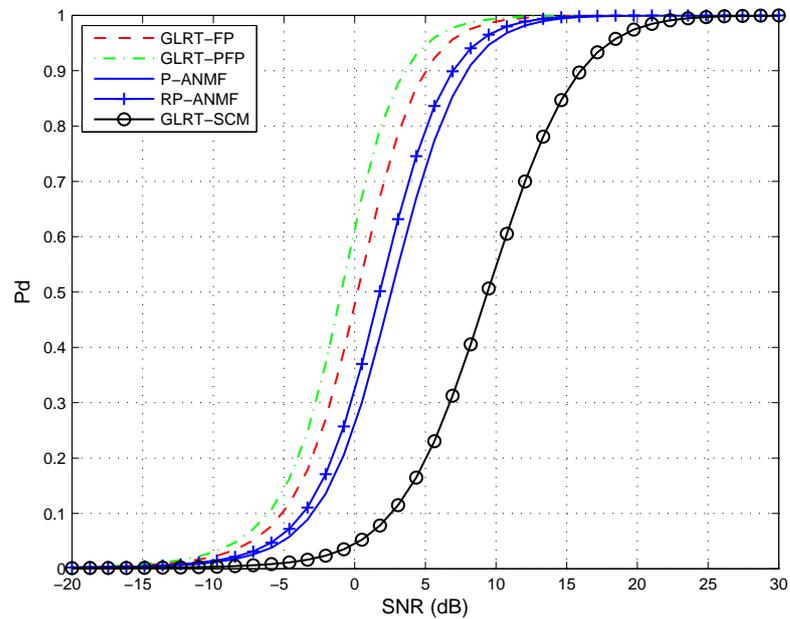
La figure (4.14) montre la régulation de fausse alarme et la détection pour les détecteurs GLRT-FP et GLRT-PFP. Ces courbes obtenues par passage d'un masque 3×5 sur la carte de données opérationnelles permet de visualiser l'amélioration des performances du PAMF sur l'AMF. Un tel masque permet d'utiliser toutes les cases distance immédiatement adjacentes à la case sous test. L'adéquation des résultats théoriques et expérimentaux est également notable. Pour ce jeu de données, quelques 3 dB de gain sont visibles pour une $Pd = 0.5$ en détection entre le GLRT-PFP et le GLRT-FP. Le comportement du détecteur est identique quel que soit le nombre de données secondaires utilisées. Plus ce nombre augmente meilleure est estimée la matrice. Les courbes se rapprochent donc au fur et à mesure de l'optimal mais une amélioration légère reste toujours visible pour le détecteur persymétrique.

Le second jeu de données obtenu est de type fouillis de mer. Il a été acquis par l'intermédiaire du radar transhorizon (OTH, Over The Horizon en anglais) Nostradamus de l'ONERA.² Le radar transhorizon Nostradamus est un radar dit "à onde de ciel" capable de détecter des cibles au delà de l'horizon. Pour un radar classique, la courbure de la terre fait apparaître un masquage des régions situées en-dessous

²Merci à l'unité RBF et à ses ingénieurs "Nostraliens" pour toute l'aide apportée dans l'acquisition et le traitement de ces données.

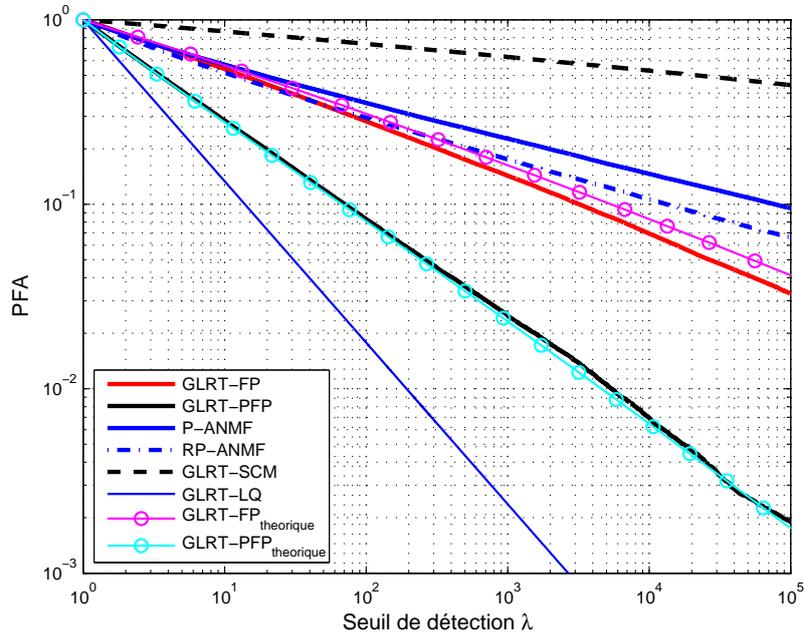


(a) Régulation de fausse alarme pour les différents détecteurs

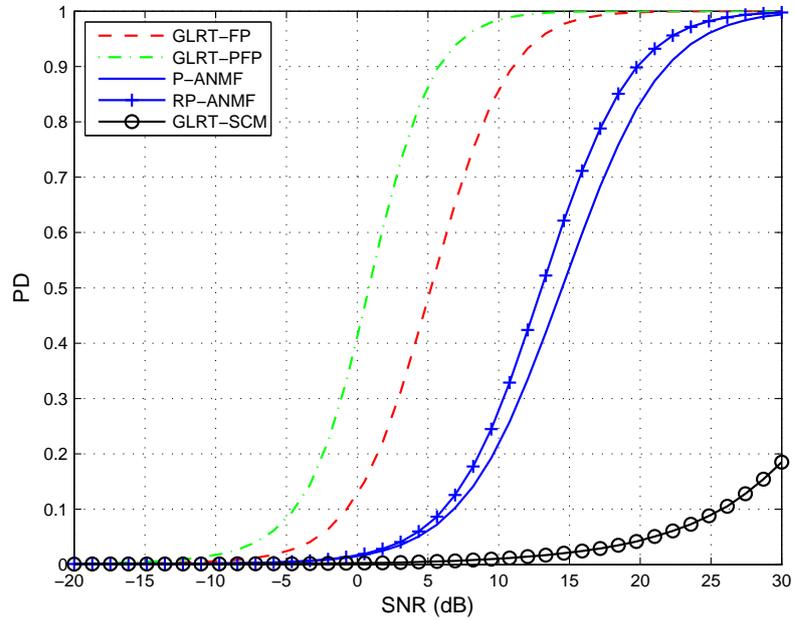


(b) Performances de détection comparées pour les différents détecteurs

FIG. 4.12 – Comparaison des différentes performances pour les détecteurs GLRT-FP, GLRT-PFP, GLRT-LQ, GLRT-SCM, P-ANMF, RP-ANMF, GLRT-FP théorique et GLRT-PFP théorique. Cas d'un fouillis simulé par K-distribution de paramètre $\nu = 0.2$. $m = 8$, $K = 16$ et $P_{fa} = 10^{-3}$.

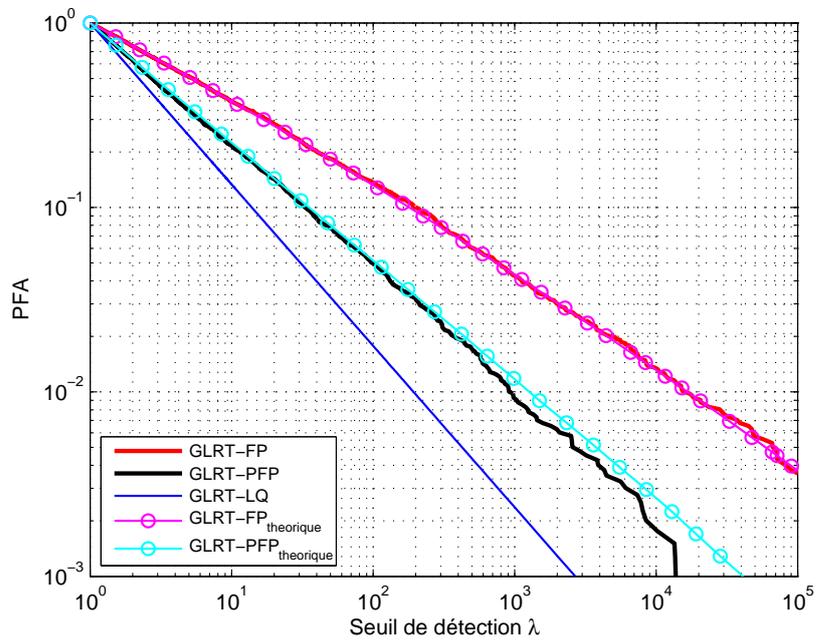


(a) Régulation de fausse alarme pour les différents détecteurs

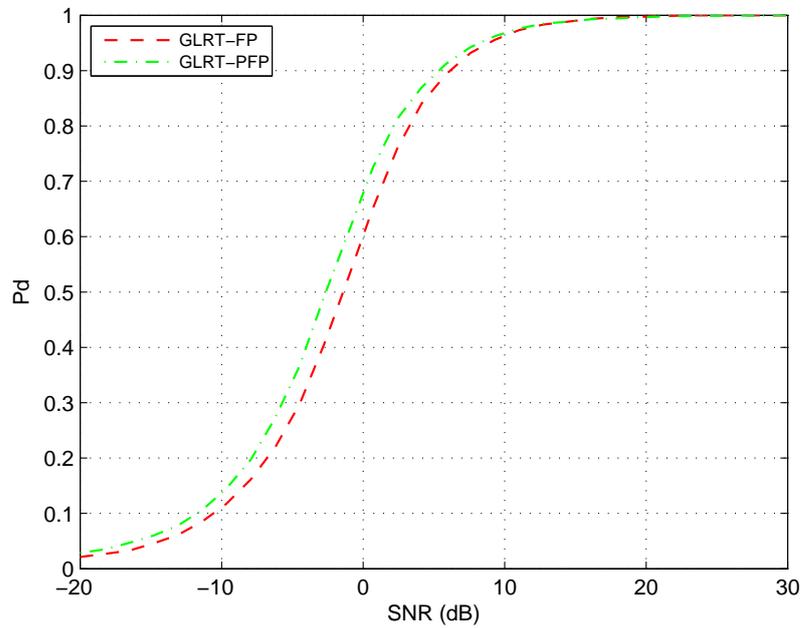


(b) Performances de détection comparées pour les différents détecteurs

FIG. 4.13 – Comparaison des différentes performances pour les détecteurs GLRT-FP, GLRT-PFP, GLRT-LQ, GLRT-SCM, P-ANMF, RP-ANMF, GLRT-FP théorique et GLRT-PFP théorique. Cas d'un fouillis simulé par K-distribution de paramètre $\nu = 0.2$. $m = 8$, $K = 10$ et $P_{fa} = 10^{-3}$.



(a) Régulation de fausse alarme pour les détecteurs GLRT-LQ, GLRT-PFP et GLRT-FP



(b) Performances de détection comparées pour les différents détecteurs

FIG. 4.14 – Comparaison des différentes performances pour les détecteurs GLRT-LQ, GLRT-FP et GLRT-PFP. Cas d'un fouillis de sol réel avec utilisation d'un masque 3×5 . $m = 8$, $K = 15$ et $P_{fa} = 10^{-2}$. Données opérationnelles THALES.

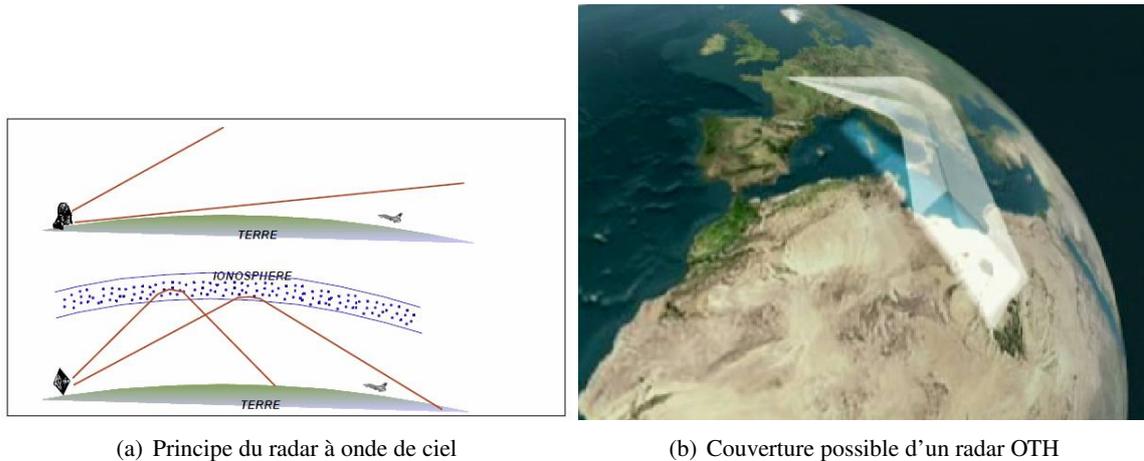
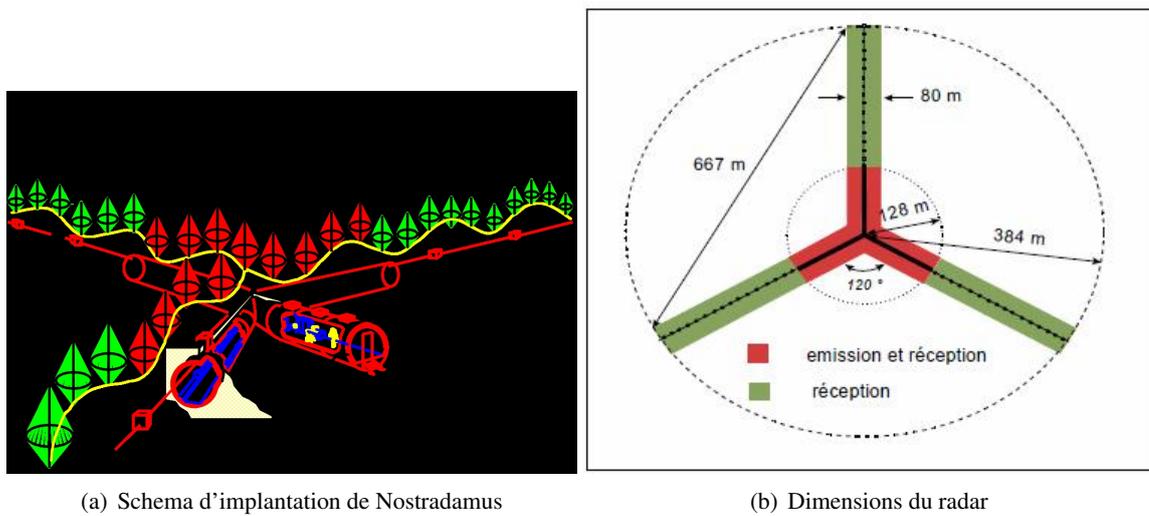


FIG. 4.15 – Principe de fonctionnement du radar à onde de ciel Nostradamus.

de l'horizon (voir figure (4.15)). Un radar utilisant des ondes décimétriques (3 à 30 MHz) peut utiliser l'ionosphère, qui réfracte ces ondes, afin de "voir" au delà de l'horizon. Les ondes émises se réfléchissent sur l'ionosphère, rebondissent presque spéculairement sur le sol au delà de l'horizon et reviennent à leur point de départ après une nouvelle réflexion ionosphérique. Par ce mécanisme, il est possible d'atteindre des portées supérieures à 3000 km en un seul bond (figure (4.15)).

Le radar Nostradamus est un radar monostatique surfacique expérimental en forme d'étoile à 3 bras. Installé en région Centre, il permet une couverture azimutale de 360° . C'est par ailleurs un système assez imposant : ces antennes sont réparties sur chacun des bras de 400 m de long et de près de 80 m de large (illustration figure (4.16)). Chaque bras est orienté à 120° par rapport à l'autre et plus d'une centaine d'émetteurs associés aux antennes bicône de 7 m de haut permettent un fonctionnement permanent du système (voir figure (4.17)). On note sur cette photo la taille des antennes par rapport aux personnes se trouvant à côté.

Ainsi ce radar permet d'obtenir des données de fouillis de mer, avec ou sans cible grâce à une visualisation en temps réel en salle de contrôle. Sur ces données, il est alors possible d'opérer les mêmes méthodes que précédemment avec les données de sol à ceci près que la résolution obtenue avec Nostradamus étant faible, peu de cases distances seront disponibles pour effectuer le comptage. De plus, les signaux acquis sont fortement corrélés temporellement mais ne bougent pas spatialement (on ne regarde qu'un azimut au cours du temps). En conséquence, pour s'affranchir des problèmes de dépendances des données, on ne travaillera que sur un faible nombre de récurrences même si on dispose d'un grand temps d'acquisition. La figure (4.18) présente le signal reçu par Nostradamus ainsi que l'image "Doppler-distance" qui en résulte. Nostradamus émettant un signal modulé en fréquence, dit "Chirp linéaire" (chirp = sifflement), il est possible par compression d'impulsion (voir annexe (D)) de retrouver les fameuses raies de Bragg de la mer [58] illustrées par les deux traits rouges de l'image Doppler-distance [59]. Sur ces signaux sont appliqués les détecteurs déjà étudiés pour faire ressortir les courbes caractéristiques présentées sur la figure (4.19). Ces courbes montrent également dans le cas de fouillis de mer l'amélioration en terme de détection pour le GLRT-PFP face au GLRT-FP.



(a) Schema d'implantation de Nostradamus

(b) Dimensions du radar

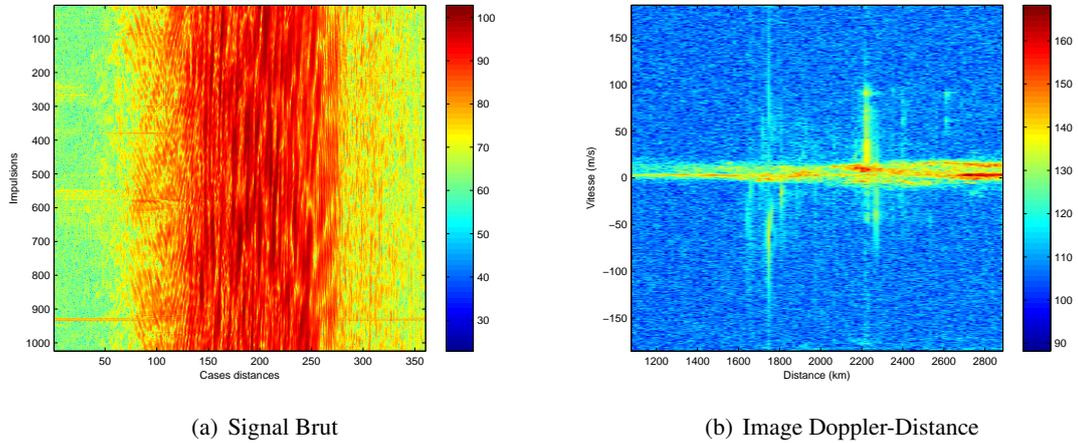
FIG. 4.16 – Caractéristiques matérielles de Nostradamus



(a) Antenne bicône

(b) Un bras de Nostra : champ d'antennes

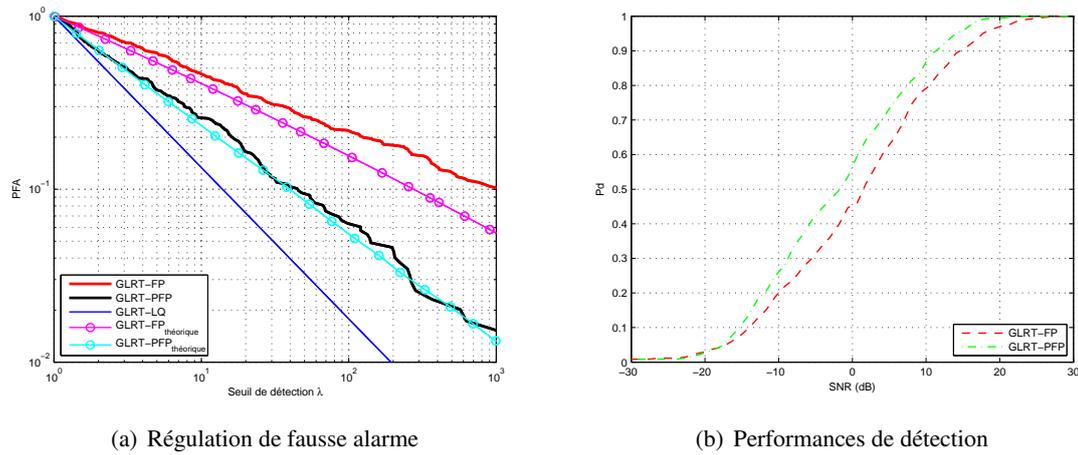
FIG. 4.17 – Vue des antennes Nostradamus



(a) Signal Brut

(b) Image Doppler-Distance

FIG. 4.18 – Signaux bruts et traités issus de Nostradamus



(a) Régulation de fausse alarme

(b) Performances de détection

FIG. 4.19 – Courbes caractéristiques obtenues par le signal issu de Nostradamus. Utilisation de $m = 8$ récurrences et $K = 13$ données secondaires pour une $P_{fa} = 10^{-2}$.

4.4 Application à des données STAP.

L'obtention de données STAP est actuellement un exercice difficile, du fait qu'il n'existe que peu de radars STAP opérationnels dans le monde et encore moins en France. Les quelques réseaux STAP en opération sont de plus bien souvent destinés à des applications militaires, ce qui restreint encore plus fortement la disponibilité des données. Afin d'essayer de remédier à ce problème et dans le cadre du "Groupe STAP" piloté par l'ONERA, le CELAR (Centre d'Électronique de l'Armement) a conçu un simulateur capable de fournir des données STAP à partir d'une image SAR THR opérationnelle. Disposant ainsi de nombreux scénarios, ce sont sur ces données semi-synthétiques que seront testés les divers détecteurs étudiés.

4.4.1 Présentation des données STAP CELAR

Les différents scénarios de données fournies ont été conçus comme s'ils étaient acquis par un véritable radar STAP. Les caractéristiques sont les suivantes :

- Configuration STAP en visée latérale
- Antenne Linéaire Uniforme de $N = 4$ capteurs séparés chacun de $d = 0.3$ m
- 11 impulsions temporelles disponibles par scénario
- $M = 64$ pulses par rafale
- Fréquence centrale $f_0 = 10$ GHz (bande X)
- Largeur de bande $B = 5$ MHz
- Vitesse avion de $Va = 100$ m/s
- fréquence de récurrence $PRF = 1$ kHz
- $L = 410$ cases distance disponibles

En fonction du scénario choisi, trois type de fouillis étaient fournis : gaussien ou généré à partir de 2 images SAR THR RAMSES. Différentes cibles étaient alors placées dans des cases distances fixées avec des vitesses connues (-4 m/s et 4 m/s) et toutes à azimut nul. Les SER de ces cibles pouvaient également varier, 19 dBm² ou 34 dB m². La figure (4.20) présente le schéma de fonctionnement du simulateur et un exemple de données sur une voie pour un scénario quelconque issu d'une image SAR THR.

4.4.2 Résultats de détection.

Le premier scénario utilisé pour tester les différents détecteurs sera un scénario pour lequel une cible sera présente dans la case distance 255 avec une vitesse de 4 m/s et une SER de 19 dBm². Le fond choisi est issu d'une image SAR THR, donc peu gaussien. On se place directement dans la case de test pour visualiser les résultats de détection des détecteurs AMF, PAMF, GLRT-FP et GLRT-PFP. Pour cet essai, toutes les cases distances disponibles seront utilisées comme données secondaires donc $K = 409$. Nous sommes alors dans un cas où K est légèrement inférieur à $2m = 512$ donc ne satisfaisant pas la règle de Brennan mais s'en approchant fortement.

Les figures (4.21) et (4.22) présentent les résultats de détection respectivement pour les détecteurs adaptés au milieu gaussien AMF et PAMF. On voit clairement dans ce cas que l'AMF retourne des résultats utilisables. La cible est bien détectée, à la bonne vitesse. Le PAMF donne des résultats identiques, mais permet une meilleure réjection du clutter, cette réjection est par ailleurs bien visible sur les coupes à azimut nul. Sur ces coupes, l'élévation du niveau du signal correspondant à la cible par rapport au niveau du bruit confirme la réjection de ce dernier. Les éventuelles fausses alarmes s'en trouvent diminuées et la détection améliorée. Ces résultats s'expliquent par le fait que la cible est d'une puissance "forte" par

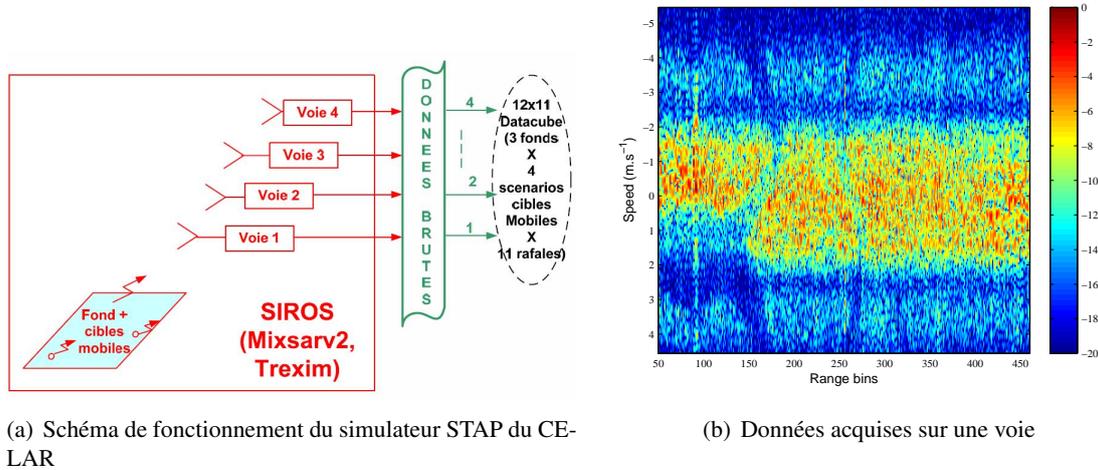


FIG. 4.20 – Données STAP du Celar : simulateur et données produites.

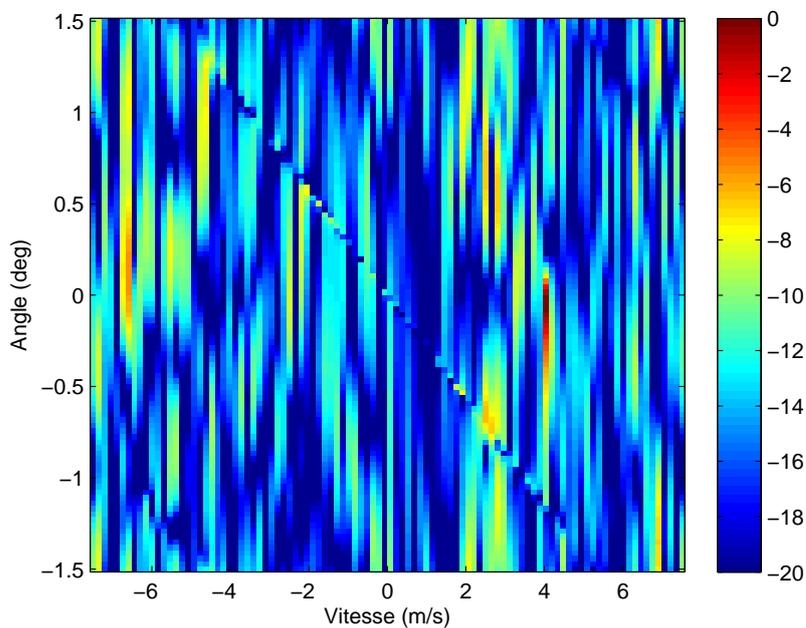
rapport au niveau du clutter et que sa vitesse la rend facilement isolable du reste du fouillis.

Sur toutes ces images, l'échelle des couleurs est toujours la même : 20 dB.

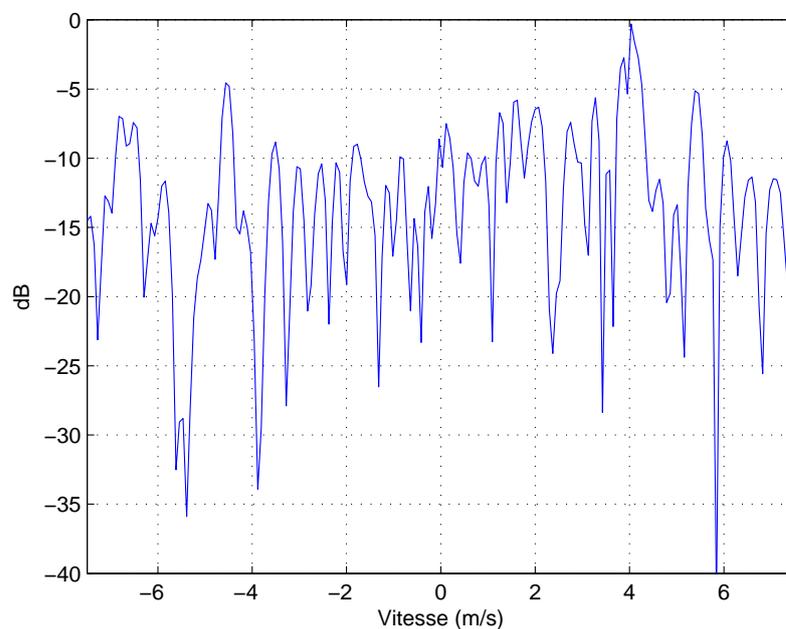
Les figures (4.23) et 4.24) présentent les résultats concernant les détecteurs adaptés au milieu non-gaussien. On constate rapidement que les résultats sont bons également dans ce cas, ce qui est conforme aux prévisions. L'amélioration des résultats, notamment en terme de réjection du clutter, montrée par les coupes à azimuth nul, est cependant très notable pour le GLRT-PFP face à tous les autres détecteurs. Le niveau du signal ressort très nettement par rapport au niveau du bruit. On constate également que le PAMF donne des résultats très similaires à ceux du GLRT-FP ce qui indiquerait que dans ce cas peu défavorable, c'est plus l'estimation de la matrice que la forme du détecteur qui influe sur les résultats de détection. Ceci confirme le fait que la persymétrie contribue notablement à l'amélioration des performances.

Afin de s'assurer de la validité de cette dernière affirmation, on se place ensuite dans schéma de détection plus défavorable. En effet, dans la nouvelle configuration, on n'utilise plus que 256 cases pour l'estimation de la matrice de covariance. Ceci implique que dans ce cas $K = m$. La règle de Brennan s'en trouve donc totalement invalidée, les matrices de type SCM sont à la limite de l'inversibilité. La figure (4.25) présente les résultats de détection pour les détecteurs AMF et PAMF dans les mêmes conditions et avec la même cible que précédemment. Seul le nombre de données secondaires a changé. On constate immédiatement que la détection n'est plus possible avec l'AMF tandis qu'elle reste valable avec le PAMF. Ce résultat confirme le fait que la persymétrie "double virtuellement" le nombre de données secondaires utilisées lors de l'estimation de la matrice. Ce résultat est également confirmé par la figure (4.26) sur laquelle on voit également clairement que le GLRT-FP est incapable de faire ressortir la cible, ce que fait très bien le GLRT-PFP. Le rapprochement de ces deux dernières figures indique que le GLRT-PFP avec 256 données secondaires équivaut au GLRT-FP avec 409 données secondaires.

Le dernier scénario auquel on s'est intéressé est celui où 10 cibles sont présentes dans la même case distance. Ces cibles ont toutes une SER de 19 dBm^2 et possèdent des vitesses étalées entre -4 m/s et 4 m/s . Le fond est toujours issu d'une image SAR THR et on utilise le maximum de cases distance disponibles pour l'estimation de la matrice soit $K = 409$. Les figures (4.27) et (4.28) présentent les résultats

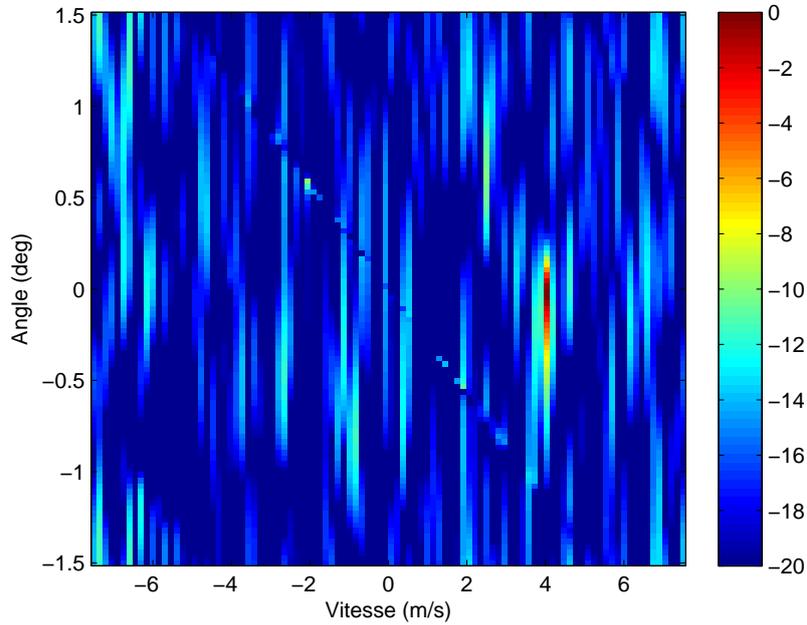


(a) Détection avec l'AMF

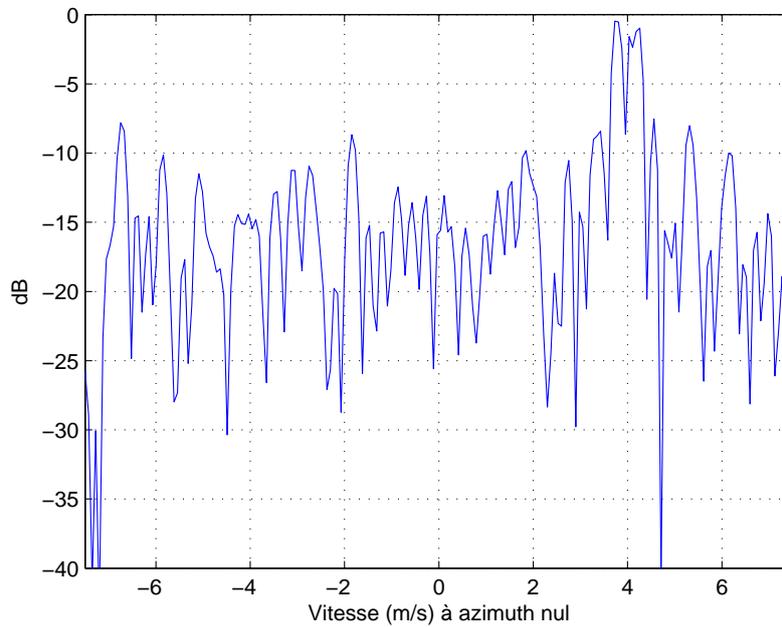


(b) Coupe à azimuth nul (AMF).

FIG. 4.21 – Résultats de détection en case 255 pour une cible de 19 dBm^2 et de vitesse 4 m/s . Cas du détecteur gaussien AMF avec $K = 409$.

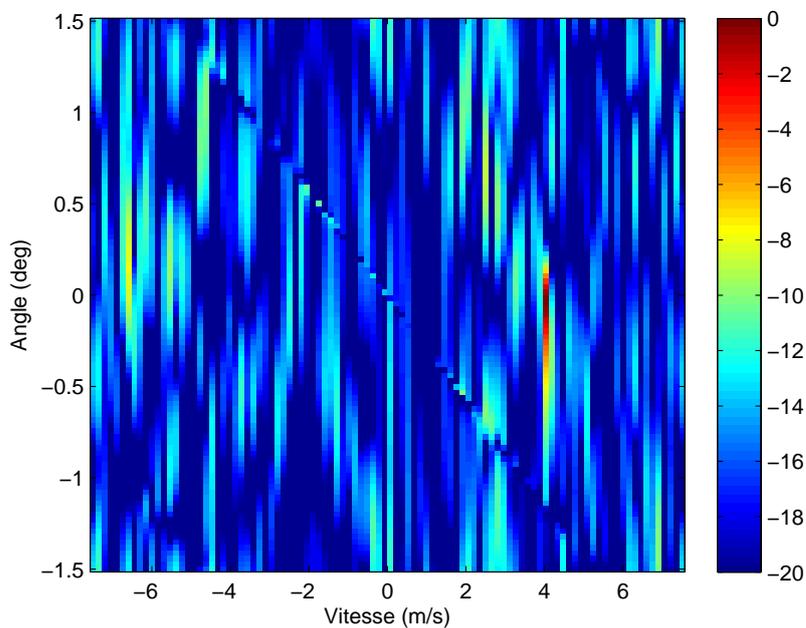


(a) Détection avec le PAMF

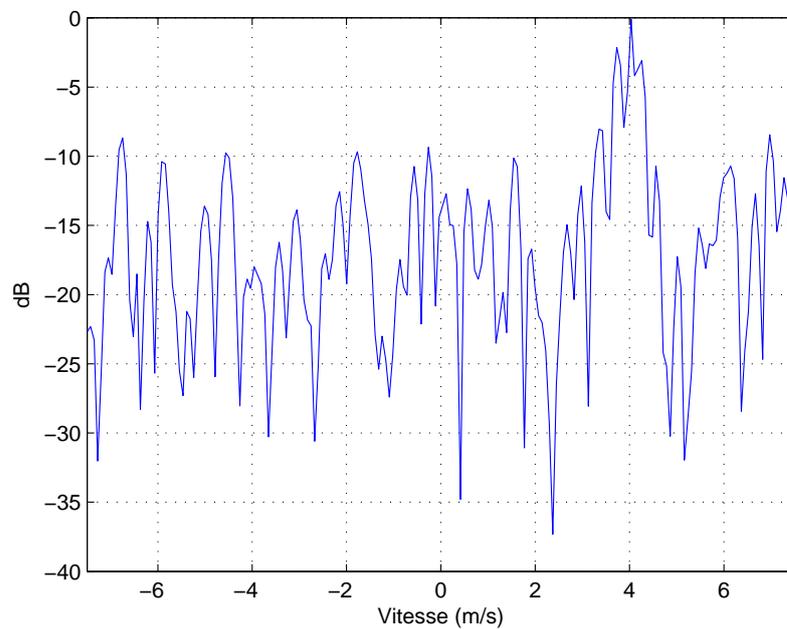


(b) Coupe à azimuth nul (PAMF).

FIG. 4.22 – Résultats de détection en case 255 pour une cible de 19 dBm^2 et de vitesse 4 m/s. Cas du détecteur gaussien PAMF avec $K = 409$.

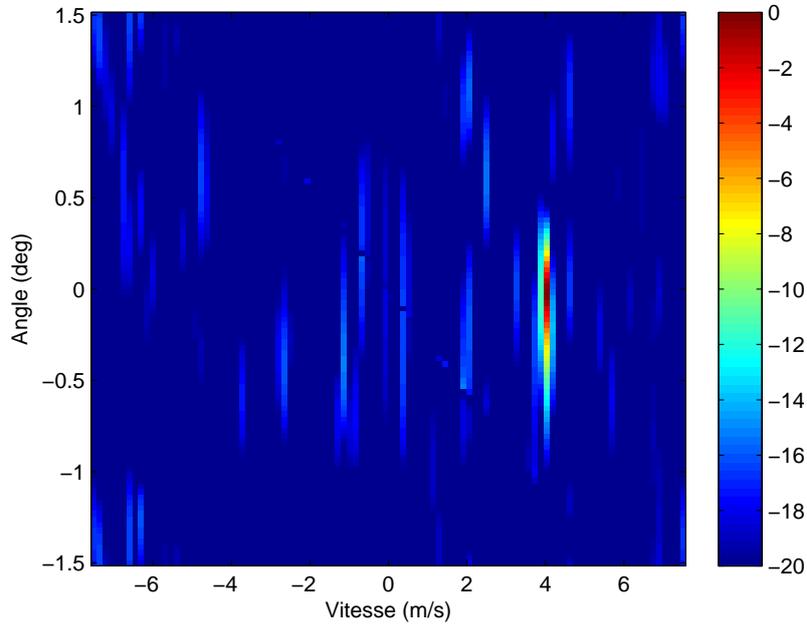


(a) Détection avec le GLRT-FP

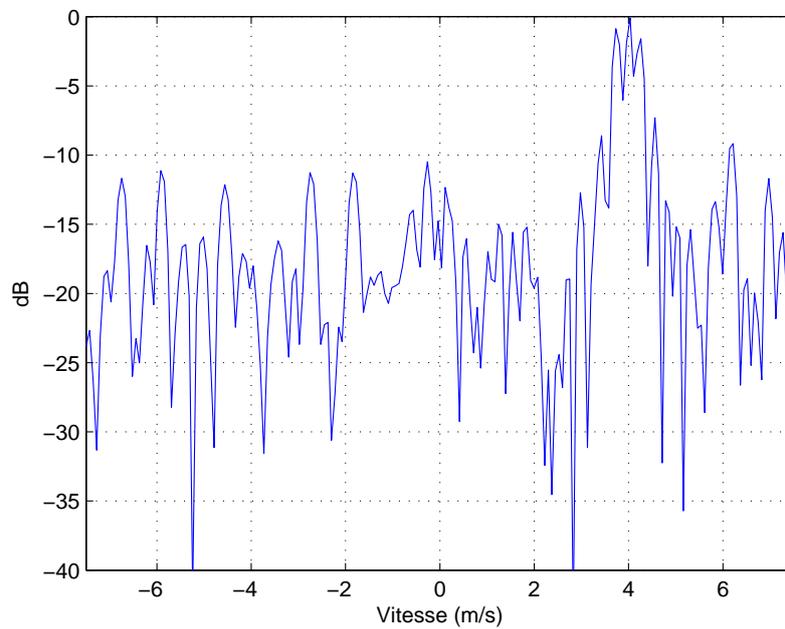


(b) Coupe à azimuth nul (GLRT-FP)

FIG. 4.23 – Résultats de détection en case 255 pour une cible de 19 dBm^2 et de vitesse 4 m/s. Cas du détecteur non-gaussien GLRT-FP avec $K = 409$.

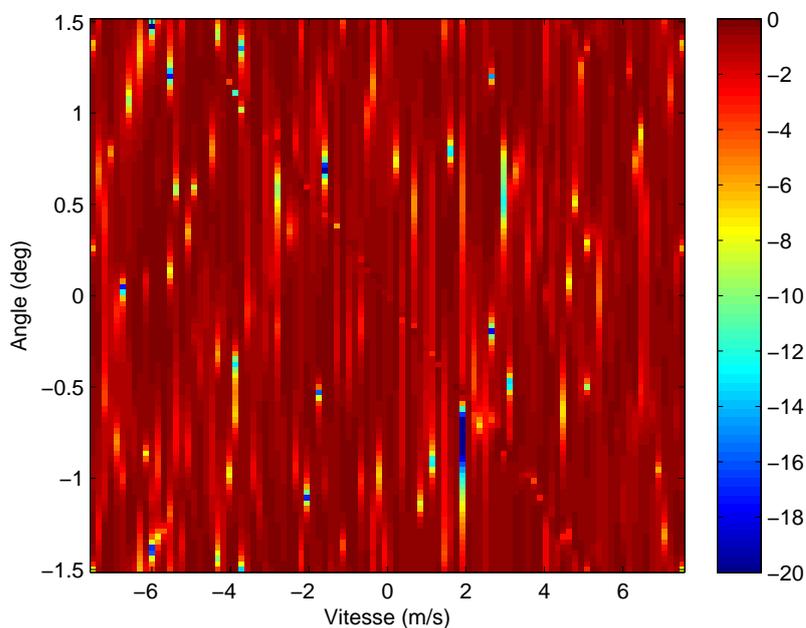


(a) Détection avec le GLRT-PFP

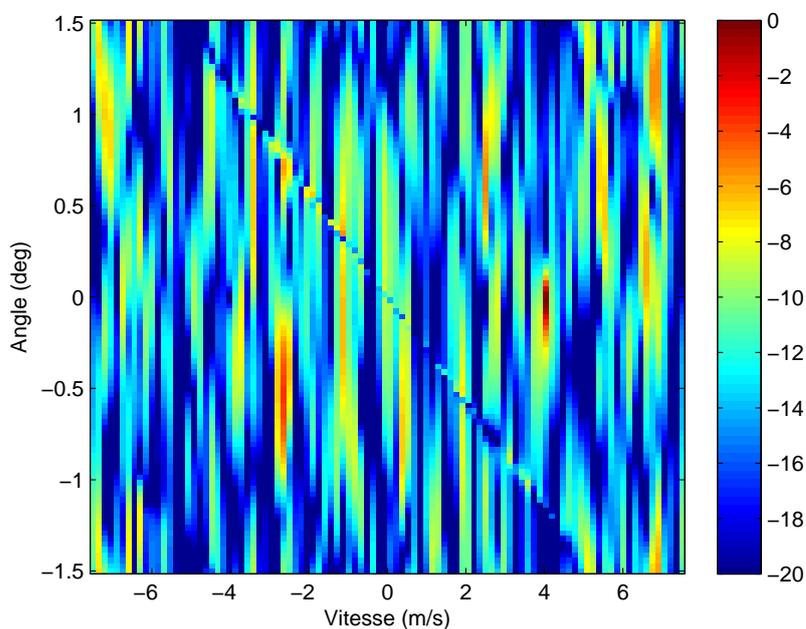


(b) Coupe à azimuth nul (GLRT-PFP)

FIG. 4.24 – Résultats de détection en case 255 pour une cible de 19 dBm^2 et de vitesse 4 m/s. Cas du détecteur non-gaussien GLRT-PFP avec $K = 409$.

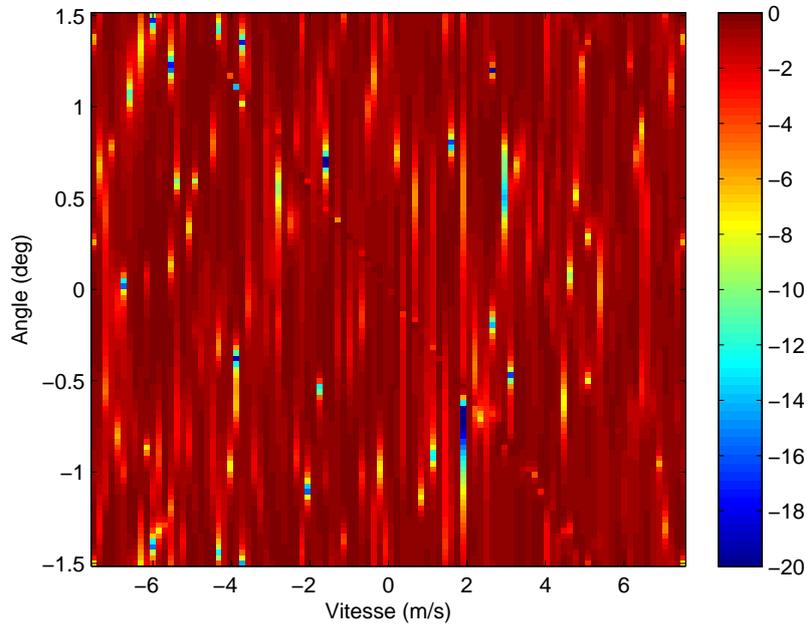


(a) Détection avec l'AMF

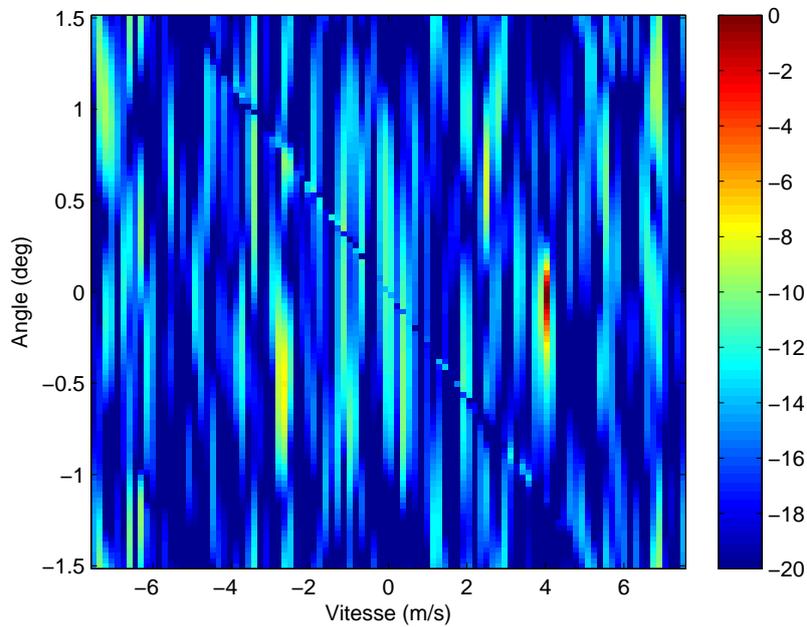


(b) Détection avec le PAMF

FIG. 4.25 – Résultats de détection en case 255 pour une cible de 19 dBm^2 et de vitesse 4 m/s . Cas du détecteur gaussien AMF avec $K = m = 256$.



(a) Détection avec le GLRT-FP

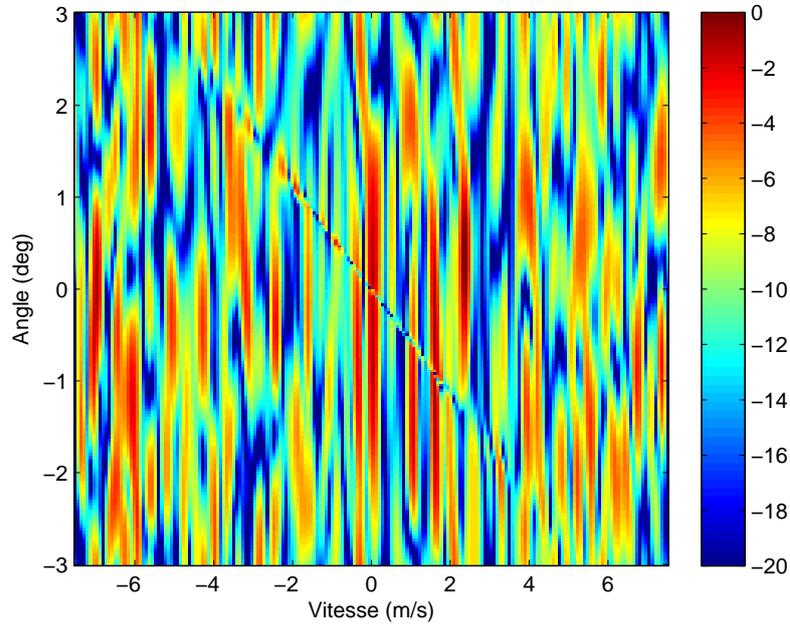


(b) Détection avec le GLRT-PFP

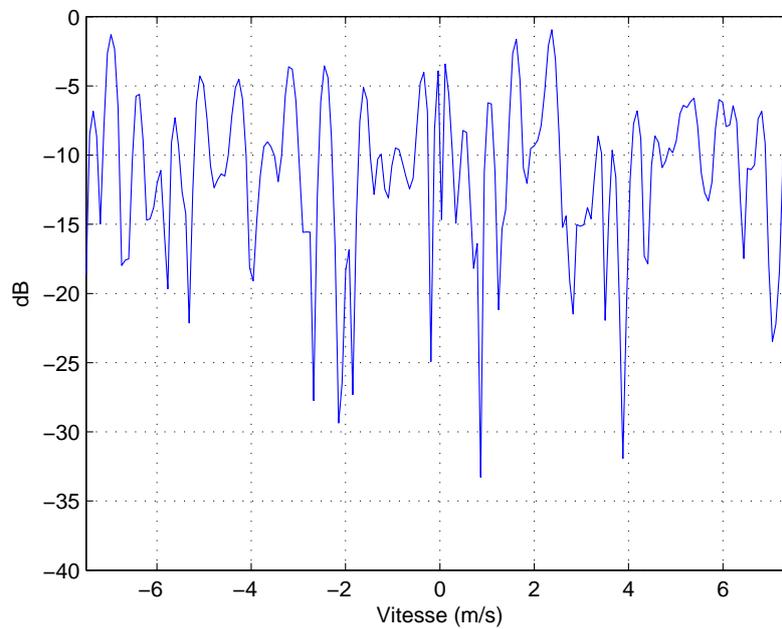
FIG. 4.26 – Résultats de détection en case 255 pour une cible de 19 dBm^2 et de vitesse 4 m/s . Cas du détecteur non-gaussien GLRT-FP avec $K = m = 256$.

de détection des détecteurs AMF et PAMF. Dans cette configuration encore, l'AMF est dépassé par le PAMF en termes de performances de détection. En effet, on ne distingue aucune cible avec l'AMF, que de la fausse alarme, tandis que le PAMF permet de distinguer 9 cibles. Le fouillis est toujours très présent dans ce cas mais la fausse alarme en serait réduite fortement. Les figures (4.29) et (4.30) présentent les résultats pour les détecteurs non-gaussiens. Dans cas, le GLRT-LQ permet de distinguer les 10 cibles mais seules 7 à 8 d'entre elles sont clairement identifiables. Les autres sont toujours noyées dans le clutter très présent autour de la vitesse nulle, ce qui est logique. Ici encore, seul le GLRT-PFP permet d'isoler franchement les 10 cibles, clairement visibles de -4 à 4m/s . Le fouillis a été mieux "appris" et donc mieux rejeté grâce au plus grand nombre de données secondaires virtuelles. Ce résultat est encore confirmé par les coupes à azimuth nul sur lesquelles ressortent parfaitement les "pics" de niveaux correspondants aux cibles. Ces pics sont maintenant parfaitement visibles hors du plancher de bruit.

Tous les résultats présentés ici tendent donc à démontrer que l'exploitation de la persymétrie est parfaitement adaptée aux données STAP en configuration à visée latérale et permet une amélioration significative des performances de détection des détecteurs persymétriques.

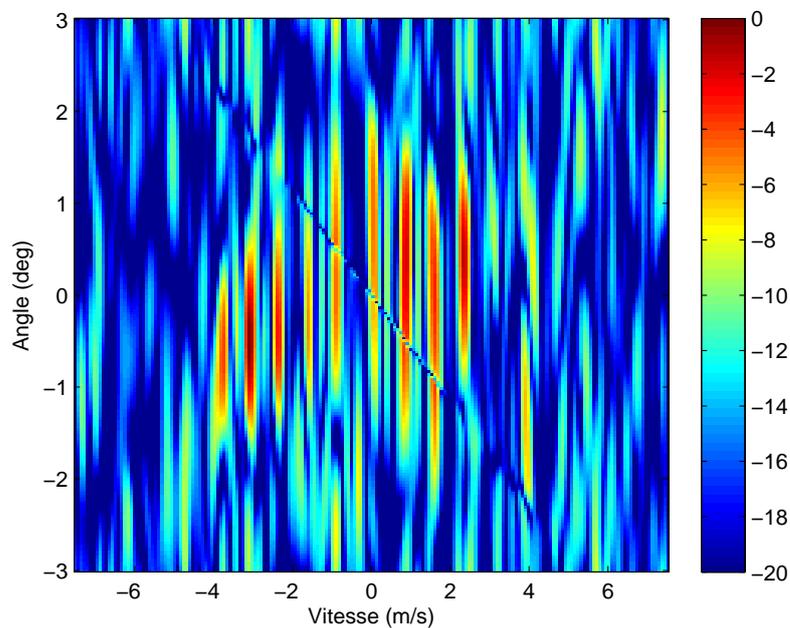


(a) Détection avec l'AMF

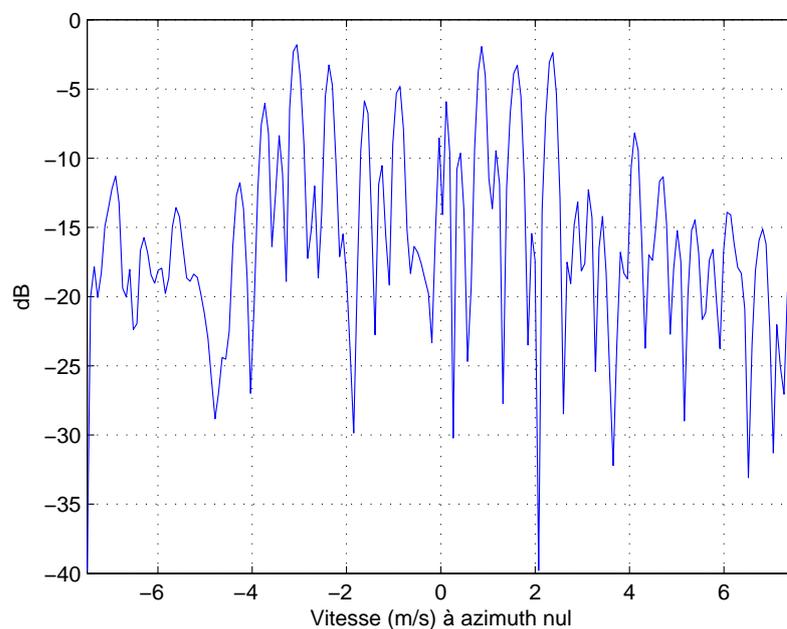


(b) Coupe à azimuth nul (AMF)

FIG. 4.27 – Résultats de détection en case 255 pour dix cible de 19 dBm^2 et de vitesse comprise entre -4 m/s et 4 m/s . Cas du détecteur gaussien AMF avec $K = 409$.

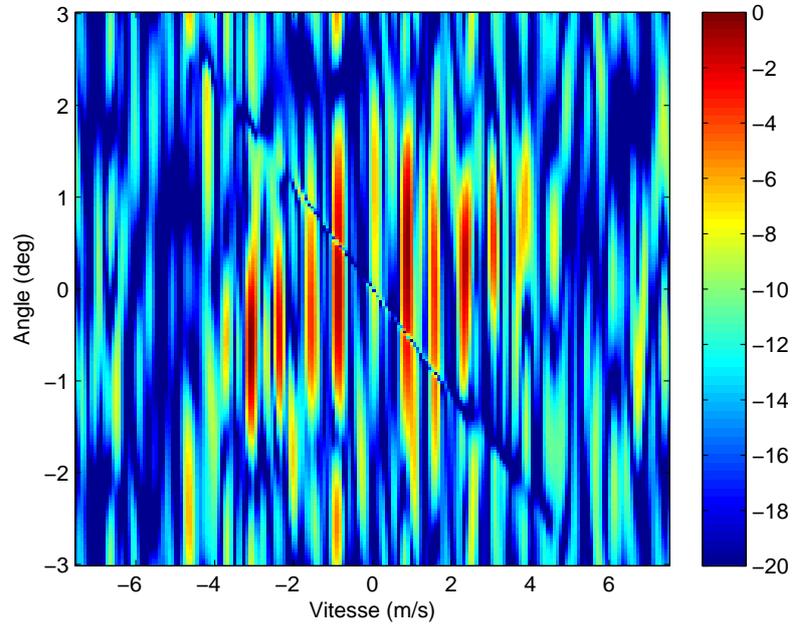


(a) Détection avec le PAMF

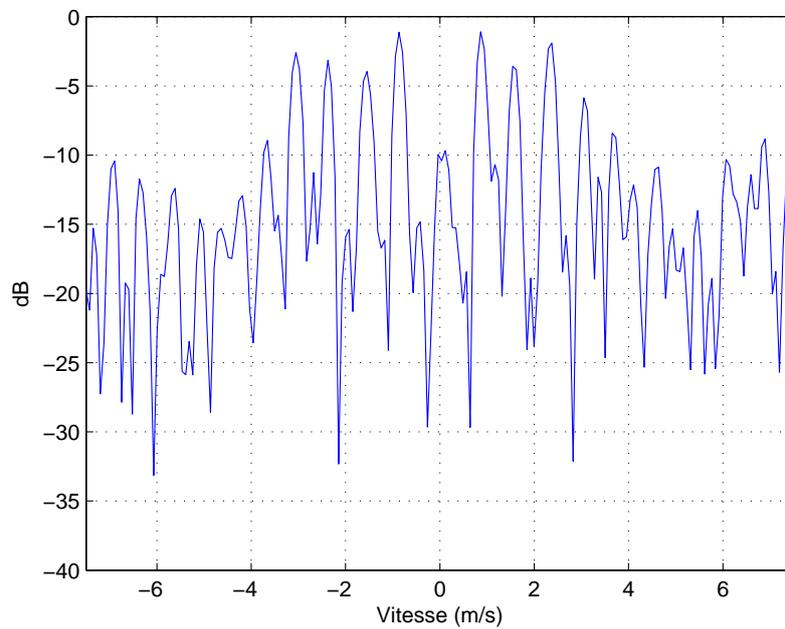


(b) Coupe à azimuth nul (PAMF)

FIG. 4.28 – Résultats de détection en case 255 pour dix cible de 19 dBm^2 et de vitesse comprise entre -4 m/s et 4 m/s . Cas du détecteur gaussien PAMF avec $K = 409$.

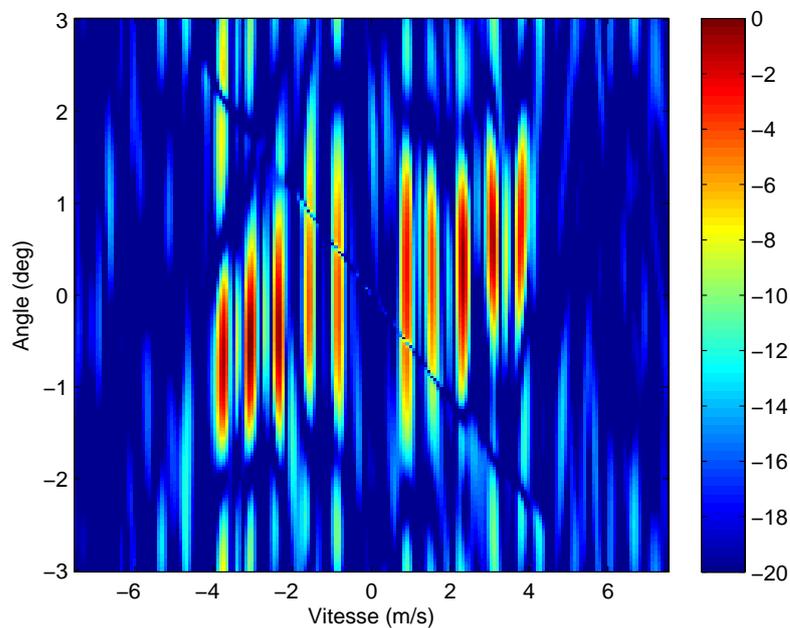


(a) Détection avec le GLRT-FP

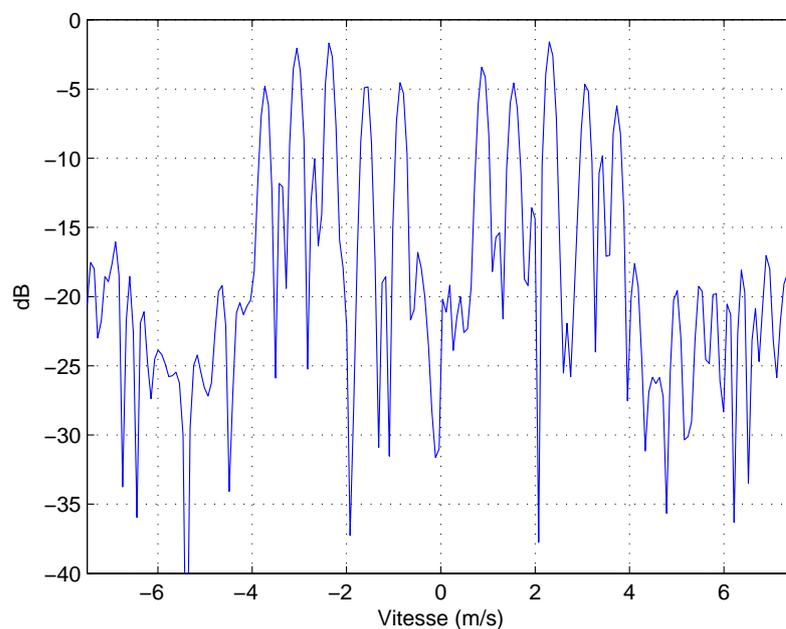


(b) Coupe à azimuth nul (GLRT-FP)

FIG. 4.29 – Résultats de détection en case 255 pour dix cible de 19 dBm^2 et de vitesse comprise entre -4 m/s et 4 m/s . Cas du détecteur non-gaussien GLRT-FP avec $K = 409$.



(a) Détection avec le GLRT-FP



(b) Coupe à azimuth nul (GLRT-PFP)

FIG. 4.30 – Résultats de détection en case 255 pour dix cible de 19 dBm^2 et de vitesse comprise entre -4 m/s et 4 m/s . Cas du détecteur non-gaussien GLRT-PFP avec $K = 409$.

4.5 Le cas Toeplitz.

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, les matrices de covariance en STAP présentent une structure à diagonale constante dite "de Toeplitz". L'idée de cette partie de l'étude est donc d'exploiter cette structure de Toeplitz afin de vérifier les performances des détecteurs associés. En effet la matrice de Toeplitz est uniquement définie par sa première ligne ou première colonne. L'estimation doit donc s'en retrouver améliorée et doit permettre d'approcher les performances optimales de détection. L'étude sera donc menée comme dans le cas de la persymétrie, pour le cas Gaussien et pour le cas non-Gaussien modélisé par des SIRV. Le problème est cependant légèrement différent car l'expression analytique de l'estimateur d'une matrice de covariance de Toeplitz n'est pas connue. L'estimation sera alors effectuée par une technique de descente de gradient.

4.5.0.1 Estimation sous contrainte de Toeplitz dans le cas Gaussien.

Dans le cas gaussien, le critère du maximum de vraisemblance est connu et défini par :

$$f(\mathbf{M}) = -\ln(\det(\mathbf{M}) - \text{Tr}(\mathbf{M}^{-1} \widehat{\mathbf{M}}_{SCM})). \quad (4.7)$$

Ce critère va donc être optimisé afin d'en trouver le maximum sous la contrainte \mathbf{M} Toeplitz : $\mathbf{M}_{toep} = \text{Toeplitz}(\boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}^H)$. Pour ce faire, on utilise donc la technique de la descente de gradient (on minimise donc l'opposé du critère) :

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} - \alpha \Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)}, \quad (4.8)$$

pour lequel le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ sera composé des parties réelles et imaginaires de chaque élément x_i de la première ligne (ou colonne) de la matrice \mathbf{M}_{toep} : $\boldsymbol{\theta} = (\mathcal{R}e(x_1) \dots \mathcal{R}e(x_m) \mathcal{I}m(x_1) \dots \mathcal{I}m(x_m))$. Le point de départ de cette optimisation sera choisi en "Toeplitzifiant" la matrice $\widehat{\mathbf{M}}_{SCM}$ par un moyennage sur chaque diagonale, ce qui assure un point de départ proche de l'optimum et donc une convergence rapide de l'algorithme. On remplace ensuite les éléments de la première ligne par chaque moyenne calculée. Le gradient $\Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)}$ est calculé en déterminant les dérivées partielles [60] du critère par rapport à chaque élément de la première ligne de la matrice à optimiser :

$$\Delta \boldsymbol{\theta} = \text{Tr} \left(\mathbf{M}_{toep} \frac{\partial \mathbf{M}_{toep}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) + \text{Tr} \left(\mathbf{M}_{toep}^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}_{toep}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbf{M}_{toep}^{-1} \widehat{\mathbf{M}}_{SCM} \right). \quad (4.9)$$

Le pas de calcul ainsi que les critères d'arrêts seront choisis en fonction de la précision voulue. Cette méthode de descente présente donc l'avantage d'optimiser les parties réelles et imaginaires sous la contrainte de Toeplitz.

L'algorithme est alors le suivant :

- Calcul de l'estimateur de la matrice
- Rectification de cette matrice (moyennage sur les diagonales et remplacement par chaque moyenne).
- Calcul du Gradient
- Détermination de la fonctionnelle optimisée sous contrainte de Toeplitz.

Les résultats des simulations de cette optimisation sont présentées par les figures suivantes, pour lesquelles la matrice réelle est simulée de forme Toeplitz avec la première ligne égale à $\mathbf{x} = (1 \rho \rho^2 \dots \rho^m)$. La figure (4.31) montre les courbes COR de l'AMF sous contrainte de Toeplitz comparées aux courbes des différents détecteurs OGD, AMF et PAMF. L'amélioration de l'estimation de la matrice apportée par la prise en compte de la structure de Toeplitz est visible sur ces courbes par une meilleure régulation de

la fausse alarme et un gain de quelques dB en détection pour l'AMF-toeplitz par rapport aux détecteurs AMF et PAMF. Le comportement de ces courbes est identique aux comportements vus précédemment. Cependant on constate sur les figures (4.32) et (4.33) une grande sensibilité de l'AMF persymétrique à la valeur de ρ , degré de corrélation du fouillis. En effet, plus le fouillis est corrélé, plus l'estimateur de Toeplitz de la matrice, dépendant de la matrice "vraie" est touché par la corrélation. Ce phénomène pourrait-être expliqué par le fait qu'optimiser séparément la partie réelle de la partie imaginaire ne reflète pas la réalité. Un comportement déviant du code utilisé pourrait aussi être à l'origine d'un tel phénomène, mais le temps a manqué pour se pencher plus avant sur la question, question qui reste donc toujours ouverte...

4.5.0.2 Estimation sous contrainte de Toeplitz dans le cas SIRV.

En environnement non-gaussien modélisé par des SIRV, le critère du maximum de vraisemblance a été donné dans [31] et défini par :

$$f(\Sigma) = \prod_{k=1}^K \frac{N^N e^{-N}}{\pi^N} \frac{1}{\det(\Sigma)} \frac{1}{(\mathbf{r}_k^H \Sigma^{-1} \mathbf{r}_k)^N} \quad (4.10)$$

avec \mathbf{r}_k , k -ième vecteur des données secondaires. L'évaluation du gradient de cette équation a fourni comme estimateur de la matrice de covariance Σ la matrice du point fixe défini par l'équation (1.50). Dans le cadre de l'optimisation sous contrainte de Toeplitz, on utilise ici encore la méthode de la descente de gradient. La différence dans ce cas est due au fait que le point de départ de l'optimisation est fourni en Toeplizifiant la matrice du Point Fixe par moyennage sur les diagonales. Dans ce cadre, les dérivées partielles de θ sont calculées, après utilisation du logarithme du critère, par l'équation suivante :

$$\Delta\theta = -N \operatorname{Tr} \left(\Sigma_{toep}^{-1} \frac{\partial \Sigma_{toep}}{\partial \theta} \right) - m \frac{1}{\mathbf{r}_k^H \Sigma_{toep}^{-1} \mathbf{r}_k} \mathbf{r}_k^H \Sigma_{toep}^{-1} \frac{\partial \Sigma_{toep}}{\partial \theta} \Sigma_{toep}^{-1} \mathbf{r}_k. \quad (4.11)$$

L'algorithme est donc identique dans ce cas à celui utilisé pour l'environnement gaussien. Seule la forme de la fonctionnelle diffère, ceci du à l'utilisation de SIRV. Ainsi donc, comme le montrent les figures (4.34), (4.35) et (4.36), les comportements sont identiques dans ce milieu non-gaussien par rapport à l'environnement gaussien. Le fouillis est simulé selon une K-distribution de paramètre $\nu = 0.2$ et on présente les courbes COR des détecteurs GLRT-SCM, GLRT-LQ, GLRT-PFP ainsi que GLRT-toeplitz. On constate donc l'amélioration des performances de la matrice sous contrainte de Toeplitz, aussi bien d'un point de vue régulation de fausse alarme que d'un point de vue performance de détection pour le GLRT-toeplitz par rapport à tous les autres détecteurs. L'exploitation de la structure de Toeplitz paraît donc être également une bonne piste d'amélioration des détecteurs dans le cas non-gaussien. Cette constatation est cependant nuancée par la grande sensibilité de cette optimisation face au paramètre ρ de la matrice "vraie" du clutter, qui est également notable dans ce cas. Ici encore, la question de l'origine de cette sensibilité se pose. Le caractère similaire des codes peut expliquer la similitude de comportement des courbes mais l'explication reste la encore difficile à obtenir. Toutefois, on constate par ces courbes l'intérêt que peut présenter l'exploitation de la forme Toeplitz.

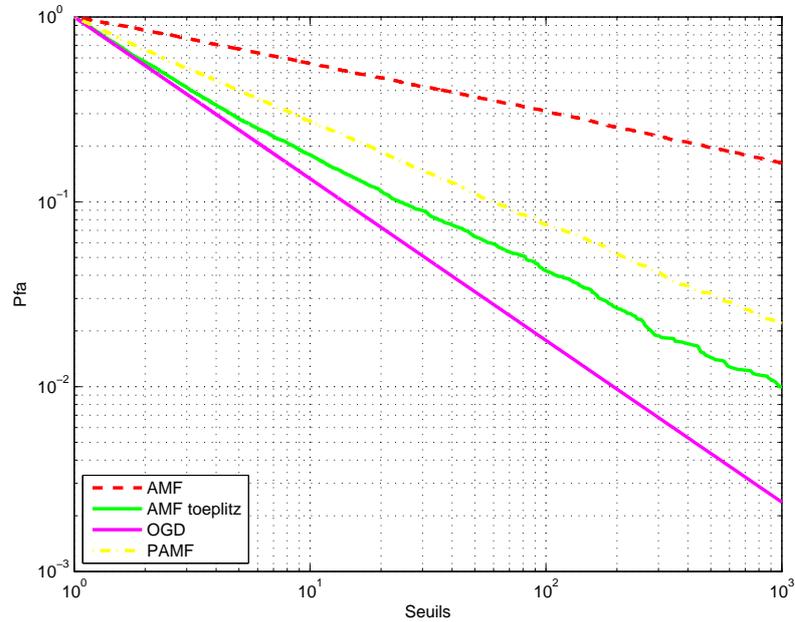
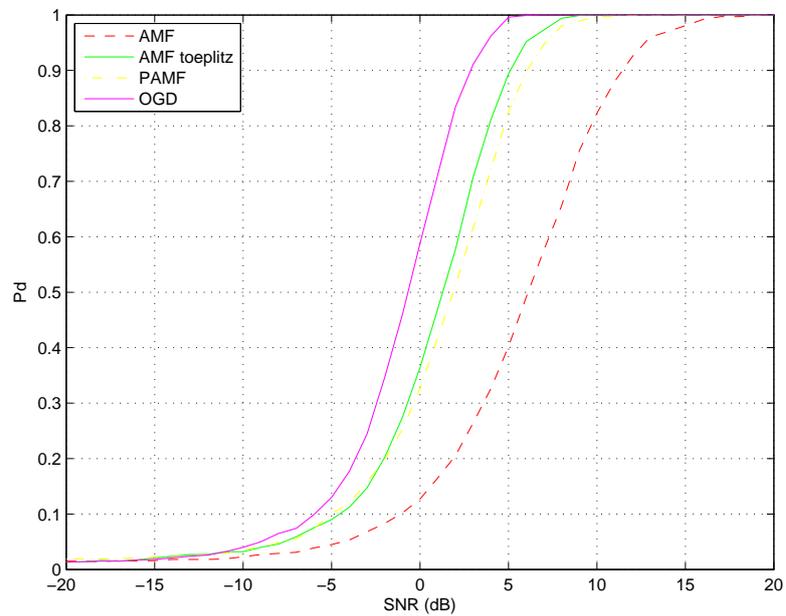
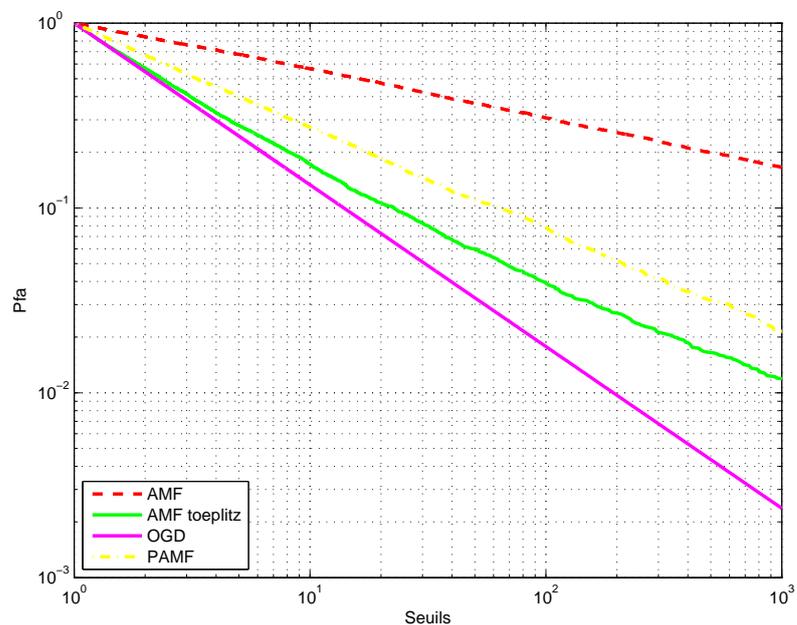
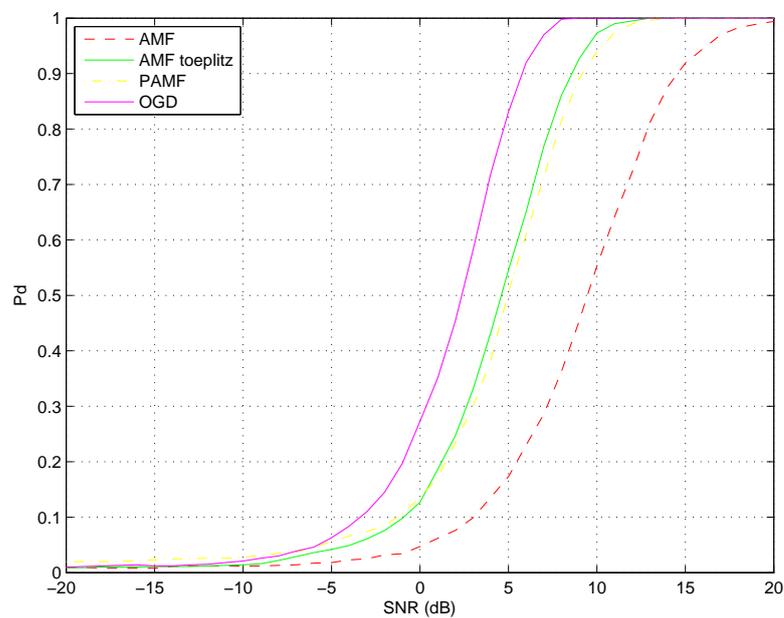
(a) Simulation de la relation " P_{fa} -seuil".(b) Simulation de la relation " P_d -SNR".

FIG. 4.31 – Comparaison des courbes COR pour les détecteurs en environnement gaussien simulé et sous contrainte de Toeplitz. $m = 8$, $K = 10$, $P_{fa} = 10^{-2}$ et $\rho = 0.1$



(a) Simulation de la relation " P_{fa} -seuil".



(b) Simulation de la relation "Pd-SNR".

FIG. 4.32 – Comparaison des courbes COR pour les détecteurs en environnement gaussien simulé et sous contrainte de Toeplitz. $m = 8$, $K = 10$, $P_{fa} = 10^{-2}$ et $\rho = 0.5$

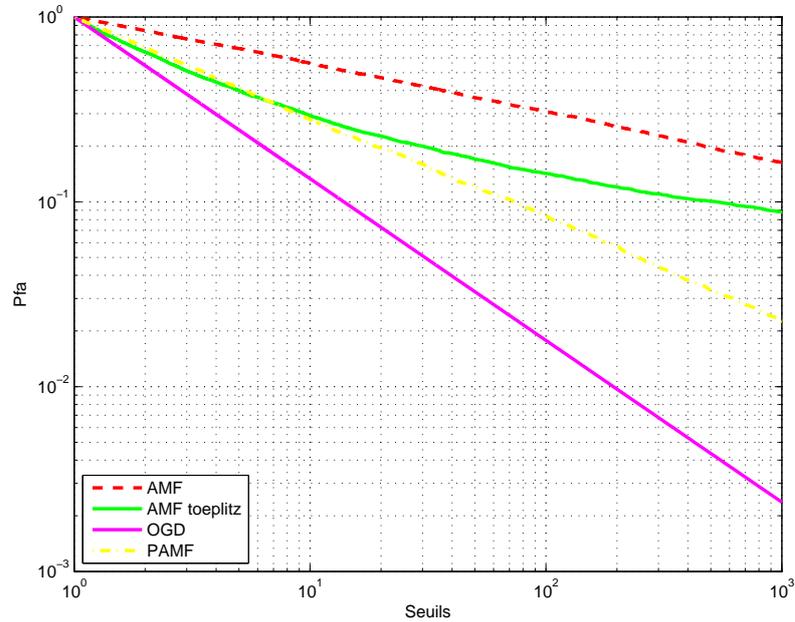
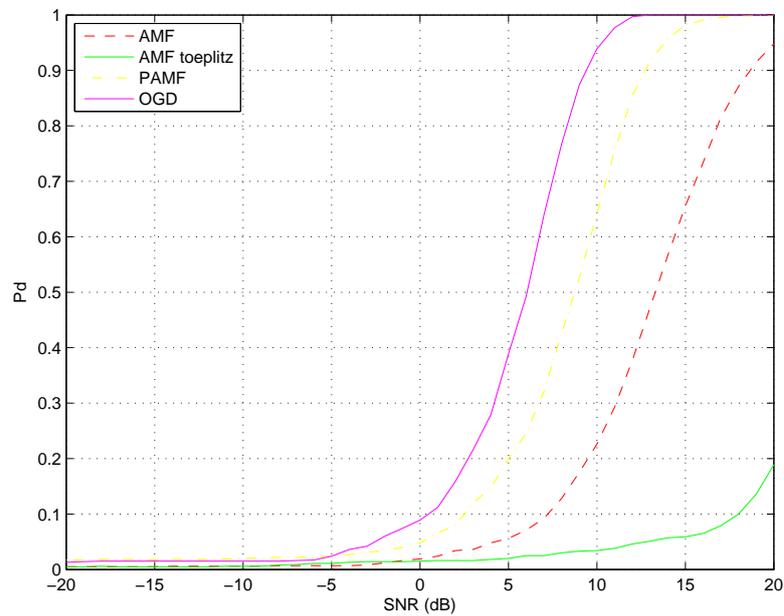
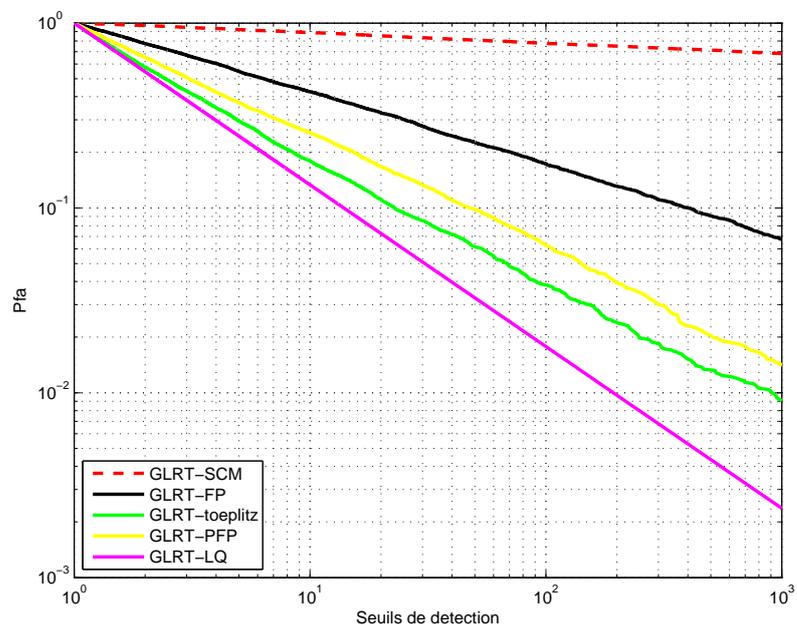
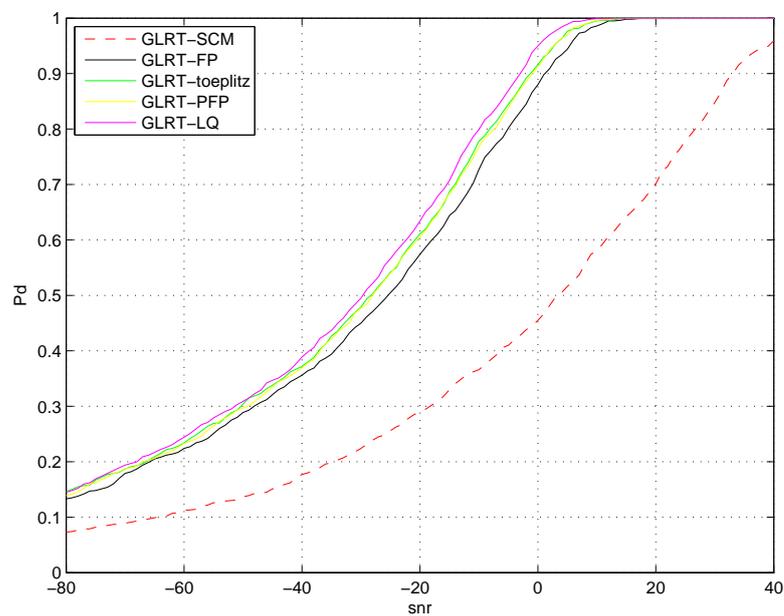
(a) Simulation de la relation " P_{fa} -seuil".(b) Simulation de la relation " P_d -SNR".

FIG. 4.33 – Comparaison des courbes COR pour les détecteurs en environnement gaussien simulé et sous contrainte de Toeplitz. $m = 8$, $K = 10$, $P_{fa} = 10^{-2}$ et $\rho = 0.9$



(a) Simulation de la relation " P_{fa} -seuil".



(b) Simulation de la relation "Pd-SNR".

FIG. 4.34 – Comparaison des courbes COR pour les détecteurs en environnement Non-gaussien simulé et sous contrainte de Toeplitz. $m = 8$, $K = 12$, $P_{fa} = 10^{-2}$ et $\rho = 0.1$

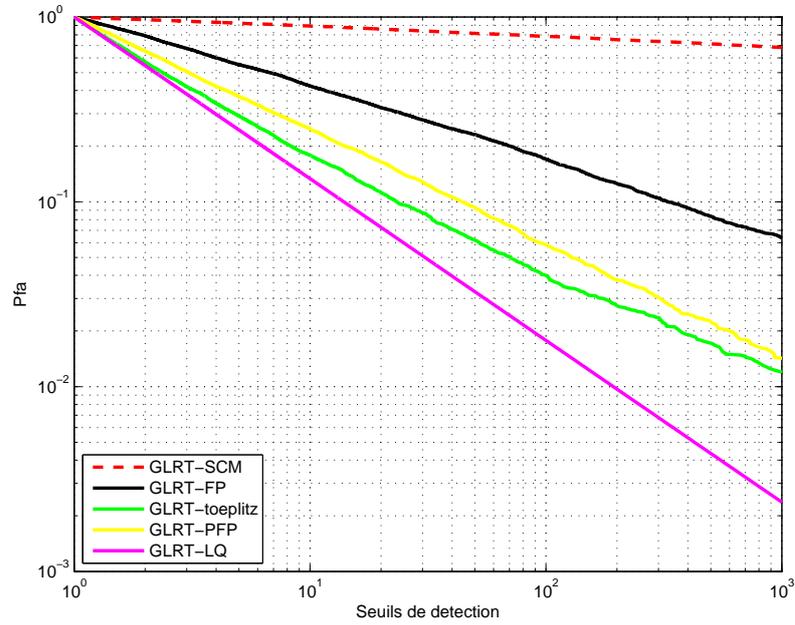
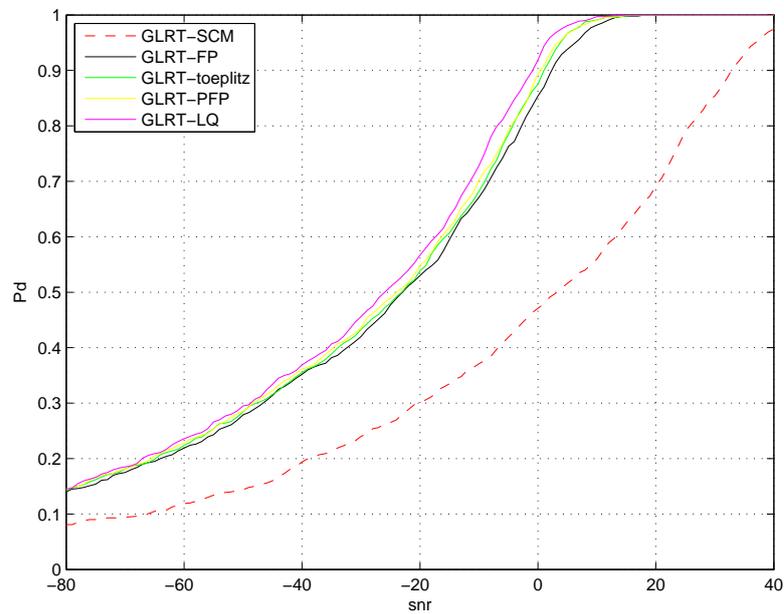
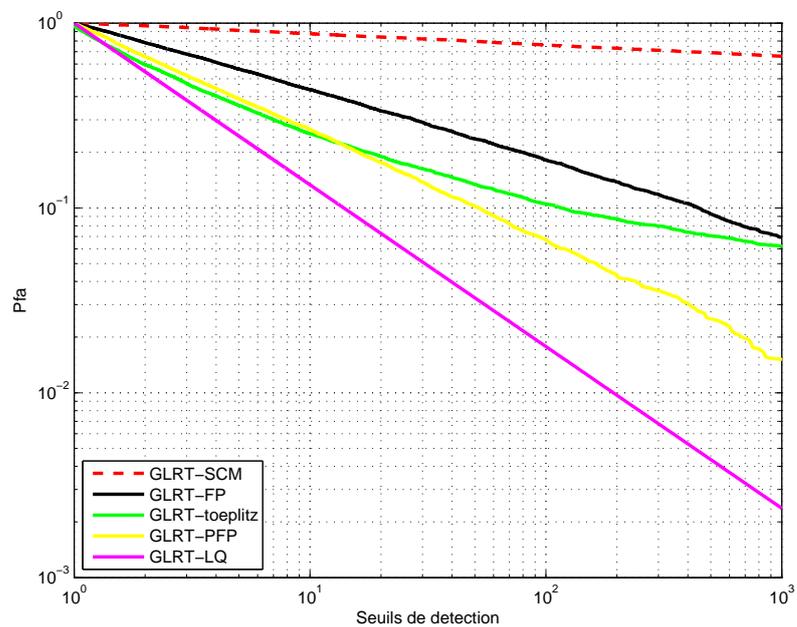
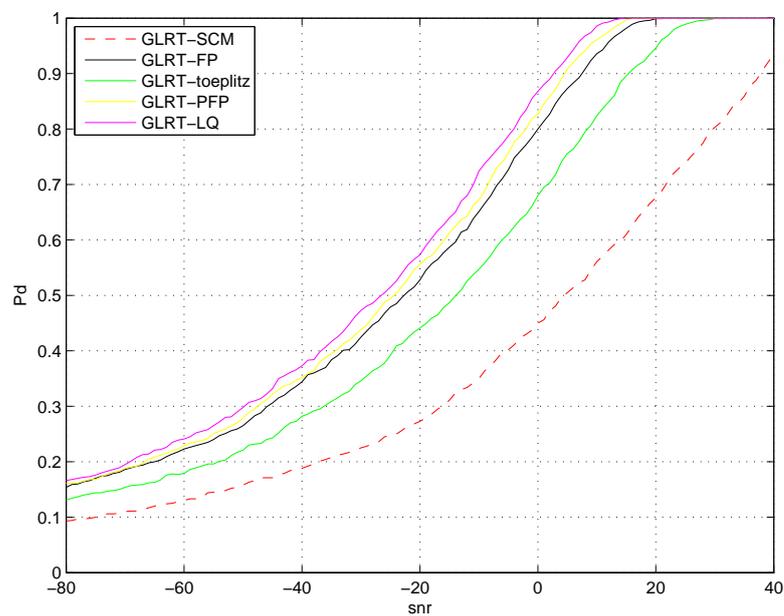
(a) Simulation de la relation " P_{fa} -seuil".(b) Simulation de la relation " P_d -SNR".

FIG. 4.35 – Comparaison des courbes COR pour les détecteurs en environnement Non-gaussien simulé et sous contrainte de Toeplitz. $m = 8$, $K = 12$, $P_{fa} = 10^{-2}$ et $\rho = 0.5$



(a) Simulation de la relation " P_{fa} -seuil".



(b) Simulation de la relation "Pd-SNR".

FIG. 4.36 – Comparaison des courbes COR pour les détecteurs en environnement Non-gaussien simulé et sous contrainte de Toeplitz. $m = 8$, $K = 12$, $P_{fa} = 10^{-2}$ et $\rho = 0.9$

4.6 Méthode du rang réduit persymétrique : application sur les données STAP CELAR.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, la méthode du rang réduit permet de travailler sur l'estimateur du projecteur de la matrice de covariance et réduit donc le nombre de données secondaires nécessaire à l'estimation de la matrice de covariance. Afin de valider ces résultats, on utilise les mêmes jeux de données STAP du CELAR sur lesquelles seront comparés les résultats.

Comme présenté au chapitre 3, section 3.2, la méthode du rang réduit dite "classique" permet de n'utiliser qu'un nombre de données secondaires égal au double du rang du clutter pour obtenir un maximum de 3 dB de pertes en détection. Dans le cas des données STAP du CELAR présentées dans ce chapitre à la section précédente (4.4), le rang du clutter, calculé selon la règle de Brennan (3.8), vaut ici $4 + (64 - 1) * \frac{2 * 100 * 0.001}{0.03} = 46$. La méthode du rang réduit doit donc théoriquement permettre une détection à 3 dB à partir de 92 données secondaires, ce qui est bien inférieur aux $K = 2NM = 512$ cases distances nécessaires en STAP à pleine dimension. Nous choisissons donc comme scénario de validation le cas où une cible est présente à la case distance 256, où les autres cibles présentes aux cases distance 216 et 296 sont éliminées afin de ne pas polluer l'estimation et où la cible dans la case sous test présente une SER de 19 dBm^2 . Le fond choisi sera issu d'une image SAR THR réelle. Afin de ne pas surcharger la compréhension des résultats et pour rester dans le cadre de la théorie étudiée en section 3.2, seuls les détecteurs AMF et PAMF seront testés sur ces données. La figure (4.37) présente la répartition des valeurs propres pour les deux types de matrices (SCM) et (PSCM) étudiées. On voit nettement que l'hypothèse de réjection des valeurs propres d'ordre supérieur est confirmée par ces courbes. Le rang calculé du clutter est de 46, il est clair sur cette figure que toutes les valeurs propres d'ordre supérieur à 46 sont négligeables.

La figure (4.38) présente ainsi les résultats de détection pour les deux détecteurs AMF et PAMF. La détection se fait dans ce cas avec un ensemble de $K = 200$ données secondaires donc bien au dessus de $2r = 92$. On s'assure ainsi d'obtenir une détection avec un maximum de 3 dB de pertes. Dans ce cas, la détection étant déjà optimisée, la persymétrie n'apporte que peu d'amélioration par rapport aux détecteurs classiques, les résultats du PAMF sont donc très similaires à ceux de l'AMF, la cible est bien détectée, le fouillis bien éliminé. La figure (4.39) présente les résultats de détection pour les mêmes détecteurs mais avec seulement $K = 46$ données secondaires ce qui correspond donc au rang même du clutter. Dans ce cas, la SCM est mal estimée et le fouillis est donc mal rejeté par l'AMF et signe fortement. Le niveau de la cible s'en trouve donc inférieur à celui du clutter et celle-ci, lors d'un seuillage, ne serait pas détectée. Dans le cas du PAMF, le doublement virtuel du nombre de données secondaires fait que le faible nombre de données secondaires d'origine est suffisant pour une bonne estimation de la matrice PSCM. Le fouillis est correctement rejeté et la cible, bien visible, est parfaitement détectée. Ceci confirme bien la théorie présentée au chapitre (3).

Tous ces résultats sont également valables dans le cas où plusieurs cibles sont présentes dans une même case distance. Dans ces conditions, les résultats de détection avec $K = 400$ données secondaires présentés figure (4.40) sont toujours similaires pour l'AMF et le PAMF en terme de réjection du clutter. Cependant, l'AMF ne permet pas dans ce cas la détection des cibles. Les tests faits en modifiant le réglage du clutter ainsi que le nombre de steering-vectors de vitesse à utiliser montrent une grande sensibilité de l'AMF face à ces problèmes, dans le cas où plusieurs cibles sont présentes. Le problème se pose encore plus lorsqu'on réduit à $K = r = 46$ le nombre de données secondaire à utiliser. Dans ce cas, les résultats présentés figure (4.41) montrent que le PAMF améliore toujours la détection alors que l'AMF présente un résultat moindre en termes de performances de détection. Les résultats sont également dégradés par

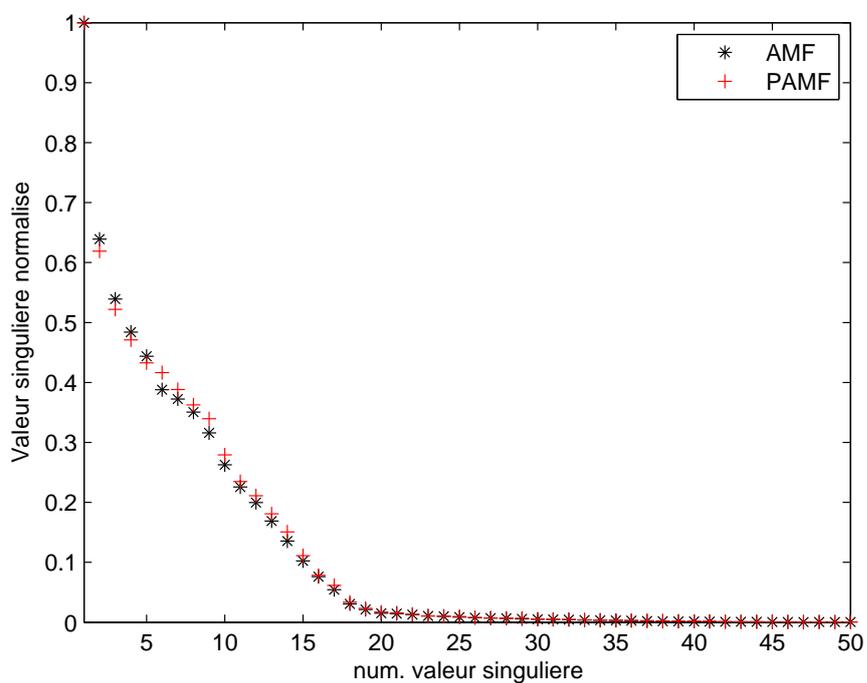
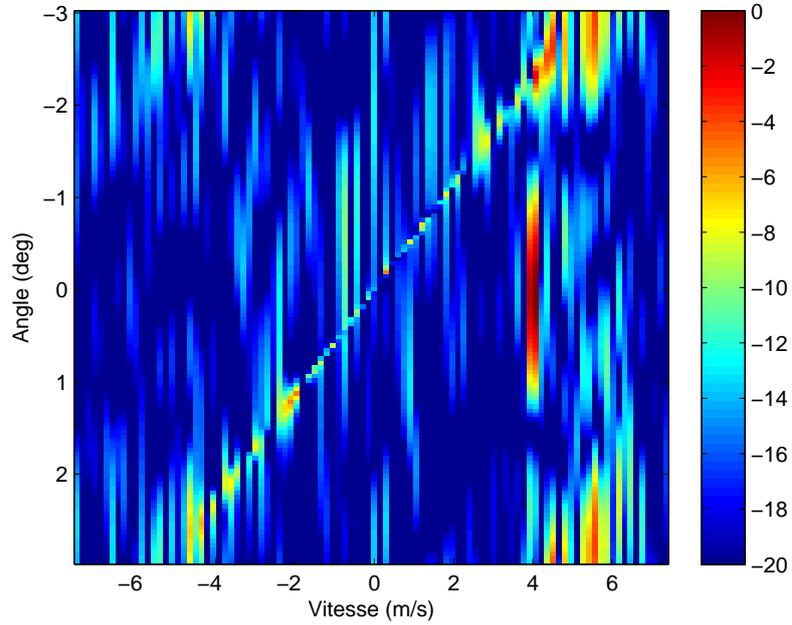
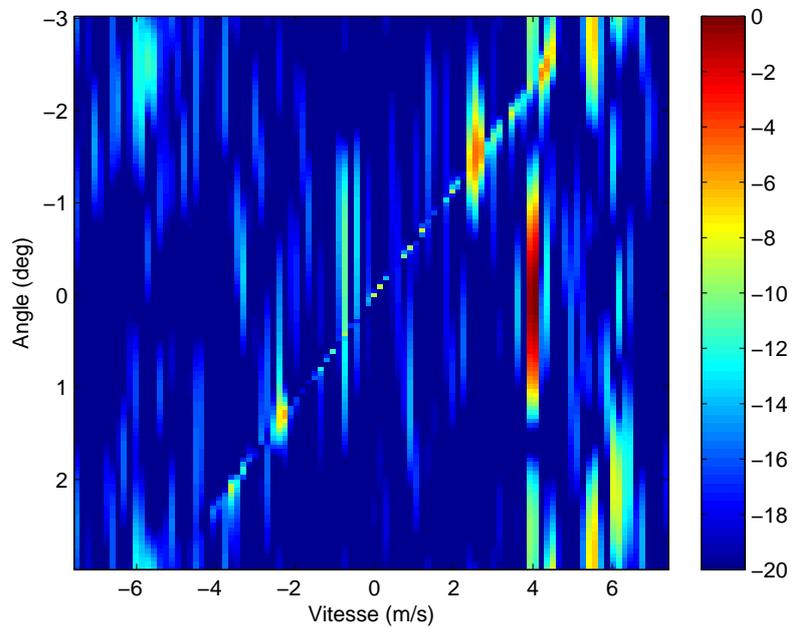


FIG. 4.37 – Répartition des valeurs singulières normalisées pour les deux estimateurs de matrice (SCM et PSCM).

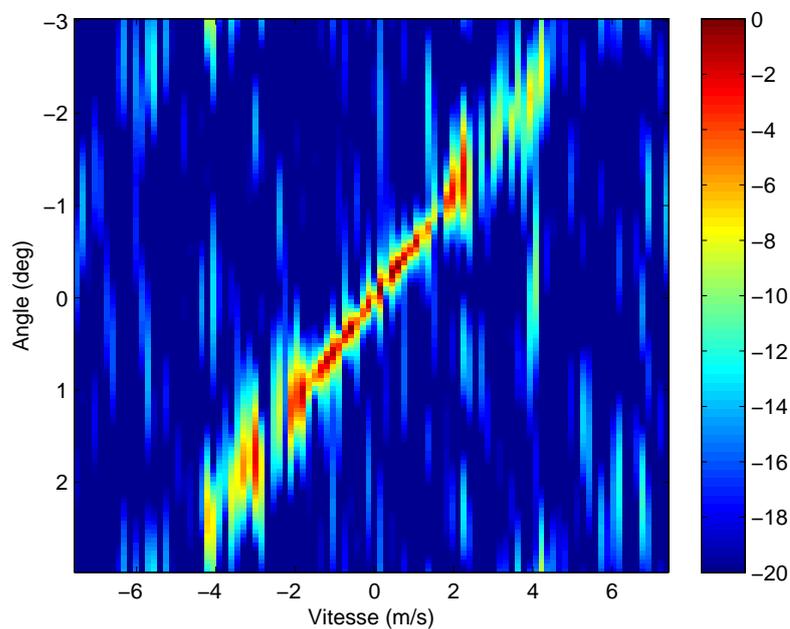


(a) Détection avec l'AMF

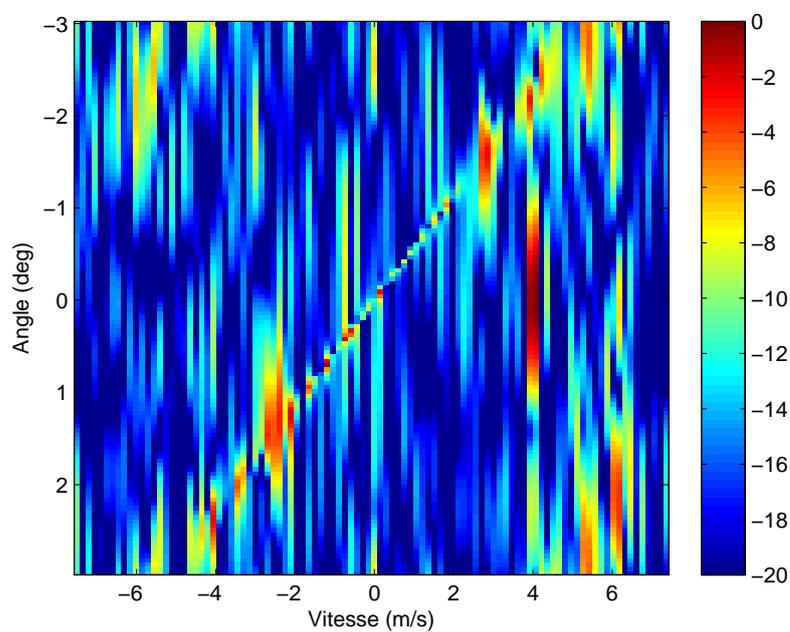


(b) Détection avec le PAMF

FIG. 4.38 – Résultats de détection en rang réduit classique en case 256 pour une cible de 19 dBm^2 et de vitesse 4 m/s sans contamination. Cas des détecteurs Gaussiens avec $K = 200$ et $r = 46$.



(a) Détection avec l'AMF

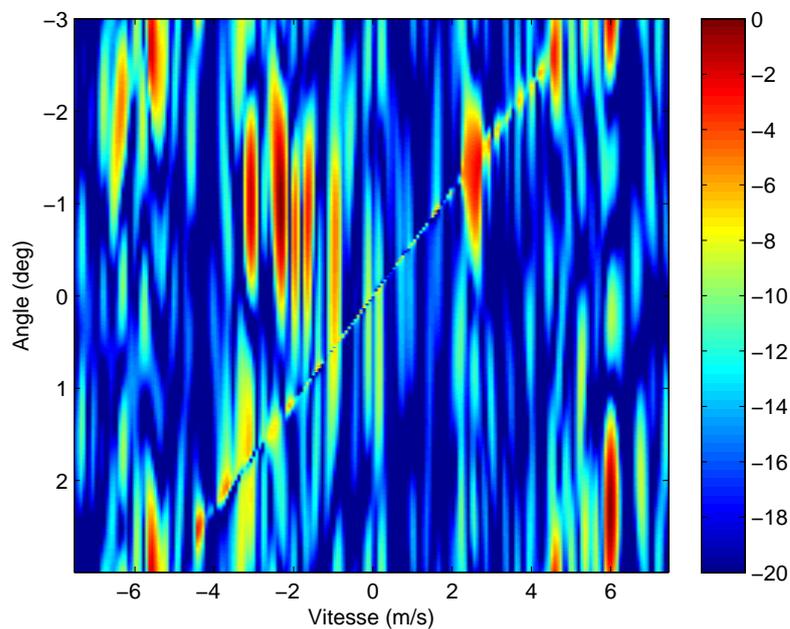


(b) Détection avec le PAMF

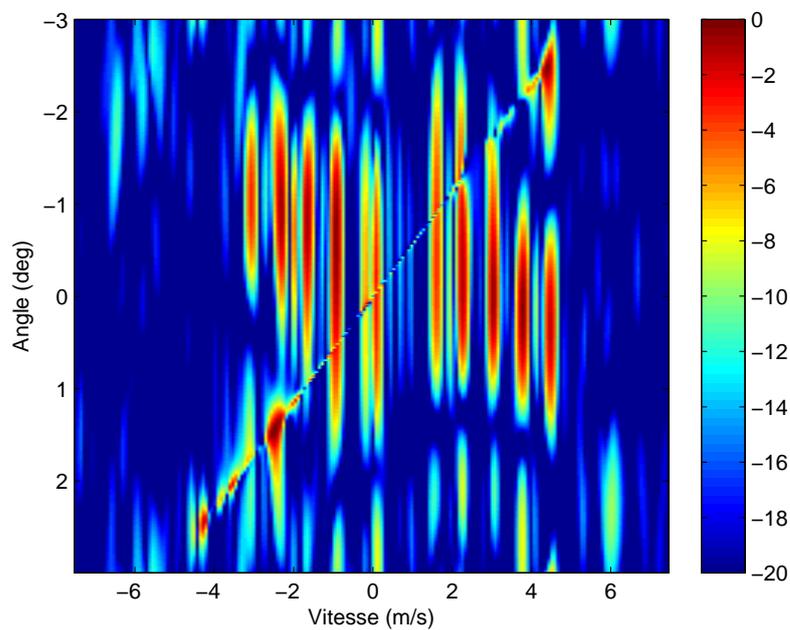
FIG. 4.39 – Résultats de détection en rang réduit persymétrique en case 256 pour une cible de 19 dBm^2 et de vitesse 4 m/s sans contamination. Cas des détecteurs Gaussiens avec $K = r = 46$.

4.6. Méthode du rang réduit persymétrique : application sur les données STAP CELAR.

l'obligation de séparer les cibles en vitesse (toutes les cibles possèdent une vitesse proche de celle de la cible adjacente). Ceci impose d'augmenter fortement le nombre de steering-vectors et complique alors le travail des détecteurs. Ces résultats posent ainsi la question de la robustesse des estimateurs en rang réduit face aux pollutions diverses et au multi-cibles. Cette question qui reste en suspend pourra alors faire l'objet d'une différente étude. Ces facteurs n'ont pas été pris en compte dans ce document.

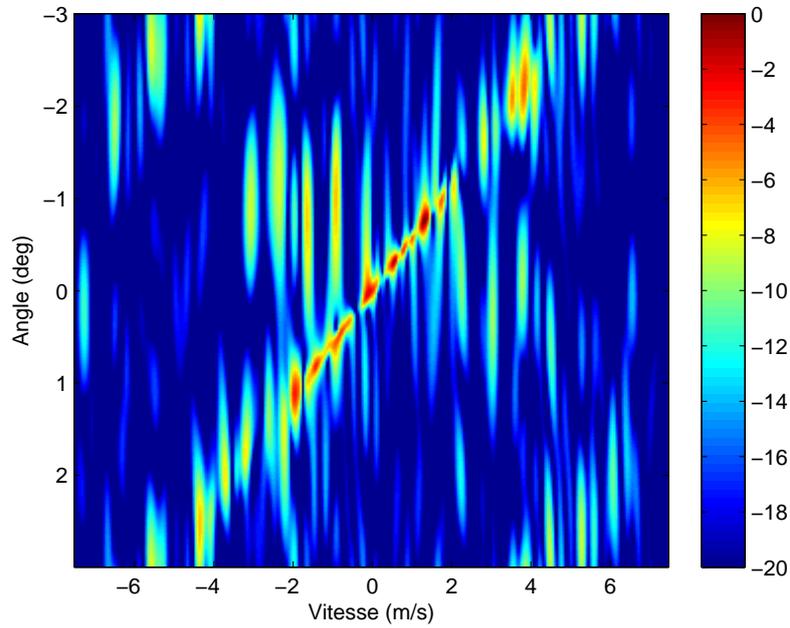


(a) Détection avec l'AMF

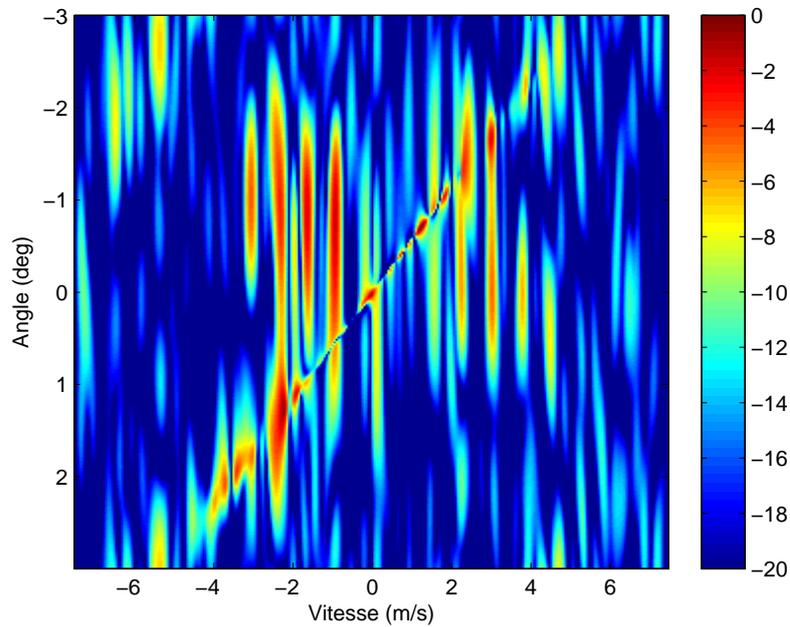


(b) Détection avec le PAMF

FIG. 4.40 – Résultats de détection en rang réduit classique en case 256 pour dix cibles de 19 dBm^2 et de vitesse comprise entre -4 m/s et 4 m/s sans contamination. Cas des détecteurs Gaussiens avec $K = 400$ et $r = 46$.



(a) Détection avec l'AMF



(b) Détection avec le PAMF

FIG. 4.41 – Résultats de détection en rang réduit persymétrique en case 256 pour dix cibles de 19 dBm^2 et de vitesse comprise entre -4 m/s et 4 m/s sans contamination. Cas des détecteurs Gaussiens avec $K = r = 46$.

Conclusions et Perspectives

Dans le cadre des processus de détection radar, l'objectif principal des systèmes est d'isoler le signal d'intérêt, i.e. la cible, des différents bruits pouvant la perturber. Dans cet objectif ont été développés différents schémas de détection pour des environnements gaussiens comme pour des environnements non-gaussiens modélisés par des SIRV. L'étude présentée dans ce manuscrit propose une contribution à l'amélioration des performances de détecteurs en environnements gaussien et non-gaussien, par l'exploitation d'une structure particulière, la "Persymétrie", de la matrice de covariance du clutter. Cette exploitation a donc permis de développer des détecteurs dont les performances ont pu être détaillées et analysées par comparaison avec les schémas existants. De nombreux tests sur données opérationnelles de tous types ont permis une validation des études menées et montrent ainsi l'intérêt de l'exploitation de la structure.

Conclusion Générale.

Le chapitre 1 présente l'état de l'art général de la détection radar. Le test binaire de décision est rappelé ainsi que les principaux résultats concernant le détecteur en environnement gaussien OGD. Ce détecteur employé classiquement souffre cependant de deux problèmes : le modèle gaussien est peu représentatif de la réalité et en pratique, la matrice de covariance du clutter est inconnue. De ce fait, l'OGD est rapidement mis en défaut et nécessite d'être remplacé par un schéma plus adapté. Dans cet objectif, on présente ensuite le modèle SIRV ou gaussien composé dont la particularité est de représenter plus fidèlement la réalité et de rester d'un maniement souple, grâce notamment au fait que le noyau du SIRV est gaussien et que le SIRV englobe une infinité de lois. La modélisation du fouillis s'en trouve donc grandement enrichie. Le détecteur associé au SIRV, le GLRT-LQ est ensuite présenté et analysé. Ce détecteur souffrant également de l'obligation de connaissance de la matrice de covariance du fouillis, le concept d'adaptativité, théorie qui permet d'estimer les matrices de covariance, est ensuite introduite. Cette estimation de la matrice de covariance est illustrée par la présentation des estimateurs pour les milieux gaussiens et SIRV, respectivement la SCM et le Point Fixe. Ces deux estimateurs permettent d'obtenir les schémas de détection associés, respectivement encore AMF et GLRT-FP.

Tout l'objectif de ce travail réside dans l'idée suivante : il est nécessaire de mieux exploiter la structure de la matrice de covariance afin de développer des détecteurs dont les performances en termes de détection seront améliorées.

Le second chapitre a donc introduit la structure particulière persymétrique de la matrice de covariance. La transformation utilisée dans le cadre de cette persymétrie permet donc de rendre tous les éléments de la matrice estimée réels. Ceci contribue alors à diminuer l'erreur d'estimation et à améliorer, a priori, les performances des détecteurs. L'obtention de l'estimateur du maximum de vraisemblance

persymétrique et son utilisation dans le détecteur AMF permet donc d'obtenir un nouveau détecteur appelé PAMF. L'étude statistique du PAMF a ensuite permis d'en déterminer les relations " P_{fa} -seuil" et "PD-SNR" et donc de le caractériser précisément en pratique. En ce qui concerne le cas de l'environnement non-gaussien, l'idée est alors d'utiliser la même transformation que sous hypothèse gaussienne mais appliquée à la matrice du point fixe. On présente donc ensuite l'estimateur obtenu appelé Point-Fixe Persymétrique et on en détaille les caractéristiques statistiques (consistance, non-biais, distribution asymptotique...). Le détecteur GLRT-PFP, conçu sur la base du GLRT-LQ avec notre nouvelle matrice estimée persymétrique, est ensuite présenté et analysé afin d'en obtenir également les relations importantes en terme de radar. Le caractère SIRV-CFAR de ce nouveaux détecteur, propriété importante lors de l'exploitation opérationnelle, est ainsi montré. En ce qui concerne la distribution du GLRT-PFP, une relation donnant quelques éclairages sur l'équation finale, qui n'a pu être obtenue vu sa complexité, est présentée. Ce début de relation permet cependant, par tirage Monte-Carlo, d'obtenir des résultats exploitables. Ceci conclut donc la partie développement et analyse des schémas de détection de cette thèse.

Afin d'enrichir les techniques de détection présentées dans ce manuscrit, et de par l'intérêt qu'ils suscitent actuellement chez les radaristes, on s'est ensuite intéressé à l'application des détecteurs présentés sur des traitements spatio-temporels adaptatifs dits STAP. Le troisième chapitre présente donc la théorie du traitement STAP, qui combine les données spatiales et temporelles fournies par un réseau de capteurs. Après s'être assuré de la validité du modèle persymétrique face aux modèles STAP, on s'est alors intéressé à l'apport de la persymétrie sur ce type de traitement par l'intermédiaire de la méthode dite du rang réduit. Introduite de par le passé, la méthode du rang réduit permet de fortement diminuer le nombre de données secondaires nécessaires à l'estimation de la matrice de covariance. Celui-ci est alors égal au double du rang du clutter. Nous montrons ainsi dans ce chapitre, par une méthode de calcul originale utilisant les projecteurs de matrice, que l'application de la persymétrie à la réduction du rang permet de faire chuter d'un facteur 2 le nombre de données secondaires nécessaire à l'estimation. Il en devient ainsi égal au rang même du clutter. Ce résultat conforte encore l'utilité de la persymétrie lors de l'estimation de la matrice de covariance du bruit.

Enfin, le chapitre 4 présente l'application de tous les résultats théoriques précédents sur des données simulées et opérationnelles. La première partie présente rapidement la pratique de la régulation de fausse alarme. La seconde partie permet de valider les résultats théoriques dans le cas d'un fouillis gaussien. Les résultats théoriques obtenus concernant le PAMF sont comparés à des tirages Monte-Carlo afin d'en vérifier leur adéquation. Les détecteurs classiques de la littérature que sont l'OGD et l'AMF sont ensuite comparés au PAMF, ce qui permet de faire ressortir l'amélioration des performances de ce dernier. Grâce à la mise à disposition par THALES de données opérationnelles provenant d'un radar de surveillance du sol, ces résultats ont également pu être validés en pratique. Après un travail de sélection des données gaussiennes, les résultats simulés ont ainsi pu être validés sur le terrain.

La seconde partie de ce chapitre présente la validation des résultats concernant le GLRT-PFP et donc l'environnement non-gaussien. Dans ce cadre, le comportement théorique du GLRT-PFP obtenu au chapitre 2 a été comparé à des simulations ainsi qu'aux résultats d'autres détecteurs présentés précédemment dans la littérature : le P-ANMF et le RP-ANMF. Les résultats obtenus dans ce cas confortent alors l'idée d'exploitation de la persymétrie pour améliorer les performances. Dans ce cadre également, l'application sur des données de sol THALES a appuyé les résultats des simulations. De plus, grâce au radar transhorizon Nostradamus de l'ONERA, ces résultats ont également été validés sur des données de fouillis de mer, données opérationnelles plus difficiles à obtenir que de simples données de sol.

La partie suivante de ce chapitre s'est focalisée sur l'application de la persymétrie sur des données STAP semi-synthétiques, obtenue par simulation du réseau de capteur à partir d'images SAR THR opérationnelles. Ces données fournissent une base de travail de qualité sur laquelle ont été visualisées non plus

des courbes COR mais bien les résultats de détection. En effet, des cibles étant placées dans ces données au travers de différents scénarios, on a pu comparer les résultats de détection des différents détecteurs et illustrer réellement l'apport en détection des schémas présentés. Dans le cadre du STAP, la littérature présente comme structure de la matrice de covariance non plus une structure persymétrique mais une structure dite de "Toeplitz". Il a donc été intéressant de voir dans quelle mesure cette structure améliorerait encore la détection. Dans cet objectif, on présente dans cette partie du chapitre la comparaison des courbes COR des détecteurs présentés pour chaque environnement avec respectivement l'AMF-toeplitz et le GLRT-toeplitz. Ces deux détecteurs étant basés sur l'AMF et le GLRT-FP mais pour lesquels on optimise la vraisemblance sous contrainte de Toeplitz. Dans ce cadre, la formulation analytique de la matrice de Toeplitz n'étant pas connue, on obtient les courbes par tirages Monte-Carlo. Ceux-ci permettent de visualiser l'amélioration de l'estimation mais aussi une grande sensibilité de la méthode à la matrice réelle du fouillis.

Enfin, la dernière partie de ce chapitre 4 illustre l'apport de la persymétrie à la méthode du rang réduit sur les données STAP. Ici encore la visualisation concrète des résultats de détection permet de conclure sur l'intérêt de la méthode persymétrique.

Perspectives.

La problématique majeure de cette thèse a donc concerné l'estimation de la matrice de covariance structurée par la persymétrie. L'application de cette méthode sur un grand nombre de données a permis d'en montrer l'utilité et l'efficacité. Cependant, cette hypothèse est bien sûr basée sur un modèle particulier de données. Ainsi, la stationnarité du fouillis est un paramètre important, ainsi que la géométrie du capteur ou du réseau de capteur. Concernant les traitements STAP, utilisés en configuration latérale, ils ne posent pas de problème et assurent la validité du modèle. Qu'en est-il cependant des configurations de pointe avant ? La stationnarité du fouillis n'étant plus assurée, la structure de la matrice est-elle conservée ? Le traitement est-il robuste face au dépointage de l'antenne et donc à une inhomogénéité de l'environnement ? Ce sont là des points qu'il pourrait être intéressant d'étudier.

De même dans le cadre des traitements STAP, la technique du Pre/Post Doppler permet de diminuer les temps de traitement et la complexité des calculs. On pourrait alors se poser la question de la validité du modèle sur ces traitements particuliers...

Toujours dans le cadre du STAP, la structure de la matrice de covariance est définie comme Toeplitz-bloc-Toeplitz. Dans ce cadre, qu'en est-il de l'utilisation de la persymétrie ? En effet, cette structure respecte-t-elle le modèle ? Son exploitation va-t-elle apporter un bénéfice ou est-elle trop complexe à mettre en oeuvre, surtout sur des matrices de grande dimension ? En effet, ce dernier point soulève la question importante de l'inversion matricielle. Il ne s'agit plus dans ce cas d'un problème de physique ni de radar mais plutôt de mathématique et d'algorithmique. La question est cependant assez ouverte compte-tenu des applications utilisant l'inversion matricielle, calcul qui reste encore aujourd'hui coûteux en terme de ressource machine et long en terme de temps de calcul.

Enfin, les résultats prometteurs de l'exploitation de la structure de Toeplitz impliquent un besoin de s'intéresser plus finement au code afin de résoudre les problèmes de sensibilité à la corrélation. Viendra ensuite le temps de se poser la question de la pertinence de l'exploitation de la structure de Toeplitz dans les techniques à rang réduit afin de diminuer encore le nombre de données secondaires nécessaires, et donc réduire par la même la complexité et le temps de calcul...

Annexe A

Preuves du chapitre 2.

A.1 Preuve du théorème (2.2.2.1)

Dans ce calcul, afin de déterminer la distribution du PAMF, on utilise la décomposition matricielle de Bartlett [61]. Soit $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^\top$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{R}^\top/2$ une factorisation de \mathbf{R} et \mathbf{Q} une matrice unitaire réelle telle que $\mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{s} = (\mathbf{s}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s})^{1/2} \mathbf{e}_1$. Il est important de noter que cette dernière équation n'est valable que parce que \mathbf{Q} est réel et que \mathbf{s} est également réel. On pose :

$$\widehat{\mathbf{W}} = 2K \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1/2} \widehat{\mathbf{R}}_P \mathbf{R}^{-\top/2} \mathbf{Q}^\top \text{ et } \mathbf{z} = \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{x}.$$

On a déjà vu que $\widehat{\mathbf{W}}$ est distribué selon une loi de Wishart réelle à $2K$ degrés de liberté et de matrice paramètre \mathbf{I}_m , $\mathbf{z} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_m)$. Ceci amène à redéfinir le test statistique Λ_{PAMF} (2.26) égal à :

$$\begin{aligned} \Lambda_{PAMF} &= \frac{|\mathbf{s}^\top \widehat{\mathbf{R}}_P^{-1} \mathbf{x}|^2}{\mathbf{s}^\top \widehat{\mathbf{R}}_P^{-1} \mathbf{s}} \\ &= \frac{|\mathbf{s}^\top \mathbf{R}^{-\top/2} \mathbf{Q}^\top (\mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1/2} \widehat{\mathbf{R}}_P \mathbf{R}^{-\top/2} \mathbf{Q}^\top)^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{x}|^2}{\mathbf{s}^\top \mathbf{R}^{-\top/2} \mathbf{Q}^\top (\mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1/2} \widehat{\mathbf{R}}_P \mathbf{R}^{-\top/2} \mathbf{Q}^\top)^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{s}} \\ &= 2K \frac{|\mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{z}|^2}{\mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{e}_1}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

que l'on réécrit, afin de simplifier le déroulement du calcul, par :

$$\Lambda_{PAMF} = 2K b a, \tag{A.2}$$

avec

$$a = \frac{|\mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{x}|^2}{\mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-2} \mathbf{e}_1}, b = \left(\frac{\mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-2} \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{e}_1} \right).$$

L'objectif est maintenant de montrer que a et b sont indépendants et d'en calculer leur distribution. Pour ce faire, on s'intéresse d'abord à la distribution de a .

On pose \mathbf{v} , vecteur unitaire défini par :

$$\mathbf{v} = \frac{1}{(\mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-2} \mathbf{e}_1)^{1/2}} \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{e}_1,$$

a peut alors également s'exprimer sous la forme de

$$a = |\mathbf{v}^\top \mathbf{x}|^2.$$

On en déduit que la distribution conditionnelle à $\widehat{\mathbf{W}}$ de a , permettant de déterminer $\widehat{\mathbf{W}}$, est un χ^2 à 2 degrés de liberté. On note que cette distribution ne fait pas intervenir $\widehat{\mathbf{W}}$, et que

$$a \sim \frac{1}{2} \chi_2^2 \quad (\text{A.3})$$

est également indépendant de $\widehat{\mathbf{W}}$ et par conséquent de b .

On s'intéresse maintenant à la détermination de la distribution de b , partie dans laquelle on utilise la décomposition de Bartlett. Cette décomposition s'exprime de la manière suivante : $\widehat{\mathbf{W}} = \mathbf{U} \mathbf{U}^\top$ avec $\mathbf{U} = (u_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq m}$ matrice triangulaire supérieure dont les éléments aléatoires sont indépendants et distribués selon

$$u_{i,i}^2 \sim \chi_{2K+i-m}^2 \text{ et } u_{i,j} \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ pour } i < j.$$

Soient $u'_{i,j}$ les éléments de la matrice \mathbf{U}^{-1} , elle-même triangulaire supérieure. En utilisant le fait que $\mathbf{U}^{-1} \mathbf{e}_1 = u'_{1,1} \mathbf{e}_1$, on obtient :

$$\begin{aligned} b &= \frac{\mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-2} \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{e}_1} \\ &= \frac{\mathbf{e}_1^\top \mathbf{U}^{-\top} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U}^{-\top} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1^\top \mathbf{U}^{-\top} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{e}_1} \\ &= \|\mathbf{e}_1^\top \mathbf{U}^{-1}\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^m u_{1,j}'^2 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Ceci nous amène maintenant à nous intéresser à la distribution du carré de la norme des éléments de la première ligne de \mathbf{U}^{-1} . On pose $\mathbf{u}'_{1,k}$, les vecteurs d'ordre k dont les composantes sont les k premiers éléments de la première ligne de \mathbf{U}^{-1} . On pose également $\mathbf{u}_{i,j}$ vecteur d'ordre i composé par les i premiers éléments de la j -ième colonne de \mathbf{U} . La définition de \mathbf{U}^{-1} , i.e. $\mathbf{U}^{-1} \mathbf{U} = \mathbf{I}_m$ permet de déterminer récursivement ses éléments comme suit :

$$u'_{1,1} = u_{1,1}^{-1}$$

et

$$u'_{1,k+1} = \frac{-\mathbf{u}'_{1,k}^\top \mathbf{u}_{k,k+1}}{u_{k+1,k+1}} \text{ pour } 1 \leq k < m.$$

On en déduit que $\mathbf{u}'_{1,k}$ est indépendant de $u_{i,j}$ pour $j > k$. De là nous obtenons :

$$\begin{aligned} u_{1,k+1}'^2 &= \frac{|\mathbf{u}'_{1,k}^\top \mathbf{u}_{k,k+1}|^2}{u_{k+1,k+1}^2} \\ &= \frac{|\mathbf{u}'_{1,k}^\top \mathbf{u}_{k,k+1}|^2 \|\mathbf{u}'_{1,k}\|^2}{\|\mathbf{u}'_{1,k}\|^2 u_{k+1,k+1}^2} \\ &= \alpha_k \frac{\|\mathbf{u}'_{1,k}\|^2}{u_{k+1,k+1}^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

La distribution d' α_k permettant d'obtenir $\mathbf{u}'_{1,k}$ est donc un χ^2 à un degré de liberté noté χ_1^2 . Cette distribution ne fait pas intervenir $\mathbf{u}'_{1,k}$, donc $\alpha_k \sim \chi_1^2$ est ainsi indépendant de $\mathbf{u}'_{1,k}$. On note de plus que α_k est indépendant de $u_{i,j}$ pour i et $j > k$.

On note également qu'à partir de l'équation (A.5), $b = \|\mathbf{u}'_{1,m}\|^2$. Sachant que $\|\mathbf{u}'_{1,m}\|^2 = \|\mathbf{u}'_{1,m-1}\|^2 + u_{1,m}^2$, on a également :

$$b = \|\mathbf{u}'_{m-1}\|^2 \left(1 + \frac{\alpha_{m-1}}{u_{m,m}^2}\right) = \frac{1}{u_{1,1}^2} \prod_{k=2}^m \left(1 + \frac{\alpha_{k-1}}{u_{k,k}^2}\right), \quad (\text{A.6})$$

avec les α_k indépendants entre eux, indépendants des $u_{k,k}^2$ et distribués selon un χ_1^2 .

Sachant que $\left(1 + \frac{\alpha_{k-1}}{u_{k,k}^2}\right)^{-1} \sim \beta_1\left(\frac{2K-m+k}{2}, \frac{1}{2}\right)$, et grâce à [62], nous obtenons :

$$b = \frac{1}{u_{1,1}^2} \frac{1}{\prod_{k=2}^m \beta_1\left(\frac{2K-m+k}{2}, \frac{1}{2}\right)} \sim \frac{1}{\chi_{2K-m+1}^2} \frac{1}{\beta_1\left(\frac{2K-m+2}{2}, \frac{m-1}{2}\right)}, \quad (\text{A.7})$$

avec β_1 variables aléatoires indépendantes et distribuées selon une loi Beta de première espèce.

Au final, nous obtenons, à partir des équations (A.2), (A.3) et (A.7) :

$$\Lambda_{PAMF} \sim K \frac{\chi_2^2}{\chi_{2K-m+1}^2} \frac{1}{\beta_1\left(\frac{2K-m+2}{2}, \frac{m-1}{2}\right)} \quad (\text{A.8})$$

qui peut se réécrire en terme de variables aléatoires F-distribuées comme :

$$\Lambda_{PAMF} \sim K \frac{2}{2K-m+1} F(2, 2K-m+1) \frac{1}{\beta_1\left(\frac{2K-m+2}{2}, \frac{m-1}{2}\right)}. \quad (\text{A.9})$$

Ceci nous donne donc la distribution du PAMF. Nous nous intéressons maintenant au calcul de la relation " $P_{fa}/seuil$ ". Par [7], nous avons :

$$\begin{aligned} P_{fa} &= \mathbb{P}(\Lambda_{PAMF} > \lambda) \\ &= Pr\left(F(2, 2K-m+1) > \frac{2K-m+1}{2} \frac{\lambda}{K} \beta_1\left(\frac{2K-m+2}{2}, \frac{m-1}{2}\right)\right) \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + \frac{\lambda}{K} x}\right)^{\frac{2K-m+1}{2}} f_{\nu 1, \nu 2}(x) dx \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

avec $f_{\nu 1, \nu 2}$, la PDF d'une variable aléatoire distribuée selon une loi beta de première espèce de paramètre $\nu 1 = \frac{2K-m+2}{2}$ et $\nu 2 = \frac{m-1}{2}$. On obtient finalement

$$PFA = \frac{1}{B\left(\frac{2K-m+2}{2}, \frac{m-1}{2}\right)} \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + \frac{\lambda}{K} x}\right)^{\frac{2K-m+1}{2}} x^{\frac{2K-m+2}{2}-1} (1-x)^{\frac{m-1}{2}-1} dx, \quad (\text{A.11})$$

qui peut s'exprimer grâce à la fonction hypergéométrique [7] :

$$P_{fa} = {}_2F_1 \left(\frac{2K - m + 1}{2}, \frac{2K - m + 2}{2}; \frac{2K + 1}{2}; -\frac{\lambda}{K} \right). \quad (\text{A.12})$$

La dérivée négative de la P_{fa} par rapport au seuil de détection λ amène à la PDF de Λ_{PAMF} . En utilisant cette relation et en dérivant la fonction hypergéométrique à l'aide de [7], on obtient la relation (2.29), ce qui conclut cette preuve.

A.2 Preuve du théorème (2.3.2.2)

Par le théorème (2.3.2.1), $\Lambda_{GLRT-PFP}$ a la même distribution que

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{\left| \mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{w} \right|^2}{\left(\mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{e}_1 \right) \left(\mathbf{w}^H \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{w} \right)} \\ &= \frac{\left| \mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-1} (\sqrt{2} \mathbf{w}) \right|^2}{\left(\mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{e}_1 \right) \left(\sqrt{2} \mathbf{w}^H \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \sqrt{2} \mathbf{w} \right)}, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

pour laquelle $(\sqrt{2} \mathbf{w}) = \mathbf{w}_1 + i \mathbf{w}_2$ avec \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 indépendants et distribués selon une loi normale $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. On obtient

$$\Lambda = \frac{\left| \mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{w}_1 \right|^2 + \left| \mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{w}_2 \right|^2}{\left(\mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{e}_1 \right) \left(\mathbf{w}_1^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2^\top \widehat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{w}_2 \right)}.$$

Asymptotiquement, $\widehat{\mathbf{W}}$ est distribué selon une loi de Wishart réelle avec $K' = \frac{m}{m+1} 2K$ degrés de liberté. Les vecteurs \mathbf{w}_1 and \mathbf{w}_2 peuvent être décomposés dans la base orthonormale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{w}_2 &= \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{f}_2 + \beta_3 \mathbf{f}_3. \end{aligned}$$

avec α_1, β_1 et $\beta_2 : \mathcal{N}(0, 1)$, α_2^2 est distribué selon un χ_{m-1}^2 et β_3^2 distribué selon un χ_{m-2}^2 . $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ sont indépendants entre eux et indépendants de \mathbf{f}_2 et de \mathbf{f}_3 , \mathbf{f}_2 et \mathbf{f}_3 déterministes.

Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m)$ la base canonique. En utilisant la rotation \mathbf{G} telle que $\mathbf{G}(\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \mathbf{w}_1 &= \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \\ &= \mathbf{v}_1 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \mathbf{w}_2 &= \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_3 \\ &= \mathbf{v}_2 \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

et Λ peut être réécrit comme suit :

$$\Lambda = \frac{\left| \mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{Z}}^{-1} \mathbf{v}_1 \right|^2 + \left| \mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{Z}}^{-1} \mathbf{v}_2 \right|^2}{\left(\mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{Z}}^{-1} \mathbf{e}_1 \right) \left(\mathbf{v}_1^\top \widehat{\mathbf{Z}}^{-1} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^\top \widehat{\mathbf{Z}}^{-1} \mathbf{v}_2 \right)}, \quad (\text{A.16})$$

pour lequel $\widehat{\mathbf{Z}} = \mathbf{G} \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{G}^\top$.

Quelle que soit \mathbf{G} , $\widehat{\mathbf{Z}}$ est distribué selon une loi de Wishart à K' degrés de liberté et de matrice paramètre \mathbf{I} . On pose $\widehat{\mathbf{Z}} = \mathbf{L}^\top \mathbf{L}$ la décomposition de Bartlett de $\widehat{\mathbf{Z}}$ [61] avec $\mathbf{L} = (l_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq m}$ matrice triangulaire inférieure dont les éléments non-nuls sont des variables aléatoires indépendantes et distribuées selon

$$l_{i,i}^2 \sim \chi_{K'+i-m}^2 \text{ et } l_{i,j} \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ pour } i > j.$$

Soient $l'_{i,j}$ les éléments de la matrice triangulaire inférieure \mathbf{L}^{-1} . Les éléments de \mathbf{L}^{-1} intervenant dans l'équation (A.16) sont :

$$l'_{11} = \frac{1}{l_{11}}, l'_{22} = \frac{1}{l_{22}}, l'_{21} = -\frac{l_{21}}{l_{11} l_{22}}, l'_{33} = \frac{1}{l_{33}}, l'_{32} = -\frac{l_{32}}{l_{22} l_{33}}, l'_{31} = -\frac{1}{l_{11}} \left(\frac{l_{31}}{l_{33}} - \frac{l_{32} l_{21}}{l_{22} l_{33}} \right). \quad (\text{A.17})$$

De cette équation (A.16), on définit donc

$$\alpha = \frac{\left| \mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{Z}}^{-1} \mathbf{v}_1 \right|^2 + \left| \mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{Z}}^{-1} \mathbf{v}_2 \right|^2}{\mathbf{e}_1^\top \widehat{\mathbf{Z}}^{-1} \mathbf{e}_1},$$

qui peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\left| \mathbf{e}_1^\top \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L}^{-\top} \mathbf{G} \mathbf{w}_1 \right|^2 + \left| \mathbf{e}_1^\top \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L}^{-\top} \mathbf{G} \mathbf{w}_2 \right|^2}{\mathbf{e}_1^\top \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L}^{-\top} \mathbf{e}_1}, \\ &= (\alpha_1 l'_{11} + \alpha_2 l'_{21})^2 + (\beta_1 l'_{11} + \beta_2 l'_{21} + \beta_3 l'_{31})^2. \end{aligned}$$

On reformule également

$$\beta = \mathbf{v}_1^\top \widehat{\mathbf{Z}}^{-1} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^\top \widehat{\mathbf{Z}}^{-1} \mathbf{v}_2,$$

sous la forme :

$$\begin{aligned} \beta &= \mathbf{v}_1^\top \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L}^{-\top} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^\top \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L}^{-\top} \mathbf{v}_2, \\ &= \alpha + (l'_{22} \alpha_2)^2 + (l'_{22} \beta_2 + l'_{32} \beta_3)^2 + (l'_{33} \beta_3)^2. \end{aligned}$$

On en déduit que $\Lambda = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{F}{1+F}$ avec :

$$\begin{aligned} F &= \frac{(\alpha_1 l'_{11} + \alpha_2 l'_{21})^2 + (\beta_1 l'_{11} + \beta_2 l'_{21} + \beta_3 l'_{31})^2}{(l'_{22} \alpha_2)^2 + (l'_{22} \beta_2 + l'_{32} \beta_3)^2 + (l'_{33} \beta_3)^2} \\ &= \frac{(\alpha_1 l_{22} - \alpha_2 l_{21})^2 + \left(\beta_1 l_{22} - \beta_2 l_{21} - \beta_3 \frac{l_{31}}{l_{33}} l_{22} + \frac{l_{32} l_{21}}{l_{33}} \beta_3 \right)^2}{(l_{11} \alpha_2)^2 + \left(\frac{l_{11} l_{22}}{l_{33}} \beta_3 \right)^2 + l_{11}^2 \left(\beta_2 - \frac{\beta_3}{l_{33}} l_{32} \right)^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

dans laquelle

$$\begin{aligned} \left(\beta_1 l_{22} - \beta_2 l_{21} - \beta_3 \frac{l_{31}}{l_{33}} l_{32} + \frac{l_{32} l_{21}}{l_{33}} \beta_3 \right)^2 &= \left(l_{22} \left(\beta_1 - \frac{\beta_3}{l_{33}} l_{31} \right) - l_{21} \left(\beta_2 - \frac{\beta_3}{l_{33}} l_{32} \right) \right)^2 \\ &= \left(1 + \left(\frac{\beta_3}{l_{33}} \right)^2 \right) (l_{22} a - l_{21} b)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

avec $a = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta_3}{l_{33}}\right)^2}} \left(\beta_1 - \frac{\beta_3}{l_{33}} l_{31} \right)$ et $b = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta_3}{l_{33}}\right)^2}} \left(\beta_2 - \frac{\beta_3}{l_{33}} l_{32} \right)$. Conditionnellement

à β_3 et l_{33} , a et b sont indépendants et $\mathcal{N}(0, 1)$ -distribués. Etant donné que leur distribution ne fait pas intervenir β_3 et l_{33} , a et b sont indépendants de ceux-ci.

En remplaçant ces derniers dans l'équation (A.18), on obtient au final l'équation suivante :

$$F = \frac{(\alpha_1 l_{22} - \alpha_2 l_{21})^2 + \left(1 + \left(\frac{\beta_3}{l_{33}}\right)^2\right) (a l_{22} - b l_{21})^2}{(\alpha_2 l_{11})^2 + \left(l_{11} l_{22} \frac{\beta_3}{l_{33}}\right)^2 + l_{11}^2 \left(1 + \left(\frac{\beta_3}{l_{33}}\right)^2\right) b^2} \quad (\text{A.20})$$

dans laquelle toutes les variables aléatoires sont indépendantes et distribuées comme suit :

$$a, b, \alpha_1, l_{21} \sim \mathcal{N}(0, 1), \alpha_2^2 \sim \chi_{m-1}^2, \beta_3^2 \sim \chi_{m-2}^2, l_{11}^2 \sim \chi_{K'-m+1}^2, l_{22}^2 \sim \chi_{K'-m+2}^2, l_{33}^2 \sim \chi_{K'-m+3}^2,$$

avec $K' = \frac{m}{m+1} 2K$.

Ceci conclut donc la preuve.

Annexe B

Généralités.

Cette annexe rappelle les densités des principales distributions évoquées dans ce manuscrit.

B.1 Loi Gaussienne ou normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ réelle

Une v.a. x , de moyenne m et de variance σ^2 suit une loi Gaussienne (ou normale) $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ quand sa densité de probabilité s'écrit, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (\text{B.1})$$

B.2 Densité de probabilité du vecteur Gaussien $\mathcal{N}(\mathbf{m}, \mathbf{D})$

Soit \mathbf{D} une matrice $d \times d$ inversible, symétrique positive, avec $\det(\mathbf{D}) \neq 0$. Soit $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^d$. La loi du vecteur Gaussien de moyenne \mathbf{m} et de matrice de dispersion \mathbf{D} est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d , avec pour densité ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$) :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det(\mathbf{D})}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{m})^H \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{x}-\mathbf{m})}{2}\right). \quad (\text{B.2})$$

B.3 K-distribution

La K-distribution, loi à deux paramètres b et ν , est définie sur \mathbb{R}_+ et doit son nom à la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce, $K_\nu(x)$.

$$p(x) = \frac{b^{\nu+1}}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)} x^\nu K_{\nu-1}(bx) \quad (\text{B.3})$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma donnée $\forall z > 0$ par : $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$.

B.4 Loi du χ^2 centré

La loi du χ^2 centrée est une loi à un paramètre ν ($\in \mathbb{N} - \{0\}$, noté \mathbb{N}^*) déterminant le nombre de degrés de liberté de la loi.

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi χ^2_ν (loi du χ^2 à ν degrés de liberté), si $\forall x > 0$, sa densité est donnée par :

$$p(x) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\frac{\nu}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right).$$

La loi du χ^2_ν coïncide avec la loi Gamma de paramètres $\nu/2$ et 2, soit $\mathcal{G}\left(\frac{\nu}{2}, 2\right)$.

B.5 Loi du χ^2 décentré

La loi du χ^2 décentrée est une loi à deux paramètres, ν le nombre de degré de liberté et δ le paramètre de décentralité, noté $\chi^2_{\nu, \delta}$.

Cette loi est la loi de $x = \sum_{k=1}^{\nu} x_k^2$, où $x_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, 1)$ et ainsi le paramètre δ est défini d'après les moyennes μ_k comme $\delta = \sum_{k=1}^{\nu} \mu_k^2$. La densité de probabilité correspondante est définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$p(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{\nu-2}{4}} \exp\left(\frac{x+\lambda}{2}\right) I_{\nu/2-1}(\sqrt{\lambda x}), \quad (\text{B.4})$$

où $I_a(u)$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre a , définie soit sous forme intégrale soit sous forme de série [7].

B.6 Loi Beta de première et de seconde espèce

Les densités de variables de loi $\beta_{a,b}^1$ et $\beta_{a,b}^2$ sont définies dans [7] par les densités de probabilités suivantes :

$$\beta_{a,b}^1(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x),$$

et

$$\beta_{a,b}^2(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}, \quad x > 0$$

où $\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ est la fonction indicatrice de x sur l'intervalle $[0, 1]$.

B.7 Loi de Wishart

$\mathbf{A} \sim \mathcal{W}(N, m; \mathbf{M})$ si sa densité est :

$$f(\mathbf{A}) = \frac{\det(\mathbf{A})^{N-m}}{J(\mathbf{M})} \exp(-\text{Tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}))$$

où $J(\mathbf{M})$ s'écrit de la manière suivante :

$$J(\mathbf{M}) = \pi^{\frac{1}{2}m(m-1)} \Gamma(N) \Gamma(N-1) \dots \Gamma(N-m+1) \det(\mathbf{M})^N.$$

B.8 Loi de Fisher F centrée

La loi de Fisher, ou loi F centrée est la loi de

$$x = \frac{x_1/\nu_1}{x_2/\nu_2} \quad (\text{B.5})$$

où $x_1 \sim \chi_{\nu_1}^2$ et $x_2 = \chi_{\nu_2}^2$ sont indépendantes. La densité de probabilité résultante, notée F_{ν_1, ν_2} est définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$\frac{\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} x^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{B\left(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right) \left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}, \quad (\text{B.6})$$

où $B(a,b)$ est la fonction Beta, reliée à la fonction Gamma par :

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad (\text{B.7})$$

B.9 Loi de Fisher F' décentrée

La loi de Fisher décentrée est la loi de

$$x = \frac{x_1/\nu_1}{x_2/\nu_2} \quad (\text{B.8})$$

où $x_1 \sim \chi_{\nu_1, \delta}^2$ et $x_2 = \chi_{\nu_2, \delta}^2$ sont indépendantes. La densité de probabilité résultante, notée $F'_{\nu_1, \nu_2, \delta}$ est définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$F'_{\nu_1, \nu_2, \delta} = \exp\left(-\frac{\delta}{2}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^k}{k!} \frac{\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}+k}}{B\left(\frac{\nu_1+2k}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right)} \frac{x^{\frac{\nu_1}{2}+k+1}}{\left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}-k}}. \quad (\text{B.9})$$

Lorsque $\delta = 0$, la loi F' décentrée est réduite à la loi F centrée.

B.10 Théorème Central Limite

Soient X_1, \dots, X_n une suite de n variables aléatoires. i.i.d. réelles. On suppose que $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ et soit $m = \mathbb{E}(X)$, $\sigma^2 = \text{Var}(X)$, alors :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - m) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{dist.}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

B.11 Consistance et Biais d'un estimateur

Un estimateur $\widehat{\mathbf{M}}$ de \mathbf{M} est dit consistant s'il converge en probabilité vers \mathbf{M} quand N tend vers l'infini :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(\|\widehat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}\| \geq \varepsilon) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0, \quad (\text{B.10})$$

où N est le nombre de données secondaires \mathbf{c}_i utilisées pour estimer \mathbf{M} et $\|\cdot\|$ désigne une norme matricielle quelconque.

Le biais $B(\widehat{\mathbf{M}})$ d'un estimateur $\widehat{\mathbf{M}}$ de \mathbf{M} est défini par :

$$B(\widehat{\mathbf{M}}) = \mathbb{E} \left[\widehat{\mathbf{M}} \right] - \mathbf{M}. \quad (\text{B.11})$$

Lorsque $B(\widehat{\mathbf{M}}) = 0$, l'estimateur $\widehat{\mathbf{M}}$ est appelé estimateur sans biais ou non biaisé de \mathbf{M} .

Annexe C

Quelques notes d'études sur l'estimateur du point fixe réel.

Cette annexe présente quelques notes d'études sur la matrice du point fixe réelle et propose quelques remarques préalables sur les matrices de Wishart.

C.1 Vec pour des matrices symétriques

Définition C.1.0.1

Soit \mathbf{A} une matrice $m \times m$ réelle symétrique. $\text{vecs}\mathbf{A} = \mathbf{a}$ est le vecteur d'ordre $\frac{m(m+1)}{2}$ formé par les éléments de \mathbf{A} pris dans l'ordre suivant :

- d'abord la diagonale (\searrow).
- puis $\sqrt{2} \times$ éléments du triangle inférieur ∇ .

Propriétés :

- linéarité.
- $\text{tr}(\mathbf{AB}) = (\text{vecs}\mathbf{A})^\top (\text{vecs}\mathbf{B})$ pour tout \mathbf{A} et \mathbf{B} symétriques.

Remarque C.1.0.1

$\text{vec}\mathbf{A}$ contient les éléments de \mathbf{A} pris dans l'ordre (\searrow) + (∇) + (\triangle).

C.2 Matrice de Wishart réelle normalisée

Définition C.2.0.2

Soit $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$, K vecteurs Gaussiens réels indépendants centrés, de covariances \mathbf{R} . Alors $\mathbf{W} = \sum_k \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^\top$

suit une loi de Wishart à K degrés de liberté.

$\mathbf{Z} = \frac{m}{\text{Tr}(\mathbf{R}^{-1})} \mathbf{W}$ suit une loi de Wishart normalisée à K degrés de liberté.

On suppose par la suite $\mathbf{R} = \mathbf{I}$.

$$\mathbf{Z} = \frac{m}{\text{tr}(\mathbf{W})} \mathbf{W} = \frac{m}{\sum \|\mathbf{x}_k\|^2} \sum_k \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^\top \quad (\text{C.1})$$

et $\mathbf{x}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$

Remarque C.2.0.2

Remarque préliminaire : Posons $y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ de sorte que $\text{Tr}(\mathbf{W}) = \sum_k \|\mathbf{x}_k\|^2 = \|y\|^2 \sim \chi^2(Km)$.

On sait que $\frac{1}{\|y\|}y$ et $\|y\|$ sont indépendants, c'est à dire que $\{\frac{1}{\|y\|}\mathbf{x}_1, \dots, \frac{1}{\|y\|}\mathbf{x}_k\}$ sont indépendants de $\|y\|$.

Par conséquent :

$$\mathbf{Z} = m \sum_k \left(\frac{\mathbf{x}_k}{\|y\|} \right) \left(\frac{\mathbf{x}_k}{\|y\|} \right)^\top \text{ et } \|y\| \text{ sont indépendants} \quad (\text{C.2})$$

Cette remarque associée à la définition (C.1) de \mathbf{Z} réécrite

$$\|y\| \mathbf{Z} = m \mathbf{W} \quad (\text{C.3})$$

avec $\|y\|^2 \sim \chi^2(Km)$ permet de calculer très facilement les moments d'ordre 1 et 2 de \mathbf{Z} .

C.3 Moment d'ordre 1 du rapport suivant une loi de Wishart

Compte tenu de (C.2), l'espérance de (C.3) donne : $E(\|y\|^2) E(\mathbf{Z}) = m E(\mathbf{W})$ d'où $Km E(\mathbf{Z}) = m K\mathbf{I}$ et donc

$$E(\mathbf{Z}) = \mathbf{I}$$

C.4 Moment d'ordre 2 du rapport

Compte tenu de (C.2) et (C.3) on a : $E(\|y\|^4) E(\mathbf{Z}(i, j) \mathbf{Z}(m, n)) = m^2 E(\mathbf{W}(i, j) \mathbf{W}(m, n))$ avec

$$\begin{aligned} E(\|y\|^4) &= E(\chi^4(Km)) \\ &= 2Km + (Km)^2 \\ &= Km(Km + 2) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

et

$$\begin{aligned} E(\mathbf{W}(i, j) \mathbf{W}(m, n)) &= K\delta(i, m) \delta(j, n) \\ &+ K\delta(i, n) \delta(j, m) \\ &+ K\delta(i, j) \delta(m, n) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Donc

$$E(\mathbf{Z}(i, j) \mathbf{Z}(m, n)) = \frac{m}{Km + 2} [\delta(i, m) \delta(j, n) + \delta(i, n) \delta(j, m) + K\delta(i, j) \delta(m, n)]. \quad (\text{C.6})$$

C.5 Covariance des éléments du rapport

On pose : $\mathbf{Z}_c(i, j) = \mathbf{Z}(i, j) - E(\mathbf{Z}(i, j))$

$$\text{On a } E(\mathbf{Z}_c(i, j) \mathbf{Z}_c(m, n)) = \frac{m}{Km + 2} \left[\delta(i, m) \delta(j, n) + \delta(i, n) \delta(j, m) - \frac{2}{m} \delta(i, j) \delta(m, n) \right]$$

C.6 Moments d'ordre 1 et 2 en vec et vecs.

$$E(\text{vec } \mathbf{Z}) = \text{vec } \mathbf{I} = (1 \dots 1 0 \dots 0)^\top$$

$$E(\text{vec } \mathbf{Z} \text{ vec } \mathbf{Z}^\top) = \frac{m}{Km+2} \left(\mathbf{I}_{m^2} + \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} + K \text{vec } \mathbf{I} (\text{vec } \mathbf{I})^\top \right)$$

$$\text{cov}(\text{vec } \mathbf{Z}) = \frac{m}{Km+2} \left(\mathbf{I}_{m^2} + \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} - \frac{2}{m} \text{vec } \mathbf{I} (\text{vec } \mathbf{I})^\top \right).$$

Sachant que $\text{vecs } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{2} \mathbf{I}_{\frac{m(m-1)}{2}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{vec } \mathbf{A}$, on a :

$$E(\text{vecs } \mathbf{Z}) = \text{vecs } \mathbf{I} = (1 \dots 1 0 \dots 0)^\top \doteq \mathbf{i}$$

$$E(\text{vecs } \mathbf{Z} \text{ vecs } \mathbf{Z}^\top) = \frac{m}{Km+2} (2\mathbf{I} + K(\text{vecs } \mathbf{I})(\text{vecs } \mathbf{I})^\top)$$

$$\text{cov}(\text{vecs } \mathbf{Z}) = \frac{2m}{Km+2} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{m} (\text{vecs } \mathbf{I})(\text{vecs } \mathbf{I})^\top \right)$$

Ce dernier terme est un projecteur.

Remarque C.6.0.3

pour K grand, $\text{cov}(\text{vecs } \mathbf{Z}) \approx \frac{2}{K} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{m} \mathbf{i} \mathbf{i}^\top \right)$

C.7 Loi asymptotique de \mathbf{Z}

Posons $\frac{1}{K} \mathbf{W} = \tilde{\mathbf{W}}$. On a $\mathbf{Z} = \frac{m}{\text{tr } \tilde{\mathbf{W}}} \tilde{\mathbf{W}}$ et $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{I} + \Delta$. On sait que : $\tilde{\mathbf{W}} \xrightarrow{P} \mathbf{I}$, $E(\tilde{\mathbf{W}}) = \mathbf{I}$, $\text{cov}(\text{vecs } \tilde{\mathbf{W}}) = \frac{2}{K} \mathbf{I}$ et $K \rightarrow \infty$.

$\sqrt{K}(\text{vecs}(\tilde{\mathbf{W}}) - \text{vecs}(\mathbf{I})) = \sqrt{K} \text{vecs}(\Delta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, 2\mathbf{I})$.
Étudions la loi asymptotique de \mathbf{Z} par une analyse de perturbation.

On a $\mathbf{Z} = \frac{m}{\text{tr}(\mathbf{I} + \Delta)} (\mathbf{I} + \Delta) \approx \mathbf{I} + \Delta - \frac{1}{m} (\text{tr } \Delta) \mathbf{I}$ d'où

$$\begin{aligned} (\text{vecs } \mathbf{Z} - \text{vecs } \mathbf{I}) &\approx \text{vecs } \Delta - \frac{1}{m} (\text{vecs } \mathbf{I})^\top (\text{vecs } \Delta) \mathbf{I} \\ &\approx \left(\mathbf{I} - \frac{1}{m} \text{vecs } \mathbf{I} (\text{vecs } \mathbf{I})^\top \right) \text{vecs } \Delta \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Donc : $\boxed{\sqrt{K}(\text{vecs } \mathbf{Z} - \text{vecs } \mathbf{I}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, 2(\mathbf{I} - \frac{1}{m} \mathbf{i} \mathbf{i}^\top))}$ avec $\text{vecs } \mathbf{I} = \mathbf{i}$.

C.8 Etude du point fixe réel

On cherche la loi asymptotique en K de la solution $\hat{\mathbf{R}}$ à :

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{m}{K} \sum_{k=1}^K \frac{\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^\top + \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^\top}{\mathbf{x}_k^\top \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k^\top \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{y}_k} \quad (\text{C.8})$$

On suppose les $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k$ iid $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, $\text{Tr} \widehat{\mathbf{R}} = m$, l'unicité de $\widehat{\mathbf{R}}$. On montre facilement que $E(\widehat{\mathbf{R}}) = \mathbf{I}$. Supposons par ailleurs que $\widehat{\mathbf{R}}$ est consistant de sorte que $\widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{I} + \Delta \mathbf{R}$ avec $\Delta \mathbf{R}$ petit pour K grand. La normalisation donne : $\text{Tr} \Delta \mathbf{R} = 0$.

Faisons une analyse de perturbation :

$$\mathbf{x}^\top \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{x} \approx \mathbf{x}^\top (\mathbf{I} - \Delta \mathbf{R}) \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 - \mathbf{x}^\top \Delta \mathbf{R} \mathbf{x}, \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_k^\top \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k^\top \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{y}_k)^{-1} &\approx (\|\mathbf{x}_k\|^2 + \|\mathbf{y}_k\|^2 - \mathbf{x}_k^\top \Delta \mathbf{R} \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k^\top \Delta \mathbf{R} \mathbf{y}_k)^{-1} \\ &\approx (\|\mathbf{x}_k\|^2 + \|\mathbf{y}_k\|^2)^{-1} \left(1 + \frac{\mathbf{x}_k^\top \Delta \mathbf{R} \mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k^\top \Delta \mathbf{R} \mathbf{y}_k}{\|\mathbf{x}_k\|^2 + \|\mathbf{y}_k\|^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

On pose $\mathbf{Z}_k = \frac{\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^\top + \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^\top}{\|\mathbf{x}_k\|^2 + \|\mathbf{y}_k\|^2}$, de sorte que $m \mathbf{Z}_k$ suit une loi de Wishart normalisée à 2 degrés de liberté.

Compte-tenu de (C.9), (C.8) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{I} + \Delta \mathbf{R} &= \frac{m}{K} \sum_k \mathbf{Z}_k (1 + \text{Tr}(\mathbf{Z}_k \Delta \mathbf{R})) \\ &= \frac{m}{K} \sum_k \mathbf{Z}_k + \text{Tr}(\Delta \mathbf{R} \mathbf{Z}_k) \mathbf{Z}_k \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

On pose alors $\mathbf{i} = \text{vecs}(\mathbf{I})$, $\Delta \mathbf{r} = \text{vecs}(\Delta \mathbf{R})$, $\mathbf{z}_k = \text{vecs}(\mathbf{Z}_k)$.

(C.10) s'écrit alors : $\mathbf{i} + \Delta \mathbf{r} = \frac{m}{K} \sum_k \mathbf{z}_k + \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^\top \Delta \mathbf{r}$ i.e.

$$\left(\mathbf{I} - \frac{m}{K} \sum_k \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^\top \right) \Delta \mathbf{r} = \frac{m}{K} \sum_k \mathbf{z}_k - \mathbf{i} \quad (\text{C.11})$$

Or, $m \mathbf{z}_k$ est Wishart normalisée à 2 degrés de liberté.

Donc $\frac{m}{K} \sum_k \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^\top = \frac{1}{m} \frac{1}{K} \sum_k (m \mathbf{z}_k)(m \mathbf{z}_k)^\top \xrightarrow{P} \frac{1}{m+1} (\mathbf{I} + \mathbf{i} \mathbf{i}^\top)$

Donc (C.11) donne en tenant compte de $\mathbf{i}^\top \Delta \mathbf{r} = 0$:

$$\frac{m}{m+1} \Delta \mathbf{r} = \frac{m}{K} \sum_k \mathbf{z}_k - \mathbf{1} \quad (\text{C.12})$$

Sachant que $m \mathbf{z}_k$ est Wishart normalisée à 2 degrés de liberté, le théorème central limite donne pour K grand : $\frac{m}{K} \sum_k \mathbf{z}_k - \mathbf{i} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \frac{1}{K} \frac{m}{m+1} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{m} \mathbf{i} \mathbf{i}^\top\right)\right)$ donc, toujours pour K grand,

$\Delta \mathbf{r} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \frac{1}{K} \frac{m}{m+1} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{m} \mathbf{i} \mathbf{i}^\top\right)\right)$. De plus, pour une matrice de Wishart normalisée à $2K$ degrés de liberté, la covariance de son vecs vaut $\frac{1}{K} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{m} \mathbf{i} \mathbf{i}^\top\right)$.

Annexe D

Le signal Radar

D.1 Distance et Vitesse en radar

Pour un radar classique, le signal émis s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} s_e(t) &= A(t)e^{j(2\pi f_0 t + \phi(t))} \\ &= A(t)e^{j\phi(t)} e^{j2\pi f_0 t} \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

pour lequel $A(t)$ est la modulation d'amplitude, $e^{j\phi(t)}$ est la modulation de phase ou de fréquence et f_0 est la fréquence porteuse du signal.

Pour une cible **immobile** à distance D_0 du radar, le retard du signal s'écrit $\tau_0 = \frac{2D_0}{c}$ avec c , vitesse de la lumière dans le vide. Avec une atténuation α due au bilan de liaison (pertes d'énergie) du radar, on peut donc réécrire dans ce cas le signal reçu :

$$\begin{aligned} s_r(t) &= \alpha s_e(t - \tau_0) \\ &= \alpha u(t - \tau_0) e^{j2\pi f_0 (t - \tau_0)}. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

La mesure du retard τ_0 fournit donc la mesure de la distance D_0 de la cible.

Dans le cas d'une cible **mobile** à une distance $D(t)$, cette distance s'exprime en fonction de la vitesse v de la cible par :

$$D(t) = D_0 + vt. \quad (\text{D.3})$$

Si l'on considère $\tau(t)$ la durée aller-retour du signal reçu par le radar à l'instant t , le signal émis par le radar est réfléchi à l'instant $t - \frac{\tau(t)}{2}$. La distance $D(t)$ doit donc vérifier $c\tau(t) = 2D(t - \frac{\tau(t)}{2})$, d'où $\tau(t) = \frac{2(D_0 + vt)}{c+v}$. On peut alors réécrire le signal reçu sous la forme :

$$\begin{aligned} s_r(t) &= \alpha s_e\left(\frac{c-v}{c+v}t - \tau_0\right) \\ &= \alpha u\left(\frac{c-v}{c+v}t - \tau_0\right) e^{-j2\pi f_0 t} e^{j2\pi \frac{2v}{c+v} f_0 t} e^{-j2\pi f_0 \tau_0}. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Sous l'hypothèse classique de $v \ll c$, la contraction / dilatation $\frac{c-v}{c+v}$ de l'échelle des temps est négligée. On définit également la fréquence Doppler $f_{d0} = \frac{2v f_0}{c}$ et la phase du signal (constante) $\phi = -2\pi f_0 \tau_0$. Dans le cas d'une cible mobile, le signal reçu s'exprime donc par :

$$s_r(t) = \alpha u(t - \tau_0) e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f_{d0} t} e^{j\phi}. \quad (\text{D.5})$$

Dans ce cadre, la mesure de la fréquence Doppler permet de déterminer la vitesse de la cible.

D.2 Fonction d'ambiguïté

Comme nous l'avons vu dans ce document, le but d'un radar est de détecter une cible, donc un signal, noyé dans du bruit de caractéristique spectrale connue selon un critère de rapport signal à bruit maximum. Soit un filtre linéaire $h(t)$ et un signal $y(t) = x(t) + b(t)$, avec $b(t)$ bruit stationnaire de covariance C_b indépendant de x . le signal à la sortie du filtre s'exprime par

$$\begin{aligned} y(t) &= y_x(t) + y_b(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)h(u)du + \int_{-\infty}^{+\infty} b(t-u)h(u)du. \end{aligned} \quad (D.6)$$

Dans ce cadre, le SNR à l'instant t est exprimé par : $\rho(t) = \frac{|y_x(t)|^2}{E[|y_b(t)|^2]}$ avec la covariance du bruit $E[b(t-u)b^*(t-v)] = C_b(u-v)$.

Le filtre optimal h_{opt} est donc le filtre qui tend à maximiser le rapport signal à bruit. Il est défini par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C_b(u-v) h_{opt}(u) du = \frac{x^*(t-v)}{\rho_{max}(t)}. \quad (D.7)$$

Le filtre dit adapté est un cas particulier du filtre optimal pour un bruit blanc dont la covariance vaut $C_b(u) = \sigma^2\delta(u)$. Dans ce cas, l'expression du filtre adapté est réduite à :

$$h_{opt}(t) = Kx^*(t_0 - t) \quad (D.8)$$

avec K constante arbitraire. Le filtre adapté se comporte comme un corrélateur vis à vis du signal à détecter.

La définition de ce filtre adapté permet donc une application au signal radar. Le filtre adapté au signal reçu (D.5) s'écrit :

$$h_{adap}(t) = \int_0^T s_r(t) u^*(t-\tau) e^{j2\pi(f_0+f_d)t} dt \quad (D.9)$$

et le signal de sortie du filtre s'exprime donc :

$$s'(t) = \alpha e^{-j\phi} \int_0^T u(t-\tau_0) u^*(t-\tau) e^{-j2\pi(f_d-f_{d0})t} dt. \quad (D.10)$$

En posant $\Delta\tau = \tau - \tau_0$ et $\Delta f_{dop} = f_d - f_{d0}$ les écarts entre les valeurs réelles et les valeurs de la réplique, on obtient $s'(t) \simeq s(\Delta\tau, \Delta f_{dop})$ qui s'exprime par :

$$s(\Delta\tau, \Delta f_{dop}) = \frac{\int_0^T u(t) u^*(t-\Delta\tau) e^{-j2\pi\Delta f_{dop}t} dt}{\int_0^T |u^2(t)| dt}. \quad (D.11)$$

Il s'agit là de la **Fonction d'Ambiguïté** du radar.

Cette fonction peut être maximale et égale à 1 en $(0,0)$, il s'agit alors de son lobe principal. Si elle est maximale et égale à 1 en d'autres points, il s'agit alors d'ambiguïtés. Un niveau élevé hors ambiguïté et lobe principal indique des lobes secondaires. Les coupes à $-3dB$ de cette fonction d'ambiguïté font apparaître les pouvoirs de résolution (capacité à séparer 2 cibles) en distance et en vitesse radiale. Résolution distance $R = \frac{c}{2B}$. Résolution vitesse radiale $V = \frac{\lambda}{2T}$ avec B la bande du signal émis et T la durée totale du signal. Une bonne résolution distance et vitesse impose donc d'avoir un code dit "à grand BT", de plus un grand taux de compression permet d'augmenter le gain en puissance après filtrage.

Le traitement radar consiste donc à corrélérer le signal reçu avec des répliques adaptées à la fréquence Doppler f_d et au retard τ :

$$R(\tau, f_d) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_r(t) s_e^*(t - \tau) e^{-j2\pi f_d t} dt. \quad (\text{D.12})$$

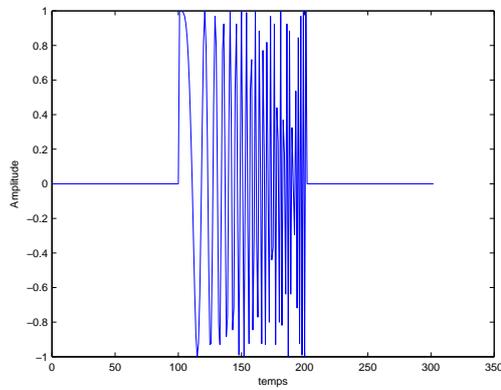
Cette fonction est la fonction d'inter-ambiguïté du radar.

D.3 Application au Chirp linéaire

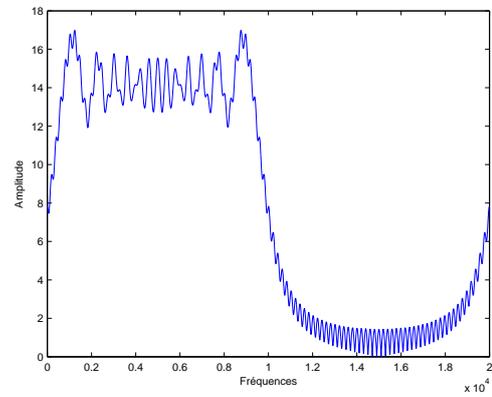
Si l'on recherche une détection lointaine et une haute résolution, il faut transmettre des pulses étroits à forte puissance crête. Des limitations technologiques rendent ce processus délicat. Il est donc nécessaire d'émettre des pulses longs à plus faible puissance crête que l'on va comprimer en fréquence. C'est la compression d'impulsion. L'un des exemples les plus classiques de signaux utilisés lors de la compression d'impulsion est le signal modulé linéairement en fréquence encore appelé "Chirp" (gazouillis en anglais). Ce signal est exprimé ainsi :

$$s_e(t) = \mathcal{R}e \left(e^{j\pi \frac{B}{T} t^2} \right) \quad (\text{D.13})$$

Ce signal décrit donc la bande B pendant la durée d'émission T . Le rapport $\frac{B}{T}$ est appelé pente de modulation du code et son produit de compression vaut BT . La figure (D.1) présente une impulsion de code chirp dans le domaine temporel et sa transformée de fourier. On voit clairement ici la modulation de fréquence et la bande du code. La figure (D.2) présente la rampe linéaire correspondant à la modulation de la fréquence ainsi que la fonction d'ambiguïté en 3 dimensions du signal correspondant. Cette fonction d'ambiguïté est reprise figure (D.3).

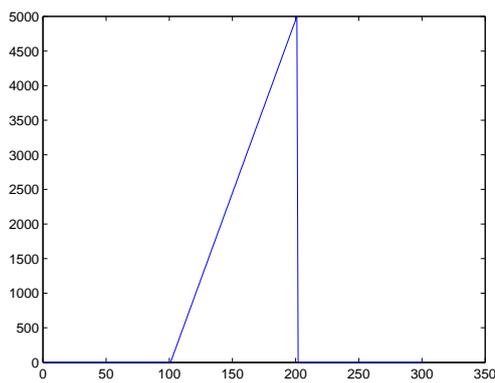


(a) Visualisation temporelle d'un chirp linéaire

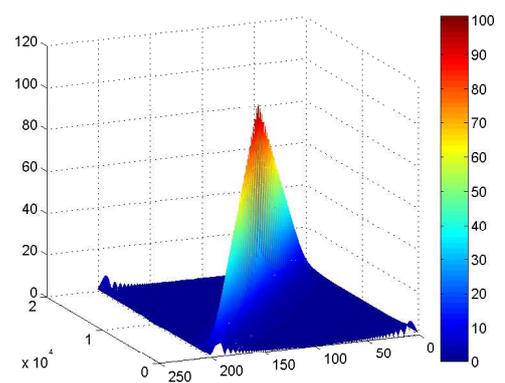


(b) Spectre de Fourier du chirp linéaire

FIG. D.1 – Visualisation d'un exemple de Chirp linéaire avec $B = 50.10^2$ Hz et $T = 1.10^{-2}$ s.



(a) Rampe de fréquence de la modulation du chirp



(b) Vue en 3d de la fonction d'ambiguïté du Chirp

FIG. D.2 – Caractéristiques du Chirp linéaire.

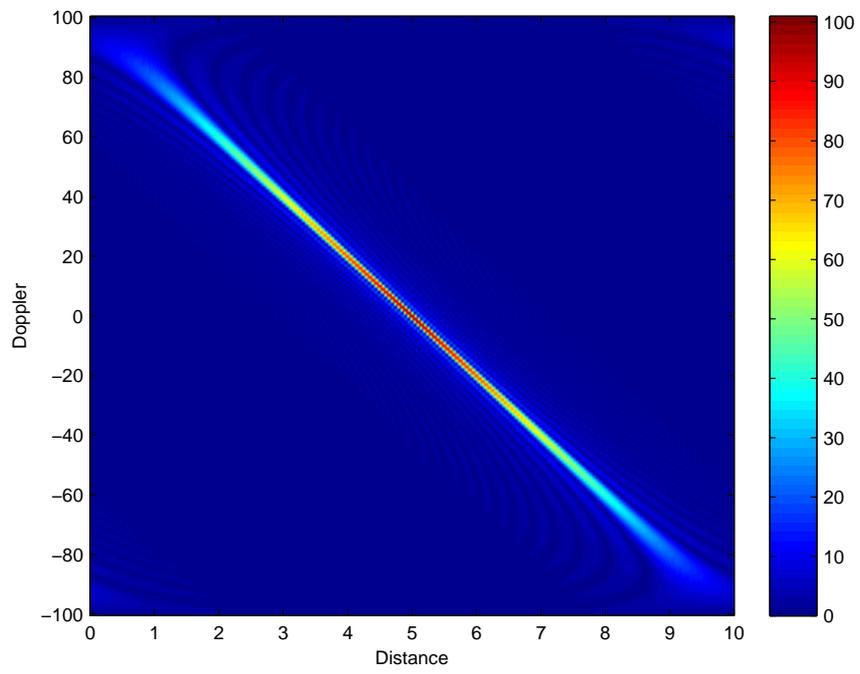


FIG. D.3 – Fonction d’ambiguïté du chirp.

Publications

Revues à comité de lecture

- G. Pailloux, J.P. Ovarlez, F. Pascal et P. Forster, "*Persymmetric Adaptive Radar Detectors*", IEEE Proc. on AES, accepté pour publication.

Conférences avec actes et à comité de lecture

- G.Pailloux, P.Forster, J.P.Ovarlez et F.Pascal, "*On Persymmetric Covariance Matrices in Adaptive Detection*", IEEE-ICASSP 2008, 31/03 - 04/04, Las Vegas, USA.
- G.Pailloux, J.P.Ovarlez, F.Pascal et P.Forster, "*A SIRV-CFAR Adaptive Detector Exploiting Persymmetric Clutter Covariance Structure*", IEEE-RadarCon 2008, 26/05 - 30/05, Rome, Italie.
- G.Pailloux, F.Pascal, J.P.Ovarlez et P.Forster, "*Comparaison of Various Detection Schemes For STAP Radar Based on Experimental Data*", IEEE-Radar 2009, 12/10 - 16/10, Bordeaux, France.

Séminaires

- "*Estimation d'une Matrice de Covariance de Fouillis*", Séminaire SATIE, ENS-Cachan, Avril 2007.
- "*Estimation Optimisée de Matrices de Covariance*", Journée des thèses Thales - ONERA, Palaiseau, Septembre 2007.
- "*STAP et Imagerie de Cibles Mobiles*", Journée des doctorants ONERA, Chatillon, Janvier 2008 et Janvier 2009.
- "*Exploitation de la Persymétrie sur des Données STAP*", Club-STAP, Palaiseau, Septembre 2008.
- "*On Persymmetric Matrices in Adaptive Detection*", Journée ONERA/SONDRA/SINGAPOUR, Palaiseau, Juin 2009.

Bibliographie

- [1] J.B. Billingsley, "Ground Clutter Measurement for Surface Sited Radar," *MIT Technical report 780*, February 1993.
- [2] K. Yao, "A Representation Theorem and its Applications to Spherically Invariant Random Processes," *IEEE Trans. on IT*, vol. 19, pp. 600–608, September 1973.
- [3] E. Conte and M. Longo, "Characterization of Radar Clutter as a Spherically Invariant Random Process," *IEE Trans. on Pt.F*, vol. 134, no. 2, 1987.
- [4] A. Farina, A. Russo, F. Scannapieco, and S. Barbarossa, "Theory of Radar Detection in Coherent Weibull Clutter," *IEE Communication, Radar and Signal Processing, Pt-F*, vol. 134, no. 2, 1987.
- [5] S.M. Kay, "Fundamentals of statistical signal processing - Detection theory - Vol.2," *Prentice Hall PTR.*, 1998.
- [6] L.L. Scharf and B. Friedlander, "Matched Subspace Detector," *IEEE Trans on SP.*, vol. 42, pp. 2146–2157, August 1994.
- [7] M. Abramovitch and I.A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions," *National Bureau of standard*, vol. AMS 55, June 1964.
- [8] E.J. Kelly, "An Adaptive Detection Algorithm," *IEEE Trans. on AES*, vol. 22, pp. 115–127, March 1986.
- [9] A.K. Gupta and D.K. Nagar, "Matrix Variate Distributions," *Chapman & Hall/CRC*, 2000.
- [10] A.W. van der Vaart, "Asymptotic Statistics," *Cambridge University Press*, 1998.
- [11] F.C. Robey, D.R. Fuhrmann, E.J. Kelly, and R. Nitzberg, "A CFAR Adaptive Matched Filter Detector," *IEEE Trans. on AES*, vol. 23, pp. 208–216, January 1992.
- [12] S. Kraut and L.L. Scharf, "The CFAR Adaptive Subspace Detector is a Scale-Invariant GLRT," *IEEE Trans on SP.*, vol. 47, pp. 2538–2541, September 1999.
- [13] S. Kraut, L.L. Scharf, and L.T. Mc Whorter, "Adaptive Subspace Detector," *IEEE Trans. on SP*, vol. 49, pp. 1–16, January 2001.
- [14] E. Jay, "Détection en Environnement Non-Gaussien," *Ph.D Thesis, University of Cergy-Pontoise / ONERA, France*, June 2002.
- [15] M. Rangaswamy, D.D. Weiner, and A. Ozturk, "Non-Gaussian vector identification using spherically invariant random processes," *IEEE Trans. on AES*, vol. 29, pp. 111–124, January 1993.
- [16] M. Rangaswamy, "Spherically Invariant Random Processes for modelling Non-Gaussian Radar Clutter," *IEEE Proc. 27th Asilomar Conf on Sig. Sys. and Comp.*, vol. 2, pp. 1106–1110, November 1993.
- [17] E. Conte, M. Longo, and M. Lops, "Modelling and Simulation of a Non-Rayleigh Radar Clutter," *IEE Proc. on Pt.F*, vol. 138, no. 2, 1991.

- [18] F. Gini, "Sub-Optimum Coherent Radar Detection in a Mixture of K-Distributed and Gaussian Clutter," *IEE Proc. on Radar, Sonar Navig.*, vol. 144, pp. 39–48, February 1997.
- [19] F. Gini, "A Cumulant-based Adaptive Technique for Coherent Radar Detection in a Mixture of K-Distributed Clutter and Gaussian Disturbance," *IEEE Trans. on SP*, vol. 45, no. 6, 1997.
- [20] E. Conte, M. Lops, and G. Ricci, "Asymptotically Optimum Radar Detection in Compound-Gaussian Clutter," *IEEE Trans. on AES*, vol. 31, pp. 617–625, April 1995.
- [21] E. Jay, J.P. Ovarlez, D. Declercq, and P. Duvaut, "BORD : Bayesian Optimum Radar Detector," *Signal Processing*, vol. 83, no. 6, 2003.
- [22] C.P Robert, "L'analyse Statistique Bayésienne," *Economica, Paris*, 1992.
- [23] C.P Robert, "The Bayesian Choice : a Decision-Theoretic Motivation," *Springer-Verlag, New York*, 1994.
- [24] C.P Robert, "Méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov," *Economica, Paris*, 1996.
- [25] K.J. Sangston, F. Gini, M.V. Greco, and A. Farina, "Structures for Radar Detection in Compound Gaussian Clutter," *IEEE Trans. on AES*, vol. 35, no. 2, 1999.
- [26] V.A. Korado, "Optimum Detection of Signals with Random Parameters Against the Background of Noise of Unknown Intensity under Conditions of Constant False Alarm Probability," *Radio Engineering and Electronic Physics*, vol. 13, 1968.
- [27] B. Picinbono and G. Vezzosi, "Détection d'un signal certain dans un bruit non stationnaire et non Gaussien," *Annales des Télécom.*, vol. 25, 1970.
- [28] L.L. Scharf and L.T. McWhorter, "Adaptive Matched Subspace Detectors and Adaptive Coherence Estimators," *Proceedings of the 30th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, vol. 2, pp. 1114–1117, November 1996.
- [29] S. Kraut, L.L. Scharf, and R.W. Butler, "The Adaptive Coherence Estimator : A Uniformly Most-Powerful-Invariant Adaptive Detection Statistic," *IEEE Trans. on SP*, vol. 53, pp. 427–438, February 2005.
- [30] F. Gini and M. V Greco, "Covariance matrix estimation for CFAR detection in correlated heavy tailed clutter," *Signal Processing, special section on Signal Processing with Heavy Tailed Distributions.*, vol. 82, pp. 1847–1859, December 2002.
- [31] E. Conte, A. De Maio, and G. Ricci, "Recursive estimation of the covariance matrix of a compound-Gaussian process and its application to adaptive CFAR detection," *IEEE Trans. on SP*, vol. 50, pp. 1908–1915, August 2002.
- [32] F. Pascal, Y. Chitour, J.P. Ovarlez, P. Forster, and P. Larzabal, "Covariance Structure Maximum Likelihood Estimates in Compound Gaussian Noise : Existence and Algorithm Analysis," *IEEE Trans. on SP*, vol. 56, pp. 34–38, January 2008.
- [33] F. Pascal, P. Forster, J.P. Ovarlez, and P. Larzabal, "Performance Analysis of Covariance Matrix Estimate in Impulsive Noise," *IEEE Trans. on SP*, pp. 2206–2217, June 2008.
- [34] F. Pascal, "Détection et Estimation en Environnement Non Gaussien," *Pd.D Thesis, University of Paris X / ONERA, France*, December 2006.
- [35] J.P. Burg, D.G. Luenberger, and D.L. Wenger, "Estimation of Structured Covariance Matrices," *Proc. of the IEEE*, vol. 70, pp. 963–974, September 1982.
- [36] D.R. Fuhrmann, "Application of Toeplitz Covariance Estimation to Adaptive Beamforming and Detection," *IEEE Trans. on SP*, vol. 39, pp. 2194–2198, October 1991.

-
- [37] R. Nitzberg and J.R. Burke, "Application of Maximum Likelihood Estimation of Persymmetric Covariance Matrices to Adaptive Detection," *IEEE Trans. on AES*, vol. 25, pp. 124–127, January 1980.
- [38] L. Cai and H. Wang, "A Persymmetric Multiband GLR Algorithm," *IEEE Trans. on AES*, pp. 806–816, July 1992.
- [39] E. Conte and A. De Maio, "Exploiting Persymmetry for CFAR Detection in Compound-Gaussian Clutter," *IEEE Trans. on AES*, vol. 39, pp. 719–724, April 2003.
- [40] E. Conte and A. De Maio, "Mitigation Techniques for Non-Gaussian Sea Clutter," *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, vol. 29, pp. 284–302, December 2003.
- [41] F. Pascal, J.P. Ovarlez, P. Forster, and P. Larzabal, "On a SIRV-CFAR Detector with Radar Experimentations in Impulsive Noise," *Proc. EUSIPCO*, September 2006.
- [42] I.E. Brennan and I.S. Reed, "Theory of Adaptive Radar," *IEEE Trans. on AES*, vol. 2, pp. 237–252, March 1973.
- [43] J. Ward, "Space-Time Adaptive Processing for Airborne Radar," *tech. rep.*, vol. Lexington, Massachusetts, USA, December 1994.
- [44] J. Ward, "Space Time Adaptive Processing for Airborne Radar," *IEEE ICASSP 1995*, vol. 5, 1995.
- [45] S. Bidon, "Estimation et Détection en Milieu Non-Homogène, Application au Traitement Spatio-Temporel Adaptatif," *Ph.D Thesis, University of Toulouse*, 2008.
- [46] H. Belkacemi, "Approches de sous-espaces pour le traitement adaptatif spatio-temporel en radar aéroporté monostatique/bistatique," *Ph.D Thesis, University Paris-sud XI*, 2006.
- [47] M.I. Skolnic, "Radar Handbook, second edition," *Mc Graw & Hill*, 1990.
- [48] P. Lombardo, M. Greco, F. Gini, A. Farina, and J.B. Billingsley, "Impact of Clutter Spectra on Radar Performance Prediction," *IEEE Trans. on AES*, vol. 37, pp. 1022–1038, July 2001.
- [49] T.A. Barton and D.R. Fuhrmann, "Covariance Structures for Multidimensional Data," *IEEE Proc. 35th Asilomar Conf on Sig. Sys. and Comp.*, vol. 1, 1991.
- [50] I.S. Reed, J.D. Mallett, and L.E. Brennan, "Rapid Convergence Rate in Adaptive Arrays," *IEEE Trans. on AES*, vol. 10, pp. 853–863, November 1974.
- [51] I.P. Kirsteins and D.W. Tufts, "Rapidly Adaptive Nulling of Interference," *IEEE Conf. on Sys. Engineering*, vol. 5, pp. 269–272, August 1989.
- [52] A.M. Haimovich, C. Peckham, T. Ayoub, J.S. Goldstein, and I.S. Reed, "Performance Analysis of Reduced-Rank STAP," *IEEE National Radar Conference*, pp. 42–47, May 1997.
- [53] C.D. Peckham, A.M. Haimovich, T.F. Ayoub, J.S. Goldstein, and I.S. Reed, "Reduced-Rank STAP Performance Analysis," *IEEE Trans. on AES*, vol. 36, pp. 664–676, April 2000.
- [54] H. Belkacemi, "The Eigencanceler : Adaptive Radar by Eigenanalysis Methods," *IEEE Trans. on AES*, vol. 32, no. 2, 1994.
- [55] I.P. Kirstein and D.W. Tufts, "Adaptive Detection Using Low-Rank Approximation to a Data Matrix," *IEEE Trans. on AES*, vol. 30, pp. 55–67, January 1994.
- [56] H. Krim, P. Forster, and J.G. Proakis, "Operator Approach to Performance Analysis of Root-MUSIC and Root-Min-Norm," *IEEE Trans. on SP*, vol. 40, no. 7, 1992.
- [57] D.J. Sheskin, "Parametric and non-parametric statistical procedures," *Chapmann and Hall/CRC books, New York*, 2004.
- [58] C. Kerbiriou, "Développement d'une Méthode d'Etalonnage d'un Radar Transhorizon basée sur une Analyse Fine du Fouillis de Mer," *Ph.D Thesis, University of Rennes 1 / ONERA*, 2002.

- [59] J. Darricau, “Physique et Théorie du Radar,” *Sodipe, Paris*, vol. 3, 2005.
- [60] K.B. Petersen and M.S. Pedersen, “The Matrix Cookbook,” *Internet link : <http://matrixcookbook.com>*, November 2008.
- [61] R.J. Muirhead, “Aspects of Multivariate Statistical Theory,” *Wiley, New-York*, 1982.
- [62] M.V. Jambunathan, “Some Properties of Beta and Gamma Distributions,” *The annals of mathematical statistics*, vol. 25, pp. 401–405, June 1954.

Résumé

Dans le cadre de la détection radar en environnement gaussien comme non-gaussien, de nombreux détecteurs ont été développés en se basant sur des modèles de fouillis précis et des estimateurs de matrices adaptés à ces modèles. Les modèles gaussiens, simples d'utilisation, montrent rapidement leurs limites face à la réalité physique et laissent ainsi place aux SIRP, processus aléatoires sphériquement invariants qui rendent compte beaucoup plus fidèlement de la non-gaussianité du fouillis. Les détecteurs adaptés à ces environnements sont alors construits sur la base d'un estimateur de la matrice de covariance adapté. Or, dans de nombreuses applications, cette matrice de covariance présente une structure particulière dite persymétrique. L'objet de cette thèse est donc d'exploiter cette structure particulière de la matrice de covariance du fouillis afin d'en diminuer l'erreur d'estimation. Par cette exploitation, deux nouveaux estimateurs de la matrice ont été déterminés pour les environnements gaussiens et non-gaussiens. Ces détecteurs nommés PAMF et GLRT-PFP, ont été caractérisés statistiquement et une validation des travaux théoriques a été menée sur des données opérationnelles tant gaussiennes que non-gaussiennes. Une application de la persymétrie a également été effectuée dans le cadre des algorithmes spatio-temporels (STAP) ainsi que sur des algorithmes dits "à rang réduit". Les résultats probants en détection obtenus sur tous ces types de données confirment donc l'intérêt de la technique étudiée. Enfin, un élargissement de la structure persymétrique a été étudié par l'extension des détecteurs aux matrices dites de Toeplitz. Ces matrices obtenues dans le cas de traitements spatio-temporels présentent une structuration plus riche encore que la persymétrie et permettent d'envisager des développements futurs intéressants en vue de l'amélioration des performances des détecteurs. Les premiers résultats sont présentés pour conclure ce travail de thèse.

Mots-clés : Détection radar, Estimation structurée, structure persymétrique, fouillis gaussien et non-gaussien, matrice de covariance.

Abstract

This thesis deals with Radar detection in Gaussian and non-Gaussian noise. In this context, the clutter covariance matrix commonly exhibits a particular persymmetric structure. This structure is exploited into a particular matrix transformation to provide two new covariance matrices estimates for gaussian and non-gaussian noise. We use then this particular linear transformation in order to develop and to study the statistical property of the two new detectors based on these estimates for both Gaussian and non-Gaussian environments. The improvement in terms of detection performances of these new detectors is shown through a lots of simulations and validation on operational data, for both Gaussian and non-Gaussian noise. Moreover this exploitation is extended to space-time adaptive processing and reduced rank technical. All the results confirm then the high interest of taking into account this particular structure in radar detection process compared to classical detection schemes. The case of Toeplitz matrices is also studied. The Toeplitz matrices are a particular class of structured matrices obtain with space-time processing which theoretically allows to improve the performance of detectors based on this matrix assumption. In this context, some preliminary results are presented in order to conclude this thesis.

Keywords : Radar detection, structured estimation, persymmetric structure, Gaussian and non-Gaussian noise, covariance matrix.