MARKOV PROCESSES AND THEIR ASSOCIATED RECIPROCAL CLASSES. AN APPROACH WITH DUALITY FORMULAE.

RÜDIGER MURR

Résumé essentiel en français

Ce travail est centré sur la caractérisation de certaines classes de processus aléatoires par des formules de dualité. En particulier on considérera des processus réciproques à sauts, un cas jusqu'à présent négligé dans la littérature.

La théorie des processus réciproques a évolué à partir d'une idée de Erwin Schrödinger. Dans [Sch32] il a décrit le mouvement d'une particule diffusant dans un réservoir thermique comme solution d'un problème d'analyse stochastique avec conditions aux limites. Il a proposé que les solutions d'une telle problème appartiennent à la classe réciproque associé à un processus de Markov. Cette classe contient tout les processus stochastique qui ont les mêmes ponts que ce processus de référence, où le terme pont se réfère à un processus conditioné d'avoir des états initial et final déterministes.

Bernstein fait remarquer dans [Ber32], que le concept de processus réciproques, ou des champs de Markov indexés par le temps, permet de préciser les modèles probabilistes sur une notion symmétrique du passé et du futur:

> *"[...] si l'on veut reconstituer cette symétrie entre le passé et le futur [...] il faut renoncer à l'emploi des chaînes du type de Markov et les remplacer par des schémas d'une nature différente."*

Les propriétés des processus réciproques et les classes réciproques ont été examinées en détail par de nombreux auteurs sous des aspects divers.

De nombreux resultats principales concernant les proriétés fondamentales des processus réciproques ont été développé par Jamison dans une série d'articles [Jam70, Jam74, Jam75]. En particulier il caractérise les processus réciproques Gaussiens en utilisant une équation différentielle satisfaite par leur fonction de covariance. La théorie des

processus réciproques Gaussiens à été étendue par Chay [Cha72], Carmichael, Massé, Theodorescu [CMT82] et généralisé à un contexte multivarié par Levy [Lev97].

D'importantes contributions à une interprétation physique et le développement d'un calcul stochastique adapté à la classe réciproque des processus de diffusion aux trajectoires continues ont été faites par Zambrini et divers co-auteurs dans leur intérêt de créer une version "euclidien" de la méchanique quantique. Dans des travaux joints avec de nombreux auteurs, il développe un calcul stochastique qui possède des analogies intéressantes à l'approche d'intégrale de chemin dans la méchanique quantique introduite par Feynman et Hibbs [FH10]. Une compte rendu est présenté dans le livre de Chung et Zambrini [CZ01], vous pouvez aussi consulter les travaux avec Cruzeiro ou Thieullen [CZ91, TZ97]. En outre Zambrini note que les classes réciproques sont une façon élégant de décrire les solutions de certains problèmes de contrôle optimale stochastique, voir [Zam86]. Cette interprétation à été étendu par Wakolbinger et Dai Pra aux fonctions objective différentes, nous renvoyons aux articles [Wak89] et [DP91].

Krener a lancé sa recherche des *invariants réciproques* de la classe réciproque des processus des diffusions en utilisant un développement en temps courte des densitées de transition dans [Kre88]. Clark fait remarquer dans [Cla90] que ces invariants réciproques sont en fait caractéristique de ces classes réciproques. Ils permettent d'identifier les processus appartenant à la même classes réciproque. Une interprétation physique de ces invariants a été fourni par Levy et Krener [LK93].

Cette thèse aborde le problème de la caractérisation les classes réciproques des processus de Markov en utilisant des formules de dualité. Concernant le mouvement Brownien, une telle formule de dualité apparaît comme outil d'analyse dans le calcul de Malliavin: Bismut l'utilise pour fournir une preuve probabiliste du théorème de Hörmander dans [Bis81]. Le terme "formule de dualité" se réfère a une dualité, ou également une rélation d'intégration par parties, entre une dérivée stochastique et une intégrale stochastique.

Une caractérisation du processus de Poisson comme étant l'unique processus de comptage satisfaisant une formule de dualité entre un operateur de différence et une intégrale stochastique compensée a été donnée par Slivnjak [Sli62] et généralisé aux mesures de Poisson par Mecke [Mec67]. Une caractérisation similaire de la mesure de Wiener a été présenté par Rœlly et Zessin dans [RZ91]. Ils caractérisent le mouvement Brownien comme l'unique processus continu pour lequel la dérivée de Malliavin et l'intégrale de Skorohod sont des opérateurs en dualité.

La première partie de cette thèse est consacrée à la caractérisation des processus à accroissements indépendants en utilisant une formule de dualité. Ce résultat va servir comme base de l'étude des classes réciproque de processus de Markov dans la deuxième partie.

Section 1 est une introduction à la notion de caractérisation des processus stochastiques par des formules de dualité. Nous présentons les caractérisations des processus stochastiques par Slivnjak et Rœlly, Zessin s mentionnée si dessus, et étendons ces résultats à l'espace des processus càdlàg. Notre approche est basé sur une caractérisation du loi de Poisson, respectivement du loi Gaussien sur $\mathbb{R}$ comme unique probabilité qui satisfont des formules d'intégration par parties spécifiques. Ces résultats sont connu sous le nom de lemme de Chen, ou lemme de Stein, voir la monographie de Stein [Ste86].

Section 2 est consacrée à rendre explicite une formule d'intégration par parties satisfaite par vecteurs aléatoires infiniment divisibles: *Dans Proposition 2.7 nous montrons que si Z est un vecteur aléatoire intégrable et infiniment divisible, l'intégration par parties*

$$\mathbb{E}\left(f(Z)(Z-b)\right) = \mathbb{E}\left(A\nabla f(Z)\right) + \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}^d_*}(f(Z+q)-f(Z))qL(dq)\right) \tag{0.1}$$

est satisfait pour tout fonction de teste lisse $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Ici $b \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et la mesure L sont les caractéristiques de Fourier du vecteur infiniment divisible Z. En particulier A est définie non-négatif et L est une mesure de Lévy. Cette formule est la version de dimension fini d'une formule de dualité pour des processus càdlàg à accroissements indépendants, une formule qui est connue dans le calcul de Malliavin pour les processus de Lévy avec ou sans sauts. *Soit X un processus de Lévy avec des incréments intégrables. Dans la Proposition 2.20 nous prouvons la formule de dualité*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(F(X)\int_{[0,1]}u_t\cdot(dX_t-bdt)\right) &= \mathbb{E}\left(\int_{[0,1]}D_tF(X)\cdot Au_tdt\right)\\ &\quad+\mathbb{E}\left(\int_{[0,1]\times\mathbb{R}^d_*}(F(X+q\mathbb{1}_{[t,1]})-F(X))u_t\cdot qdtL(dq)\right).\end{aligned} \tag{0.2}$$

Ici, $F(X)$ est une foncionnelle lisse du processus de Lévy X et $u : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ est une fonction en escalier. Le vecteur b est la dérive, A est matrice de diffusion et L est la mesure de Lévy contrôlant les sauts de X. Les operateurs en dualité avec l'intégrale stochastique sont la dérivée de Malliavin $D_t F(X)$ et l'opérateur de différence $F(X + q\mathbb{1}_{[t,\infty)}) - F(X)$. La seule preuve connue de cette dualité utilise une décomposition de l'espace sous-jacent des fonctionelles carrée intégrables. Nous présentons deux nouvelles preuves plus simple dans les Propositions 2.20 et 2.38. La première preuve souligne une correspondance directe de la divisibilité infini et ce genre des formules de dualité. La seconde utilise une nouvelle perturbation aléatoire de sauts pour définir l'opérateur de difference.

Dans la **Section 3**, nous montrons que les processus à accroissements indépendants sont en effet les seuls qui satisfont la formule de dualité (0.2). Notre résultat principal est une caractérisation des processus à accroissements indépendants présenté dans le Théorème 3.4. Afin de caractériser les processus de Lévy, le résultat est comme suit: *Si X est un processus intégrable et (b, A, L) sont un tuple constitué d'un vecteur, d'une matrice définie non-négatif et d'une mesure de Lévy, alors X est un processus de Lévy avec des caractéristiques (b, A, L) si et seulement si la formule de dualité (0.2) est satisfait.* Ceci est basé sur une caractérisation des vecteurs aléatoires infiniment divisibles par (0.1), présenté dans Théorème 3.1, ce qui est une généralisation du lemme de Stein et de Chen. Nous avons donc unifié et généralisé les résultats présenté dans la Section 1. De plus, notre méthode nous permet de donner une preuve nouvelle et simple d'une caractérisation des mesures aléatoires infiniment divisibles sur les espaces polonais par une factorisation de la mesure de Campbell, une ancien résultat dû à Kummer et Matthes [KM70].

L'idée d'utiliser des formules de dualité comme un outil pour caractériser les classes réciproques est relativement nouvelle. Elle a été introduit par Rœlly et Thieullen [RT02, RT05] pour caractériser la classe réciproque du mesure de Wiener et des diffusions Browniennes.

Notre contribution principale dans ce travail est l'étude des classes réciproques des processus à sauts purs, en particulier des processus de saut avec un taille de saut unité, ou processus de comptage. Nous soulignons la pertinance de telles caractérisations avec les applications sur un problème de contrôle optimal et le retournement temporel des processus stochastiques.

La deuxième partie de cette thèse est concacrée à l'étude des classes réciproques des processus de Markov continu et processus de Markov avec sauts. En particulier, notre travail comporte la première enquête dans le cadre du processus de sauts.

Nous définissons dans la **Section 4** les notions de processus réciproques et des classes réciproques associés aux processus de Markov. Le concept d'une classe réciproque est une élément central dans la deuxième partie de cette thèse. *Si* $(X_t)_{0\leq t\leq 1}$ *est un processus de Markov avec valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*, la classe réciproque de* X *se compose de tout les processus stochastiques* $(Y_t)_{0\leq t\leq 1}$ *qui ont les mêmes ponts que le processus de référence* X*. Le terme pont se réfère à la loi du processus sous conditions aux limites fixé* $X_0 = x$ *et* $X_1 = y$ *pour* $x, y \in \mathbb{R}^d$. Nous illustrons ces concepts un utilisant des processus stochastiques en temps discret dans § 5.5. Il s'agit de l'idée originale de Bernstein [Ber32], qui a introduit des processus réciproques comme une généralization symmetrique en temps des chaînes de Markov.

La **Section 5** est consacrée á l'étude des classes réciproques des diffusions Browniennes: *Une diffusion Brownienne* X *est la solution de l'équation différentielle stochastique*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + dW_t,$$

où b *est une fonction lisse et* W *est un mouvement Brownien.* Une nouvelle contribution est la caractérisation d'une diffusion Brownienne comme suit. *Dans le Théorème 5.14 nous prouvons que une semimartingale continue* X *avec des incréments intégrable est une diffusion Brownienne si et seulement si*

$$\mathbb{E}\left(F(X)\int_{[0,1]} u_t dX_t\right) = \mathbb{E}\left(\int_{[0,1]} D_tF(X)\cdot u_t dt\right)$$
$$+\,\mathbb{E}\left(F(X)\left[\int_{[0,1]} u_t\cdot b(t,X_t)dt + \int_{[0,1]}\sum_{i,j=1}^{d} u_{i,t}\int_{[t,1]}\partial_i b_j(s,X_s)(dX_{j,s} - b_j(s,X_s)ds)dt\right]\right)$$

est vrai pour tout fonctionelles lisses $F(X)$ *et tout* $u : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ *fonction en escalier.* Nos hypothèses sur X sont minimes pour rendre la formule de dualité bien défini, car nous avons besoin de définir une intégrale stochastique sur le côté droit, et tous les termes doivent être intégrable par rapport à la loi de X. Suivant Rœlly et Thieullen [RT02, RT05] cette caractérisation est étendue à la caractérisation de la classe réciproques d'une diffusion Brownienne. Nous présentons ensuite deux applications. Dans § 5.5 nous présentent des analogies formelles entre les propriétés des processus dans la classes réciproque d'une diffusion Brownienne et du mouvement d'une particule dans une champ électromagnetique décrit par la méchanique classique. La dynamique des processus examinés sont similaires à celles des "processus de Bernstein" introduites par Zambrini [Zam85] et Levy, Krener [LK93]. Nous sommes en mesure de donner une interprétation concise des invariants associés à la classe réciproque d'une diffusion Brownienne, comme introduit par Clark dans [Cla90]: *Si $E, B : [0,1] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ représentent respectivement un champ électrique et un champ magnétique, et X est une diffusion Brownienne avec dérivé b représentant le mouvement d'une particule dans un réservoir thermique sous l'influence de ce champ électromagnétique, alors nous sommes en mesure de prouver que*

$$\begin{aligned} E_i(t,x) &= \partial_t b_i(t,x) + \sum_{j=1}^{3} b_j(t,x)\partial_j b_i(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} \partial_j b_i(t,x),\ i = 1,2,3, \\ B(t,x) &= (\partial_2 b_3 - \partial_3 b_2, \partial_3 b_1 - \partial_1 b_3, \partial_1 b_2 - \partial_2 b_1)(t,x), \end{aligned}$$

ou sur le côté droit de l'équation nous rencontrons les invariants réciproques introduites par Clark. Ici, le mouvement de la particule est défini comme la solution d'un problème de contrôle optimal stochastique similaire à celui proposé par Yasue [Yas81]. *Nous montrons que la formule de dualité qui caractérise la classe réciproque de X peut alors s'écrire*

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\int_{[0,1]} D_t F(X) \cdot u_t dt\right) \\ = &\ \mathbb{E}\left(F(X)\left(\int_{[0,1]} u_t \circ dX_t + \int_{[0,1]} \langle u \rangle_t \times B(t,X_t) \circ dX_t + \int_{[0,1]} \langle u \rangle_t \cdot E(t,X_t)dt\right)\right), \end{aligned}$$

sous la condition de la boucle $\int_{[0,1]} u_t dt = 0$, où $\langle u \rangle_t$ est la primitive de u et $\circ\, dX_t$ est l'intégrale de Fisk-Stratonovic et "$\times$" est le produit vectoriel. Cette équation est un analogue formelle de l'équation de Newton dirigéant une particule dans un champ électromagnétique, voir la Remarque 5.53. Dans la deuxième application, nous analysons le comportement de la classe réciproque d'une diffusion Brownienne par rapport au renversement du temps $t \mapsto 1 - t$. En utilisant la caractérisation de la classe réciproque par une formule de dualité de Rœlly et Thieullen, nous sommes en mesure d'identifier dans la Proposition

5.84 la classe réciproque des processus inversées en raison de leur classe réciproque initiale. Un prémièr résultat similaire a été presenté par Thieullen [Thi93, Proposition 4.5], qui a identifié les invariants réciproques d'une diffusion Brownienne renversé. Dans le cadre de l'interprétation méchanique mentionnée ci-dessus nous en déduisons: *Si X est un processus dans la classe réciproque d'une diffusion Brownienne aux invariants réciproques identiques aux champs électromagnetiques $E(t,x)$ et $B(t,x)$, alors son processus inversé est dans la classe réciproque aux invariants identiques à $E(1-t,x)$ et $-B(1-t,x)$.*

Dans l'étude des ponts de processus à sauts de plusieurs nouveaux problèmes apparaissent. Laissez-nous parler brièvement d'un problème d'une natur plutôt "algébrique": Si un processus à sauts pure de valeurs réelles est conditionnée de commencer dans un point $x \in \mathbb{R}$ au temps $t = 0$ et d'être en $y \in \mathbb{R}$ au temps final $t = 1$ apràs $n \in \mathbb{N}$ sauts de tailles de sauts $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, alors $y = x + q_1 + \cdots + q_n$. Ainsi, une interdépendance de tailles de sauts se produit pour les ponts, par exemple le saut numéro n dépend de la taille du premier saut $q_n = y - q_1 - \cdots - q_{n-1} - x$. L'étude des processus de sauts purs de taille de l'unité permet clairement d'éviter ce problème.

Section 6 est consacrée à l'étude de la classe réciproque du processus de Poisson et des processus de Markov de comptage: Nous définissons des processus "belles" de comptage $(X_t)_{t\in[0,1]}$ en tant que processus des sauts pure avec des sauts unitaires et des intensités des sauts $\ell(t, X_t)$ qui sont délimitées par le bas et par le haut. En particulier, un processus de Poisson est un processus "belle" de comptage avec intensité $\ell \equiv 1$. Dans le Théorème 6.58 nous sommes en mesure d'introduire un nouvel invariant réciproque associé à la classe réciproque d'un processus "belle" de comptage: *Deux processus "belles" de comptage X et Y avec des intensités ℓ respectivement k ont la même classe réciproque, si et seulement si les invariants réciproques*

$$\Xi_\ell(t,x) = \Xi_k(t,x) \quad \textit{coïncident, où} \quad \Xi_\ell(t,x) = \partial_t \log \ell(t,x) + \ell(t,x+1) - \ell(t,x).$$

Notre façon de caractériser la classe réciproque d'un processus "belle" de comptage est basée sur une formule de dualité qui a été obtenu par Carlen, Pardoux [CP90] et indépendamment par Elliott, Tsoi [ET93]. Dans le Théorème 6.69 l'invariant réciproque est montré à apparaître dans une formule de dualité qui caractérise la classe réciproque: *Un processus de comptage X est dans la classe réciproque d'un processus "belle" de comptage si et seulement si la formule de dualité*

$$\mathbb{E}\left(F(X)\int_{[0,1]} u_t dX_t\right) = \mathbb{E}\left(\mathcal{D}_u F(X)\right) - \mathbb{E}\left(F(X)\int_{[0,1]} u_t \int_{[t,1]} \Xi_\ell(s, X_{s-}) dX_s dt\right)$$

est satisfait pour tout fontionelles lisses $F(X)$ et fonctions en escalier u qui satisfont la condition de la boucle $\int_{[0,1]} u_t dt = 0$. Ici, $\mathcal{D}_u F(X)$ est la dérivé introduit par Carlen, Pardoux et Elliott, Tsoi. *En particulier, un processus de comptage X est un mélange de ponts Poissoniens si et seulement si la formule de dualité ci-dessus est satisfait avec $\Xi_\ell \equiv 0$.* De plus, nous montrons que la classe réciproque d'un processus "belle" de comptage contient toutes les solutions d'un problème de contrôle optimal stochastique sous contrainte d'une distribution aux limites donnée. *Compte tenu des coûts bornés $A : [0,1] \times \mathbb{R} \to (0,\infty)$ et $\Phi : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ce problème concerne la minimisation de la fonction objective*

$$\mathbb{E}\left(\int_{[0,1]} (\gamma_t \log \gamma_t - \gamma_t \log A(t, X_{t-}) + \Phi(t, X_{t-}))\, dt\right),$$

à l'intérieur de la classe des processus de comptage X avec le fonction d'intensité prévisible γ_t dont la loi est absolument continue par rapport à la loi d'un processus de Poisson, voir la Proposition 6.81. En Proposition 6.90 nous concluons que le minimiseur de la fonction objective ci-dessus satisfait l'equation de dualité avec l'invariante

$$\Xi_\ell(t, x) = \partial_t \log A(t, x) + \Phi(t, x+1) - \Phi(t, x).$$

Comme corollaire, nous sommes en mesure d'identifier la classe réciproque d'un processus "belle" de comptage inversé en temps. Nous montrons que *si X est un processus de comptage dans la classe réciproque d'un processus "belle" de comptage au invariant $\Xi_\ell(t, x)$, alors le processus inversé $\hat{X}_t := -X_{(1-t)-}$ est dans la classe réciproque d'un processus "belle" de comptage au invariant $\Xi_\ell(1-t, -x-1)$, voir la Proposition 6.101.*

Dans la **Section 7** nous proposons des généralisations de certains de nos resultats sur les processus de comptage dans le cadre des processus de sauts purs avec des differents tailles de sauts. Pour éviter l'interdépendance des tailles des sauts pour les ponts, une condition d'incommensurabilité entre les sauts est essentiel: *Un ensemble fini $Q \subset \mathbb{R}^d_*$ ne contient que des tailles de sauts incommensurable, si pour n'importe quelle somme fini* *d'élements de* Q *l'égalité* $q_1 + \cdots + q_n = \tilde{q}_1 + \cdots + \tilde{q}_m$ *implique* $n = m$ *et* $(q_1, \ldots, q_n) = (\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n)$ *à permutation des entrées du vecteur près. Sous cette condition, nous montrons que la classe réciproque de tout processus de Poisson composé peut être caractérisé par une formule de dualité, voir le Théorème 7.36.* Nous discutons également les classes réciproques de certains processus à sauts Markoviens: *X est un processus "belle" à sauts, si il existe une fonction bornée* $\ell : [0,1] \to \mathbb{R}^d \times Q \to [\varepsilon, \infty]$ *qui est differentiable en temps telle que*

$$X_t - X_0 - \int_{[0,t]\times Q} \ell(t, X_{t-}, q) dt \Lambda(dq)$$

est une martingale, où Λ *est la mesure de comptage sur* Q. Dans le Théorème 7.54 nous sommes en mesure de comparer les classes réciproques de deux processus "belles" à sauts sans assumer l'incommensurabilité des sauts. *Deux processus "belles" à sauts* X *et* Y *avec des intensités* ℓ *et* k *ont la même classe réciproque si il existe une fonction* $\psi : [0,1] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *telle que* $\log k(t,x,q) = \log \ell(t,x,q) + \psi(t, x+q) - \psi(t,x)$ *partout, et si les invariants*

$\Xi^q_\ell(t,x) = \Xi^q_k(t,x)$ *coïncident, où* $\Xi^q_\ell(t,x) = \partial_t \log \ell(t,x,q) + \int_Q (\ell(t, x+q, \bar{q}) - \ell(t,x,\bar{q}))\Lambda(dq)$.

Dans l' **Annexe** nous résumons quelques résultats issus du calcul stochastique associé au semimartingales à sauts pure sur l'espace càdlàg. Ce calcul est la base de nombreux résultats dans les Sections 2, 6 et 7.

References

[Ber32] Sergei N. Bernstein. Sur les liaisons entre les grandeurs aléatoires. Verh. Internat. Math.-Kongr. 1, 288-309 (1932)., 1932.

[Bis81] Jean-Michel Bismut. Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander's conditions. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 56(4):469–505, 1981.

[Cha72] Seung C. Chay. On quasi-Markov random fields. *J. Multivariate Anal.*, 2:14–76, 1972.

[Cla90] John M.C. Clark. A local characterization of reciprocal diffusions. Applied stochastic analysis, Pap. Workshop, London/UK 1989, Stochastic Monogr. 5, 45-59 (1990)., 1990.

[CMT82] Jean-Pierre Carmichael, Jean-Claude Massé, and Radu Theodorescu. Processus gaussiens stationnaires réciproques sur un intervalle. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 295(3):291–293, 1982.

[CP90] Eric A. Carlen and Étienne Pardoux. Differential calculus and integration by parts on Poisson space. In *Stochastics, algebra and analysis in classical and quantum dynamics (Marseille, 1988)*, volume 59 of *Math. Appl.*, pages 63–73. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990.

[CZ91] Ana Bela Cruzeiro and Jean-Claude Zambrini. Malliavin calculus and Euclidean quantum mechanics. I: Functional calculus. *J. Funct. Anal.*, 96(1):62–95, 1991.

[CZ01] Kai Lai Chung and Jean-Claude Zambrini. *Introduction to random time and quantum randomness*. Monographs of the Portuguese Mathematical Society. McGraw-Hill, Lisbon, 2001.

[DP91] Paolo Dai Pra. A stochastic control approach to reciprocal diffusion processes. *Appl. Math. Optimization*, 23(3):313–329, 1991.

[ET93] Robert J. Elliott and Allanus H. Tsoi. Integration by parts for Poisson processes. *J. Multivariate Anal.*, 44(2):179–190, 1993.

[FH10] Richard P. Feynman and Albert R. Hibbs. *Quantum mechanics and path integrals. Emended and with a preface by Daniel F. Steyer. Emended reprint of the 1965 ed.* Mineola, NY: Dover Publications, 2010.

[Jam70] Benton Jamison. Reciprocal processes: The stationary Gaussian case. *Ann. Math. Stat.*, 41:1624–1630, 1970.

[Jam74] Benton Jamison. Reciprocal processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.*, 30:65–86, 1974.

[Jam75] Benton Jamison. The Markov processes of Schrödinger. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 32(4):323–331, 1975.

[KM70] Günter Kummer and Klaus Matthes. Verallgemeinerung eines Satzes von Sliwnjak. III. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 15:1631–1642, 1970.

[Kre88] Arthur J. Krener. Reciprocal diffusions and stochastic differential equations of second order. *Stochastics*, 24(4):393–422, 1988.

[Lev97] Bernard C. Levy. Characterization of multivariate stationary Gaussian reciprocal diffusions. *J. Multivariate Anal.*, 62(1):74–99, 1997.

[LK93] Bernard C. Levy and Arthur J. Krener. Dynamics and kinematics of reciprocal diffusions. *J. Math. Phys.*, 34(5):1846–1875, 1993.

[Mec67] Joseph Mecke. Stationäre zufällige Masse auf lokalkompakten Abelschen Gruppen. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 9:36–58, 1967.

[RT02] Sylvie Rœlly and Michèle Thieullen. A characterization of reciprocal processes via an integration by parts formula on the path space. *Probab. Theory Related Fields*, 123(1):97–120, 2002.

[RT05] Sylvie Rœlly and Michèle Thieullen. Duality formula for the bridges of a Brownian diffusion: application to gradient drifts. *Stochastic Process. Appl.*, 115(10):1677–1700, 2005.

[RZ91] Sylvie Rœlly and Hans Zessin. Une caractérisation des diffusions par le calcul des variations stochastiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 313(5):309–312, 1991.

[Sch32] Erwin Schrödinger. Sur la théorie relativiste de l'électron et l'interprétation de la mécanique quantique. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 2(4):269–310, 1932.

[Sli62] I. M. Slivnjak. Some properties of stationary streams of homogeneous random events. *Teor. Verojatnost. i Primenen.*, 7:347–352, 1962.

[Ste86] Charles Stein. *Approximate computation of expectations*. Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes—Monograph Series, 7. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1986.

[Thi93] Michèle Thieullen. Second order stochastic differential equations and non-Gaussian reciprocal diffusions. *Probab. Theory Relat. Fields*, 97(1-2):231–257, 1993.

[TZ97] Micheèle Thieullen and Jean-Claude Zambrini. Symmetries in the stochastic calculus of variations. *Probab. Theory Relat. Fields*, 107(3):401–427, 1997.

[Wak89] Anton Wakolbinger. A simplified variational characterization of Schrödinger processes. *J. Math. Phys.*, 30(12):2943–2946, 1989.

[Yas81] Kunio Yasue. Quantum mechanics and stochastic control theory. *J. Math. Phys.*, 22(5):1010–1020, 1981.

[Zam85] Jean-Claude Zambrini. Stochastic dynamics: A review of stochastic calculus of variations. *Int. J. Theor. Phys.*, 24:277–327, 1985.

[Zam86] Jean-Claude Zambrini. Variational processes and stochastic versions of mechanics. *J. Math. Phys.*, 27(9):2307–2330, 1986.