

Local FEM Analysis of Composite Beams and Plates: Free-Edge effect and Incompatible Kinematics Coupling

Doctoral thesis

in structural mechanics

by

Dipl. Ing. Christian Wenzel

October 2014

Université Paris Ouest Nanterre La Défense
Ecole doctorale 139 : Connaissance, langage, modélisation
Laboratoire Energétique Mécanique Electromagnétisme

Politecnico di Torino
Scuola di Dottorato
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

A. Milazzo	Rapporteur
A. Beakou	Rapporteur
S. Di Rosa	
H. Dumontet	
M. D'Ottavio	
P. Vidal	
O. Polit	Advisor
E. Carrera	Co-Advisor

Analyse élément finit local des poutres et plaques composite: effet des bords libres et couplages des cinématiques incompatible

C. Wenzel

*Laboratoire Energétique Mécanique Electromagnétisme – EA4416
Université Paris Ouest - Nanterre - La Défense
50, rue de Sèvres, 92410 Ville d'Avray, France*

Ce travail est divisé en deux parties fondamentales : l'analyse des singularités de stress à bords libres des plaques composites figurant sous uniforme extension et de flexion ainsi que le couplage de modèles hétérogènes cinématique. Les deux parties considèrent les concentrations de contraintes locales qui peuvent être capturées à l'aide seulement de façon fiable un modèle cinétique d'ordre supérieur.

1 Effets du bords libres - analyse des singularités dans des structures plaques

1.1 Modélisation des plaques basé sur Carrera's Unified Formulation

La Carrera's Unified Formulation (CUF) consiste en une notation d'indice compact qui permet de formuler de nombreux modèles de plaques différentes de manière unifiée en introduisant différentes hypothèses sur le comportement à travers l'épaisseur de la structure [3]. Les approximations sont introduites pour les variables de déplacement uniquement ou à la fois pour les déplacements et les variables de contraintes transversales. Dans le premier cas, les modèles classiques à base de déplacement sont développés en se référant à la forme faible lié au principe des déplacements virtuels (PVD). Egalement des modèles avancé de type partiellement mixtes sont formulées dans le cadre de théorème variationnelle mixte de Reissner (RMVT) [8], qui est une déclaration variationnelle expressément établi à la réalisation des conditions de continuité dans les modèles de plaques laminées [2]. Dans une approche de PVD, toutes les contraintes sont évaluées à partir de la loi de Hooke à travers le champ de déformation géométriquement compatible, ce qui entraîne la violation de la continuité des déplacements et des contraintes transversales à l'interface bi-matière, la continuité Interlaminar (IC). Au contraire, l'approche RMVT permet d'introduire un champ de contrainte transversale qui est indépendante du champ de contrainte et on peut donc choisis de façon exactement (“*a priori*”) respecter la continuité de ces contraintes à la interfaces.

Les approximations peuvent être introduits pour l'ensemble du stratifié, ce qui conduit à une description de type Equivalent Single Layer (ESL), ou de façon indépendante pour chaque couche, ce qui conduit à une description de type Layer Wise (LW). Dans la CUF, les variables des contraintes transversaux sont toujours décrits en LW en raison de la nature locale des contraintes en fonction des coefficient de matériau. Pour les inconnues de déplacement, il reste le choix entre ESL et LW.

La description ESL du champ de déplacement est représenté par la répartition suivante l'épaisseur qui est établi sur l'épaisseur du stratifié ensemble ($z \in [-h/2, h/2]$) :

$$u_i(x, y, z) = \sum_{s=0}^N F_s(z) \hat{u}_{i_s}(x, y) \quad (1)$$

avec \hat{u}_{i_s} le vector de $3(N + 1)$ des fonctions inconnues qui ne dépendent pas du nombre de couches dans le stratifié. Pour les fonctions d'approximation $F_s(z)$ des polynômes de Taylor sont choisis, pour le quelles on obtient $F_s(z) = z^s$. Cette approximation est de classe C^N en z , qui signifie qu'ils répondent à l'Interlaminar continuité (IC), mais le comportement Zig-Zag (ZZ) à interfaces bi-matière est non satisfait. Pour contourner cette limitation, le terme d'ordre le plus élevé du développement de Taylor $F_N(z) \hat{u}_{i_N}$ peut être remplacé par la fonction Zig-Zag de Murakami (MZZF) $F_{ZZ}(\zeta_k(z)) = (-1)^k \zeta_k$ avec le fonction correspondant inconnue de ESL $\hat{u}_{i_{ZZ}}$ De cette façon, l'approximation obtenue à travers l'épaisseur a une rupture de pente au niveau des interfaces.

La description LW du champ de déplacement est donnée par :

$$\begin{aligned} u_i^k(x, y, z) &= \sum_{s=0}^N F_s(\zeta_k(z)) \hat{u}_{i_s}^k(x, y) \\ &= F_b(\zeta_k) \hat{u}_{ib}^k(x, y) + F_t(\zeta_k) \hat{u}_{it}^k(x, y) + \sum_{r=2}^N F_r(\zeta_k) \hat{u}_{ir}^k(x, y) \end{aligned} \quad (2)$$

since top and bottom unknown functions are available at each ply, it is straightforward to account for the IC within a standard assembly scheme. The same LW approximation is introduced for the transverse stress unknowns in the case of RMVT-based models.

où le rapprochement est introduite pour chaque couche séparément (exposant k) d'ou le nombre des fonctions inconnues $\hat{u}_{i_s}^k$ est maintenant une fonction du nombre de couches dans le stratifié. Des polynômes de Legendre sont utilisées comme fonctions d'interpolation $F_s(\zeta_k)$.

On remarque que la première approximation ($N = 1$) correspond à l'interpolation linéaire de Lagrange qui est seulement une fonction que des variables de la partie inférieure (b) et supérieure (t) de la couche : vue que les inconnues de la partie inférieure et supérieure sont présent à chaque couche, il est facile de tenir en compte de l'IC au sein d'un système d'assemblage standard. Les mêmes approximations LW sont introduit pour les inconnues des contrains transversales dans le cas des modèles RMVT.

Dans la CUF, toutes les variables sont développées avec même ordre d'expansion N . Dans ce travail des polynômes linéaire ($N = 1$) jusqu' ? à la quatrième ordre ($N = 4$) sont utilisés pour toutes les variables indépendantes (par exemple, u_i pour les modèles à base de PVD et u_i et σ_{i3} pour les modèles à base de RMVT).

1.1.1 Principe des déplacements virtuels

On rappel la formulation aux déplacements du problème statique d'élasticité dans la domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec ses frontières décomposées en partie de Dirichlet et Neumann : $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, tel que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = 0$. En utilisant une notation matricielle, le Principe des déplacements virtuels s'écrit sous la forme suivante :

Trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ tel que :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})^T \delta \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}_v^T \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{t}^T \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \delta \mathcal{U} \quad (3)$$

ou :

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega); \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \bar{\mathbf{u}}\} \quad (4)$$

et $\delta\mathcal{U}$ et l'espace des variations des déplacements cinématiquement admissibles. Ici Ω est la configuration de référence, $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes, \mathbf{f}_v sont les forces volumétriques et \mathbf{t} sont des tractions sur la frontière de Neumann Γ_N .

1.1.2 Reissner's Mixed Variational Theorem

Reissner's Mixed Variational Theorem (RMVT), [8, 9] a été introduit pour améliorer le comportement des contraintes transversales dans des structures composites en satisfaisant exactement les conditions de continuité interlaminaire de $\boldsymbol{\sigma}_n$. La formulation mixte permet au même temps de varier indépendamment les déformation dans le plan, $\boldsymbol{\epsilon}_p(\mathbf{u})$ et aussi les contraintes transverse $\boldsymbol{\sigma}_n$. Pour ça les contraintes transverse $\boldsymbol{\sigma}_{nM}$ sont introduit comme variables indépendant par couche, additionnellement et indépendant de la formulation de champ de déplacement \mathbf{u} .

Reissners Mixed Variational Theorem peut être écrit comme :

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}_{pG}^T \boldsymbol{\sigma}_{pH} + \delta \boldsymbol{\epsilon}_{nG}^T \boldsymbol{\sigma}_{nM} + \delta \boldsymbol{\sigma}_{nM}^T (\boldsymbol{\epsilon}_{nG} - \boldsymbol{\epsilon}_{nH}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}_v^T \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{t}^T \delta \mathbf{u} d\partial\Gamma \quad (5)$$

1.2 Implémentation Éléments Finis

Touts les modèles CUF sont implémenté comme User Element dans Abaqus sous la forme d'une élément plaque isoparamétrique à quatre nœuds avec des interpolations de Lagrange bilinéaire de tous les inconnues. Pour les modèles classique utilisant la PVD c'est $\hat{u}_{i,s}(x, y)$ pour la description ESL et $\hat{u}_{i,s}^k(x, y)$ pour la description LW. Pour les modèles RMVT, la même approximation bilinear est utilisé par couche pour les contraintes transverse $\hat{\sigma}_{i3s}^k(x, y)$. Touts les contributions à la rigidité sont intégré exacte en utilisant la quadrature de Gauss.

Pour chaque modèle possible une acronyme unique est introduite, indique dans Tab. 1. Les capacités de satisfaction des conditions de continuité interlaminaire (IC) sont indiqués et également le comportement Zig-Zag de champ de déplacement (ZZ) à l'interface. Aussi les nombres des inconnues par nœuds de maillage dans le plan et listé en fonction de l'orde d'expansion N et le nombres des couches N_l . Pour une modélé 3D dans Ansys avec des éléments quadratique le nombres total des inconnues dépend également des nombres des éléments dans l'épaisseur de chaque couche $N_{e,z}$.

TABLE 1 – Caractéristiques des modèles 2D CUF et 3D Ansys avec degrés de liberté associées

	N=1-4	ZZ	IC	NDOF
PVD	ED N	-	-	$3(N+1)$
	EDz N	✓	-	$3(N+1)$
	LD N	✓	-	$3(N_l N + 1)$
RMVT	EM N	-	✓	$6 + 3N(N_l + 1)$
	EMz N	✓	✓	$6 + 3N(N_l + 1)$
	LM N	✓	✓	$6(N_l N + 1)$
	Ansys	✓	-	$3(N_l(2N_{e,z} + 1) - 1)$

1.3 Singularités en Contraints

Comme cas teste des plaques stratifiées rectangulaires sont considérés, Fig. 1. La dimensions de la plaque sont choisi comme $a = 2b = 4h$. Deux différents chargements uniforme sont appliques : une traction à $(x = \pm a, y, z)$ tel que $\epsilon = 1$ et une pression uniforme applique sur $(x, y, z = h/2)$. La magnitude q_0 de la pression est calibré tel que elle produise la même énergie de déformation que la traction pour le stratifié considéré. Les deux cas de chargements sont illustré dans Fig. 2

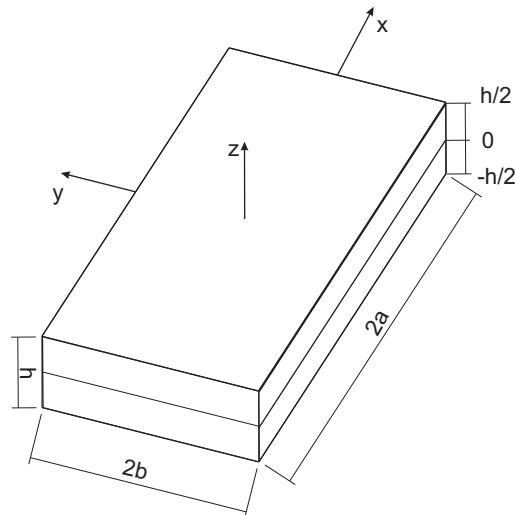


FIGURE 1 – Geometrie de la plaque

En utilisant une simple maillage dans le plan c'était montrer d'être suffisant pour étudier la mécanique et comportement générale dans les stratifiés considérés. Fig. ?? montre les résultats des maillages raffinés pour deux distributions des contraintes transversales : Fig. 3(a) montre l'évolution suivant la demi-largeur de la contrainte transversale de cisaillement σ_{xz} pour le $[\pm 45]_s$ stratifié sous extension longitudinale avec $\epsilon_0 = 1$ et Fig. 3(b) la distribution de la contrainte travers normale σ_{zz} pour le $[0, 90]_s$ stratifié soumis à la pression uniforme q_0 . Par contre, dans les deux cas, avec un raffinement du maillage aucun comportement singulier ne pourrait être observé : il semble que les éléments de plaque LW ordre élevé ne reconnaissent pas la singularité de stress sur un raffinement de la FE dans le plan de maille.

Pour rendre les singularités visibles une autre technique de raffinement était nécessaire : le raffinement du modèle. Avec l'utilisation des plusieurs couches numériques par couche physique, le niveau des contraintes au bord monte significativement.

Le raffinement du modèle en utilisant plusieurs couches numériques était montrer également pour un type de modèle similaire par Saeedi Sab et Caron [10]. Eux ont montré qu'on obtient des niveaux des contraintes plus élevés avec un espacement des couches numériques plus fin vers les interfaces de la couche physique. Les résultats obtenus avec des éléments de LD4 sont présentés dans la Fig. 4. L'implémentation des éléments LM4 montre une nécessité du RAM excessive. En conséquence des calculs avec un nombre de couches numériques supérieur à deux était impossible. L'effet sur l'évolution de la demi-largeur de σ_{zz} pour le stratifié type angle-ply en extension est montré dans Fig. 4(a). Elle montre une augmentation remarquable du niveau de stress sur le bord libre. L'effet sur la distribution suivant l'épaisseur au bord libre d'un stratifié du type cross-ply en cas de flexion est illustré dans la Fig. 4(b). Il est montré que avec les couches mathématiques on obtient aussi une amélioration de la satisfaction de la condition IC sur les surfaces supérieure et inférieure du stratifié ($\sigma_{zz}(z = h/2) = q_0$ and $\sigma_{zz}(z = -h/2) = 0$).

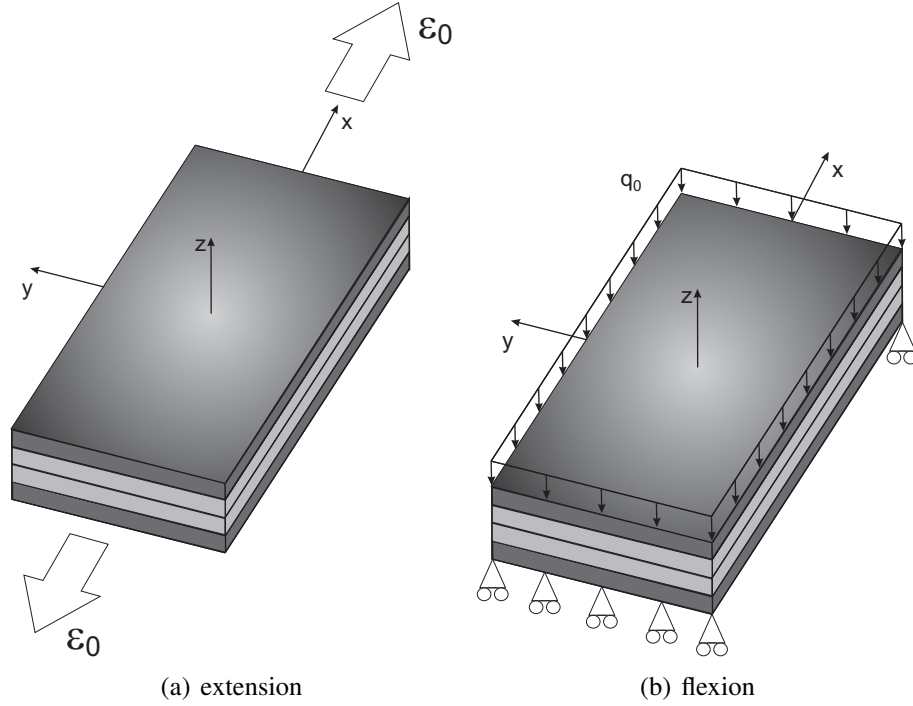


FIGURE 2 – Cas testes considérés pour les effets du bord : stratifié en extension uniforme (gauche) et flexion (droite)

L'augmentation du niveau de stress observé dans la Fig. 4(a) suggère la présence d'une singularité. L'analyse dans la suite se concentre sur la formes des contraintes à une distance très proche du bord libre. La distance normalisé r du bord libre suivant l'interface est présenté comme :

$$r(y) = \frac{b-y}{h_k} \quad \text{where} \quad \begin{cases} y \in [b-h_k, b] \\ r \in [1, 0] \end{cases} \quad (6)$$

Pour des petites distances r , le comportement singulier des contraintes peut être représenté comme [4, 7] :

$$\sigma_{ij}(r) \approx A_{ij} r^{-\alpha_{ij}} \quad \text{with} \quad r \in]0, 1] \quad \text{and} \quad \alpha_{ij} \in [0, 1] \quad (7a)$$

ou, de manière équivalente, comme

$$\log \sigma_{ij}(r) \approx \log A_{ij} - \alpha_{ij} \log r \quad (7b)$$

où α_{ij} est l'ordre de la singularité et de A_{ij} la puissance de singularité, qui peut être liée à un facteur d'intensité de contrainte. Selon l'équation(7b), l'intrigue log-log de $\sigma_{ij}(r)$ serait une ligne de pente $-\alpha_{ij}$ et σ à l'origine à $r = 1$ de A_{ij} . Cette représentation est appliqué à des composant de stress qui sont continues à l'interface (r suivant les interfaces) et qui sont sans conditions sur le bord libre, c'est à dire σ_{xz} (pour les stratifiés type angle-ply seulement) et σ_{zz} .

Fig. 5(a) présente un zoom des distributions suivant la largeur de σ_{xz} entre $1 \leq r \leq 0$, obtenus avec différents modèles pour le stratifié du type angle-ply soumis à l'extension ; Fig. 5 présente les mêmes résultats en échelle logarithmique entre $5 \cdot 10^{-4} \leq r \leq 10^{-1}$. On peut voir que le raffinement doit être encore augmenté en vue de récupérer le comportement linéaire (dans l'échelle logarithmique) de [4] dans tout l'intervalle. Cependant, la convergence est atteint dans l'intervalle

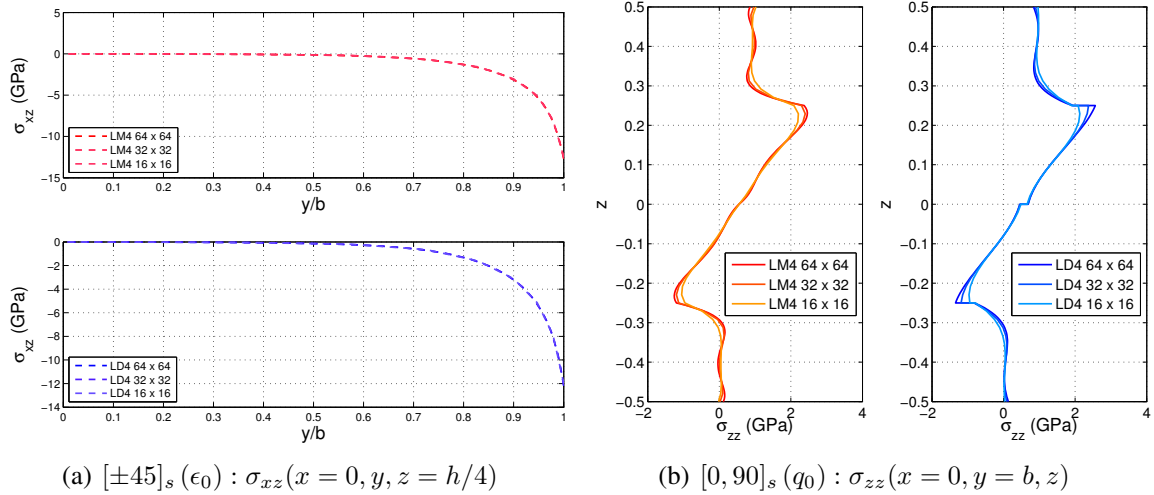


FIGURE 3 – Effet de raffinement du maillage sur les composantes de la contrainte interlaminaires pour une charge d’extension uniforme (à gauche) et la charge de flexion (à droite)

$10^{-2} \leq r \leq 10^{-1}$. Par conséquent, les paramètres A_{xz} et α_{xz} peuvent être évalués via des moindres carrés basé sur les résultats FE au niveau des nœuds à l’intérieur de cet intervalle.

La convergence des valeurs de l’ordre et de la puissance de la singularité avec l’augmentation du nombre de couches mathématiques est montré dans la Fig. 6. La figure met en évidence que les valeurs extraites des éléments de CUF convergent vers la solution de 3D ANSYS. La comparaison avec la solution de BEM [4] montre un très bon accord pour la résistance à la singularité A_{xz} et une différence d’environ 10 % pour la singularité puissance α_{xz} .

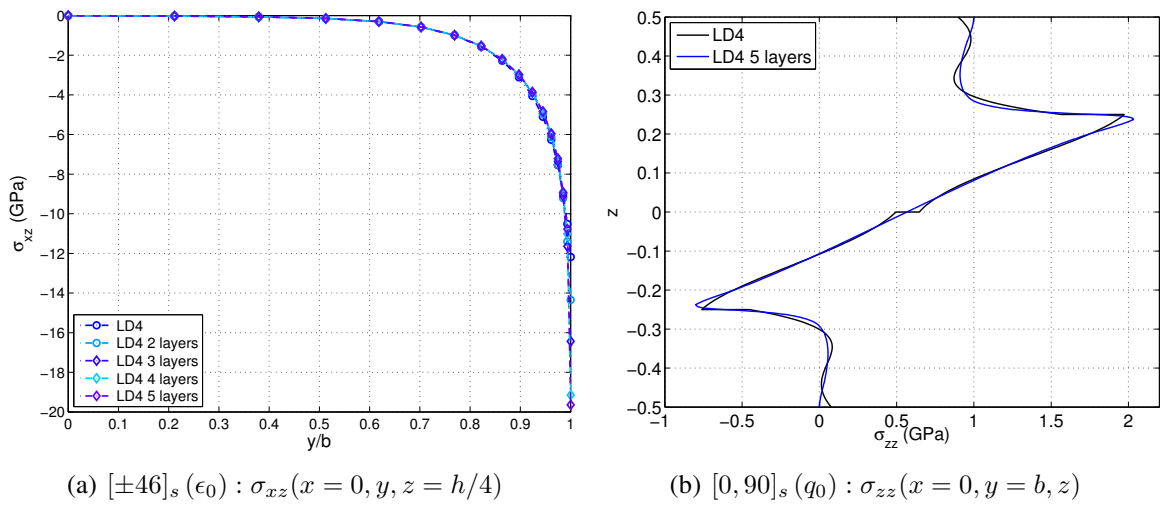


FIGURE 4 – Effet de nombre des couches numériques sur les composants de contrainte libre pour extension uniforme (gauche) et pression uniforme (droite)

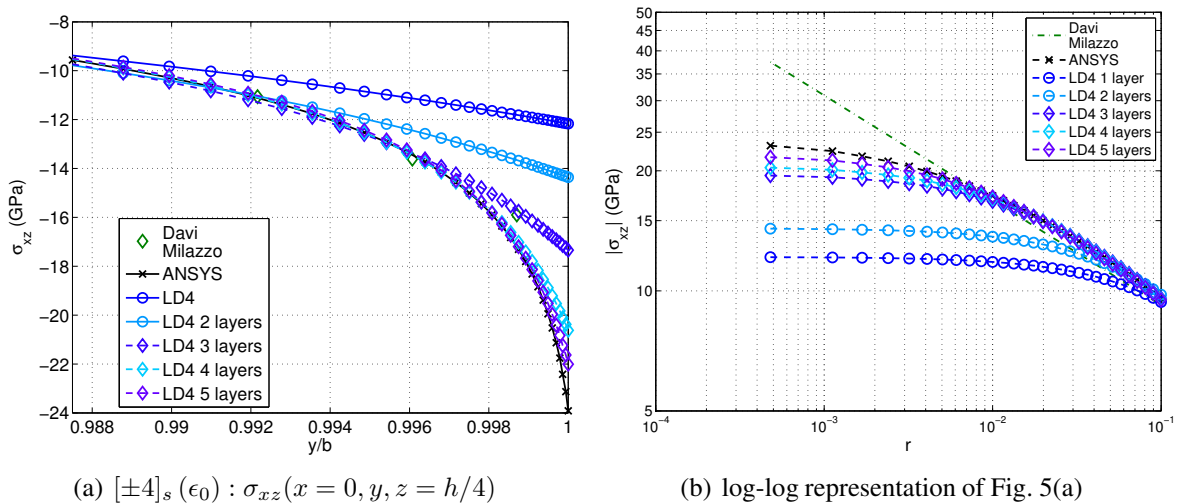


FIGURE 5 – Distribution de σ_{xz} savant l'interface bi-matériaux pour le $[\pm 45]_s$ stratifié soumis à extension dans la voisinage du bord libre (gauche) et représentation log-log (droite)

Model	$ A_{xz} $ [GPa]	α_{xz}
1 × LM4	7.0380	0.1460
2 × LM4	6.2170	0.2123
1 × LD4	6.9099	0.1399
2 × LD4	6.3246	0.1979
3 × LD4	4.9793	0.2894
4 × LD4	4.9186	0.2920
5 × LD4	4.9212	0.2895
Ansys	4.9758	0.2884
Davì & Milazzo	5.0280	0.2630

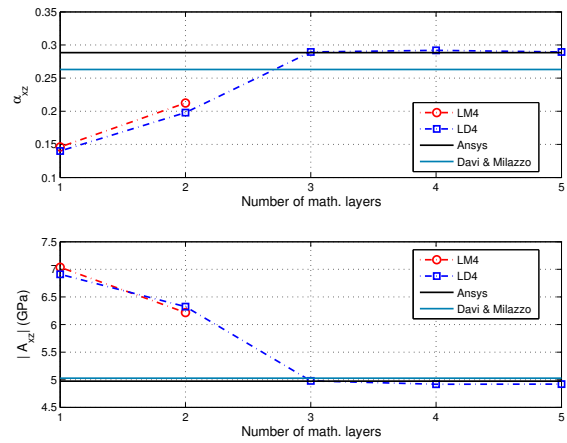


FIGURE 6 – Convergence de l'ordre α_{xz} et puissance A_{xz} de la singularité suivant le nombre des couches numériques ($[\pm 45]_s$ stratifié sous extension)

1.3.1 Évaluation des modèles

Grace aux paramètres de la fonction exponentielle décroissant, il est possible d'évaluer les différents modèles possibles de la CUF. Avec Tab. 1 le première acronyme E est pour une description ESL, L pour Layer Wise. La deuxième D pour l'utilisation du PVD ou M pour RMVT. Le chiffre est l'ordre d'expansion. Pour le cas d'une stratifié $[\pm 45]_s$ angle-ply les résultats sont listé pour les deux chargements dans Tab. 2 en utilisant deux couches numériques par couche physique. La magnitude de la charge de la pression est tel que elle exerce la même énergie de déformation sur la structure comme la extension avec $\epsilon_0 = 1$. Comme référence des résultats avec une code commercial 3D, Ansys, est donné. Le tableau monte un meilleur comportement des modèles avec un ordre élevé et de la description LW par rapport la description ESL. Seulement une petite différence est visible entre l'utilisation de la PVD ou du RMVT pour les modèles LW du même ordre. Touts les modèles ESL ont des coefficient beaucoup plus petit. Pour la comparaison entre le cas de l'extension et de la flexion on peut constater que le niveau des contraintes, donné par $|A_{ij}|$, est beaucoup élevé dans la charge de extension.

TABLE 2 – α_{xz} et $|A_{xz}|$ pour le $[\pm 45]_s$ stratifié soumis à l'extension et flexion

Model	extension		flexion	
	$ A_{xz} $ [GPa]	α_{xz}	$ A_{xz} $ [GPa]	α_{xz}
Ansys	4.9758	0.2884	0.6868	0.3498
LM4	6.2170	0.2123	1.0953	0.2254
LM2	7.0658	0.1165	1.2261	0.1205
LD4	6.3246	0.1979	0.7685	0.2507
LD2	6.6906	0.1077	0.6931	0.1367
EM4	4.6581	0.0522	0.3575	0.0363
EM2	2.4543	0.0589	0.2853	0.0019
EMz2	7.6374	0.3916	0.3691	0.0336
ED4	4.6722	0.0518	1.0959	1.8888
EDz3	2.4559	0.0584	0.2918	0.0587
ED1	3.1530	0.0496	0.0731	0.0393

Le même test est présenté dans Tab. 3 pour une stratifié $[0, 90]_s$ cross-ply. Concernent le comportement des différents modèles, le même caractéristiques sont obtenu comme dans le cas de la stratifié $[\pm 45]_s$ angle-ply. Seulement la différence entre le chargement de l'extension et la flexion est inversé : des contrains plus élevé sont obtenu dans le cas de la flexion. Grace aux couches rigide à l'extérieur du stratifié une niveau des contrains plus important est présente dans le cas de la flexion.

Une visualisation des modèles plus proche aux résultats de référence est donnée par Fig. 7 pour le $[\pm 45]_s$ stratifié, avec le cas de l'extension à gauche et le cas de flexion à droite. Egalement les résultats pour le stratifié $[0, 90]_s$ sont donné dans Fig. 8.

1.3.2 Stratifiés quasi-isotropique

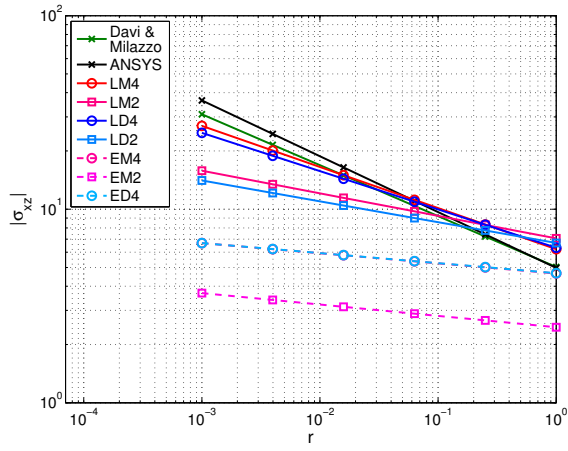
Sur la base des paramètres de singularité $|A_{ij}|$ and α_{ij} , une comparaison entre les différentes interfaces qui caractérisent deux stratifiés quasi-isotrope symétriques est possible. Tout les deux cas de chargement sont considérés : l'extension (ϵ_0) et à la flexion sous une charge uniforme de pression (q_0). Les résultats pour les composants des contraintes interlaminaires librès σ_{zz} et σ_{xz} sont obtenues en utilisant le modèle de LD4 avec deux couches numériques par couche physique.

TABLE 3 – α_{zz} et $|A_{zz}|$ pour le $[0, 90]_s$ stratifié soumis à l'extension et flexion

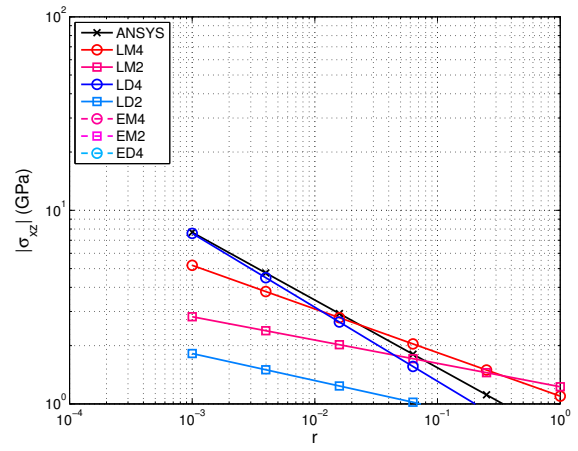
Model	extension		flexion	
	$ A_{zz} $ [GPa]	α_{zz}	$ A_{zz} $ [GPa]	α_{zz}
Ansys	1.7581	0.3320	3.5357	0.1778
LM4	0.3925	0.4775	3.1364	0.2014
LM2	0.6766	0.3229	3.7038	0.1580
LD4	0.2776	0.5646	2.9985	0.2115
LD2	0.5638	0.4161	3.5550	0.1871
EM4	1.0442	0.1069	4.1739	0.0655
EM2	1.0212	0.1193	2.8712	0.0073
EMz2	0.0002	0.2271	4.2935	0.0024
ED4	0.7351	0.1380	3.9740	0.0680
EDz3	1.0670	0.1174	3.3530	0.0616
ED1	0.3145	0.0002	4.1270	0.0002

The quasi-isotropic laminate $[\pm 45, 0, 90]_s$ is first considered (Fig. 9) and the interlaminar stresses are evaluated at the following three interfaces, starting from the symmetry plane : the (0, 90) cross-ply interface, the $(-45, 0)$ interface and the (± 45) angle-ply interface. The results are reported in Fig. 9(a) for the extension load and in Fig. 9(b) for the bending load. The strongest singularity appears to occur for σ_{zz} at the (0, 90) interface. Note that at the same interface, no singularity is present for the transverse shear stress ($\alpha_{xz} = 0$). Considering the angle-ply interface, it is worth remarking that the singularity power of σ_{xz} and σ_{zz} are not the same ($|\alpha_{zz}| > |\alpha_{xz}|$), and that the singularity strength is higher for the transverse shear stress σ_{xz} ($|A_{xz}| > |A_{zz}|$). As far as the free-edge effect under bending load is concerned, it appears that the strongest singularity is associated to σ_{xz} at the angle-ply interface and that its strength is smaller than in the extension case.

Le stratifié quasi-isotrope $[\pm 45, 0, 90]_s$ est considéré comme première (Fig. 9) et les contraintes interlaminaires sont évaluées dans les trois interfaces suivantes, en partant du plan de symétrie : l'interface (0, 90) cross-ply, le $(-45, 0)$ interface et le (± 45) interface angle-ply. Les résultats sont présentés dans Fig. 9(a) pour la charge de l'extension et de la Fig. 9(b) pour la charge de flexion. La singularité la plus forte se produit pour σ_{zz} au (0, 90) interface. Notez que lors de la même interface, pas de singularité est présente pour la contrainte de cisaillement transversal ($\alpha_{xz} = 0$). Considérant l'interface angle-ply, il est intéressant de remarquer que la puissance de la singularité de σ_{xz} et σ_{zz} ne sont pas les mêmes ($|\alpha_{zz}| > |\alpha_{xz}|$), et que la puissance de la singularité est plus élevée pour la charge de cisaillement transversal σ_{xz} ($|A_{xz}| > |A_{zz}|$). En ce qui concerne l'effet de bord libre en charge de flexion, il semble que la singularité la plus forte est associée à σ_{xz} à l'interface angle-ply et que sa force est moindre que dans le cas d'extension.

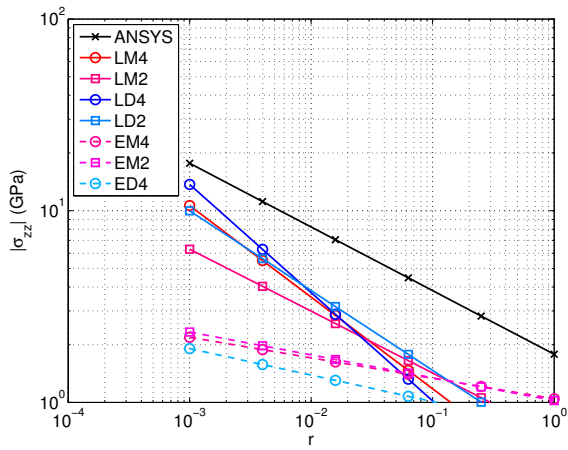


(a) $[\pm 45]_s (\epsilon_0) : \sigma_{xz}(x = 0, r, z = h/4)$

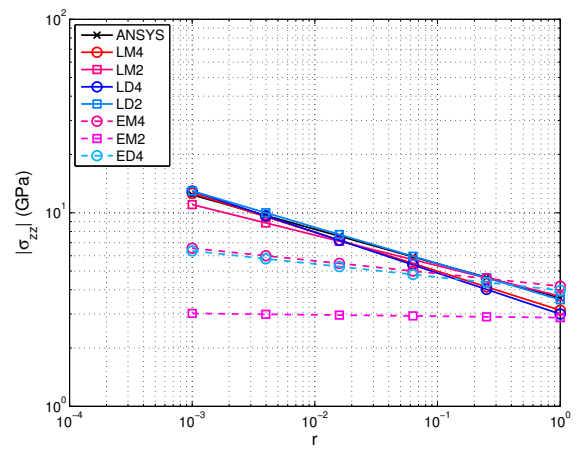


(b) $[\pm 45]_s (q_0) : \sigma_{xz}(x = 0, r, z = h/4)$

FIGURE 7 – Contraints transversale de cisaillement $\sigma_{xz}(r)$ en échelle double logarithmique pour le $[\pm 45]_s$ stratifié soumis à l'extension (gauche) et flexion (droite) : Évaluation des modèles CUF

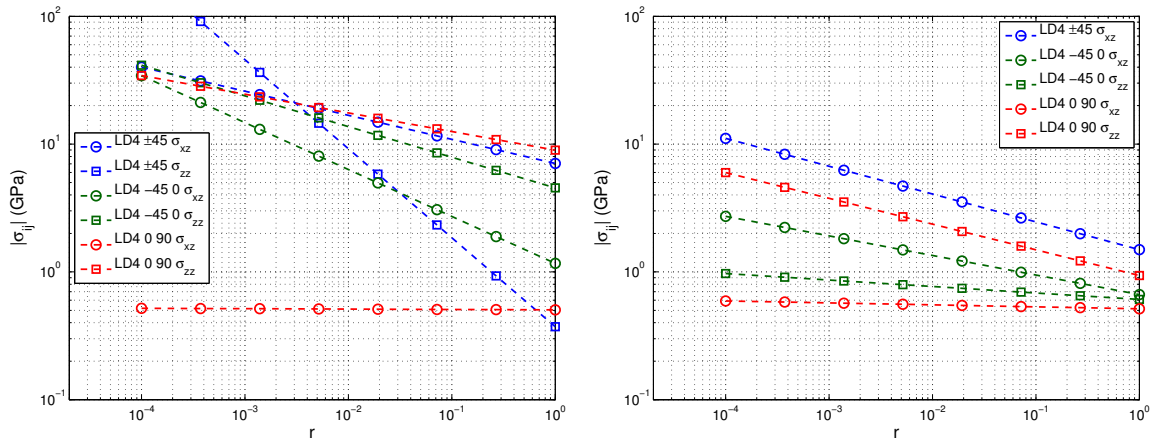


(a) $[0, 90]_s (\epsilon_0) : \sigma_{zz}(x = 0, r, z = h/4)$



(b) $[0, 90]_s (q_0) : \sigma_{zz}(x = 0, r, z = h/4)$

FIGURE 8 – Contraints transversale normaux $\sigma_{zz}(r)$ en échelle double logarithmique pour le $[0, 90]_s$ stratifié soumis à l'extension (gauche) et flexion (droite) : Évaluation des modèles CUF.



(a) $[\pm 45, 0, 90]_s(\epsilon_0) : \{\sigma_{xz}, \sigma_{zz}\}(x = 0, r, z = h/4)$ (b) $[\pm 45, 0, 90]_s(q_0) : \{\sigma_{xz}, \sigma_{zz}\}(x = 0, r, z = h/4)$

FIGURE 9 – Contraintes interlaminar sur les interfaces du $[\pm 45, 0, 90]_s$ stratifié sous extension (gauche) et flexion (droite)

2 eXtended Variational Formulation - XVF

2.1 Formulation

Le Principe des déplacements virtuels Eq. 3 est étendue maintenant de tel sorte qu'on introduise deux champs de déplacements indépendants. L'analyse dans la première partie du travail a montré une nécessité d'application des modèles d'ordre supérieur dans le voisinage du bord libre. Cependant, aucune différence significative ne peut être notée pour les modèles plutôt simples loin des bords libres au centre des plaques composites. La deuxième partie de ce travail est donc dédiée au couplage de modèles cinématiques incompatibles. L'utilisation de modèles complexes et coûteux est limitée aux domaines d'intérêt locaux tandis que les modèles économiques simples seront appliqués aux domaines globaux. La « Formulation variationnelle étendue (XVF) » de Blanco, feijoo et Urquiza [1] est identifiée comme le moyen le plus approprié pour coupler les modèles de dimensionnalité homogènes mais cinématiquement hétérogènes. Comme il utilise une configuration avec une interface commune sans recouvrement des domaines, les efforts supplémentaires pour établir le couplage sont limités. En outre, le XVF offre la possibilité d'adapter les conditions imposées à l'interface en utilisant uniquement un paramètre scalaire γ . Il sera démontré que pour le problème de dimensionnalité homogène à l'étude, deux conditions différentes peuvent être imposées par ce paramètre dont la première aux conditions fortes est appliquée de la même façon en utilisant la méthode des « Multi Point Constraints (MPC) » et dont la seconde impose les conditions faibles à l'interface.

Une nouveau terme de couplage à l'interface entre les deux champs de déplacement, chauqu'un dans sa propre sous-domaine, doit être établie :

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{couple}({}^s \mathbf{u}, {}^c \mathbf{u}, {}^s \boldsymbol{\lambda}, {}^c \boldsymbol{\lambda}, \delta {}^s \mathbf{u}, \delta {}^c \mathbf{u}, \delta {}^s \boldsymbol{\lambda}, \delta {}^c \boldsymbol{\lambda}) = \\ \gamma \int_{\Gamma_a} {}^s \boldsymbol{\lambda} \cdot (\delta {}^s \mathbf{u} - \delta {}^c \mathbf{u}) d\Gamma + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} {}^c \boldsymbol{\lambda} \cdot (\delta {}^s \mathbf{u} - \delta {}^c \mathbf{u}) d\Gamma \\ + \gamma \int_{\Gamma_a} \delta {}^s \boldsymbol{\lambda} \cdot ({}^s \mathbf{u} - {}^c \mathbf{u}) d\Gamma + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} \delta {}^c \boldsymbol{\lambda} \cdot ({}^s \mathbf{u} - {}^c \mathbf{u}) d\Gamma \end{aligned} \quad (8)$$

Tableau 4 donne une sommaire des nouveaux inconnus dans le deux sous-domaines Ω_s et Ω_c .

TABLE 4 – Inconnues et significations dans les deux sous-domaines

	Ω_s	Ω_c
stress tensor	${}^s \boldsymbol{\sigma}$	${}^c \boldsymbol{\sigma}$
strain tensor	${}^s \boldsymbol{\epsilon}$	${}^c \boldsymbol{\epsilon}$
displacement	${}^s \mathbf{u}$	${}^c \mathbf{u}$
virtual displacement	$\delta {}^s \mathbf{u}$	$\delta {}^c \mathbf{u}$
external traction	${}^s \mathbf{t}$	${}^c \mathbf{t}$
external force	${}^s \mathbf{f}$	${}^c \mathbf{f}$
traction at interface	${}^s \boldsymbol{\lambda}$	${}^c \boldsymbol{\lambda}$
virtual traction at interface	$\delta {}^s \boldsymbol{\lambda}$	$\delta {}^c \boldsymbol{\lambda}$

Le Principe des déplacements virtuels s'écrit maintenant sous la forme suivante :

Trouver $\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_c, \boldsymbol{\lambda}_s, \boldsymbol{\lambda}_c \in \mathcal{U}_s, \mathcal{U}_c, \mathcal{L}_s, \mathcal{L}_c$ tel que :

For a given $\gamma \in [0, 1]$ find $({}^s \mathbf{u}, {}^c \mathbf{u}, {}^s \boldsymbol{\lambda}, {}^c \boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{U}_s \times \mathcal{U}_c \times \mathcal{L}_s \times \mathcal{L}_c$ such that :

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{int}({}^s \mathbf{u}, \delta {}^s \mathbf{u}) + \delta \Pi_{int}({}^c \mathbf{u}, \delta {}^c \mathbf{u}) = \\ \delta \Pi_{couple}({}^s \mathbf{u}, {}^c \mathbf{u}, {}^s \boldsymbol{\lambda}, {}^c \boldsymbol{\lambda}, \delta {}^s \mathbf{u}, \delta {}^c \mathbf{u}, \delta {}^s \boldsymbol{\lambda}, \delta {}^c \boldsymbol{\lambda}) \\ + \delta \Pi_{ext}({}^s \mathbf{u}) + \delta \Pi_{ext}({}^c \mathbf{u}) \\ \forall (\delta {}^s \mathbf{u}, \delta {}^c \mathbf{u}, \delta {}^s \boldsymbol{\lambda}, \delta {}^c \boldsymbol{\lambda}) \in \delta \mathcal{U}_s \times \delta \mathcal{U}_c \times \delta \mathcal{L}_s \times \delta \mathcal{L}_c \end{aligned} \quad (9)$$

avec les définitions suivants pour tous les deux domaines :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_s &= \{ {}^s\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_s); {}^s\mathbf{u}|_{\Gamma_D} = {}^s\bar{\mathbf{u}} \} \\ \mathcal{U}_c &= \{ {}^c\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_c); {}^c\mathbf{u}|_{\Gamma_D} = {}^c\bar{\mathbf{u}} \}\end{aligned}\quad (10)$$

Une extension du théorème variationnelle mixte de Reissner de la même façon est possible mais pas contenu de ce travail.

2.2 Tests numériques

Une poutre symétrique et appuyée avec une charge localisée au milieu est considérée. La configuration de test est comme dans Fig. 10 en utilisant deux interfaces. Ça permet de utiliser deux sous-domaines avec des éléments de la cinématique complexe à chaque extrémité de la demi-modèle de la poutre, Fig. 11. Trois différents modèles cinématiques sont considérés : le modèle Sin-z2 avec pincement comme modèle complexe et les deux cinématiques simples, le modèle Euler-Bernoulli, dit Euler et Timoshenko, dit Timo.

Euler-Bernoulli Theory Le modèle de cinématique plus simple est la cinématique d'Euler-Bernoulli pour les poutres et une cinématique de Kirchhoff pour les plaques [6]. Comme cette théorie ne comprend pas les effets de cisaillement transversaux, la section reste perpendiculaire à la fibre neutre. Pour la structure de la poutre le comportement mécanique est simplifié avec un comportement de contraintes planes généralisé dans le plan xz . La formulation du champ de déplacement pour une structure de poutre est la suivante :

$$\begin{cases} u_1(x, z) &= v_0(x) - z w'_0(x) \\ u_3(x, z) &= w_0(x) \end{cases}\quad (11)$$

Comme le cisaillement est l'un des éléments importants pour les structures en couches, l'hypothèse cinématique prise ne sont pas suffisantes pour leur description. Par conséquent, pour les poutres en matériau isotrope élancement moyen ou mince, cette théorie donne de bons résultats.

Timoshenko Theory L'inclusion de cisaillement transversale constante dans les hypothèses du modèle donne à la First-Order Shear Deformation Theory, pour les poutres aussi connu comme la théorie Timochenko [11] et pour les plaques aussi connu comme la théorie de Reissner-Mindlin. La section n'est pas forcée plus rester perpendiculaire à la ligne de référence ou la surface. A la différence de la théorie d'Euler-Bernoulli, une rotation supplémentaire θ est présente, mais constante à travers l'épaisseur. Par conséquent, une contrainte de cisaillement constante, dans la partie est présente. Par conséquent, le champ de déplacement ne peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} u_1(x, z) &= v_0(x) + z \theta(x) \\ u_3(x, z) &= w(x) \end{cases}\quad (12)$$

Pour d'autres types de poutres, une distribution quadratique de la cisaille est prévu, qui s'annule aux surfaces externes. Il est donc favorable de modéliser directement une distribution parabolique du cisaillement transverse. Par conséquent, un modèle avec une rotation variable de la section transversale à travers l'épaisseur est nécessaire.

Touratier Sinus Theory avec déformation transverse normale Enfin le modèle Touratier sinus avec inclusion de la déformation dans la direction transversale, nommée Sin-z2 Theory. Le champ

de déplacement dans la direction 3 ou z est élargi aux termes jusqu'au deuxième ordre. Une forte relation entre la déformation et son dérivé n'est plus implicite :

$$\begin{cases} u_1(x, z) = v_0(x) - z v_1(x) + \left(\frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h}\right) (\theta(x) + v_1(x)) \\ u_3(x, z) = w_0(x) + z w_1(x) + z^2 w_2(x) \end{cases} \quad (13)$$

2.2.1 Matériaux homogène

Pour une matériaux homogène la propagations du niveau des contraintes suivant le longueur de la poutre est montré dans Fig. 12 pour les contraintes normaux. Dans Fig. 13 la propagation des contraintes transverse sont montré.

On observe des comportements différents pour la XVF avec $\gamma = 0$ et $\gamma = 1$. Pour $\gamma = 0$ on observe des perturbations dans la sous-main complexe près d'interface. Les conditions fortes imposé à l'interface forcent le modèle complexe d'adapter le niveau du modèle simple. En contraire, pour $\gamma = 1$ un changement soudain des niveau des contraintes peuvent être observé. Les contraintes adoptent tout suite le niveau de la contrainte du modèle utilisé dans le domaine présent. Les conditions faibles, imposé avec $\gamma = 1$ aident à réduire la taille des domaines basés sur le modèle de la cinématique complexe tout en gardant leur précision locale. Plus des détails sur l'application de la XVF sont publié dans [12]

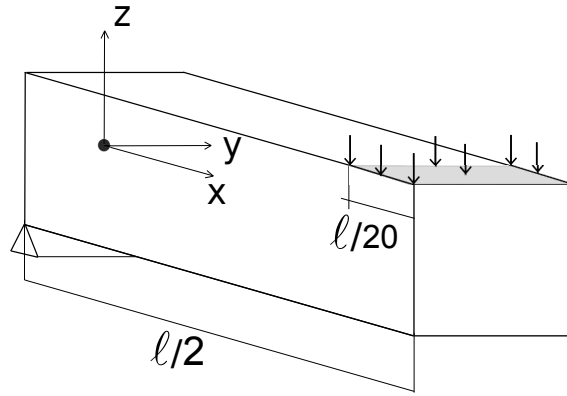


FIGURE 10 – configuration de test d'une poutre soumis à une charge locale

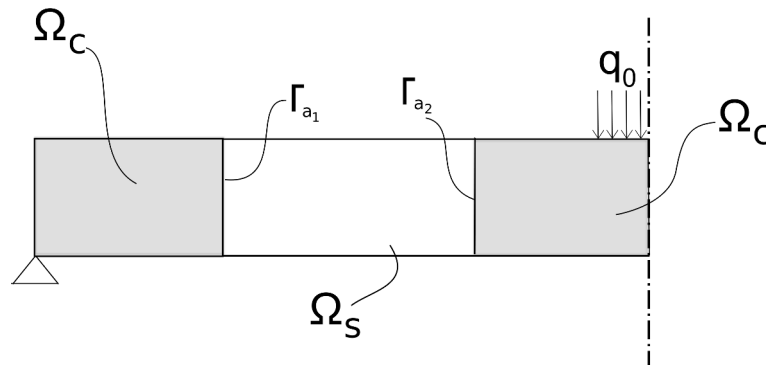


FIGURE 11 – Position des sous-domaines complexe et la domaine globale du modèle simple

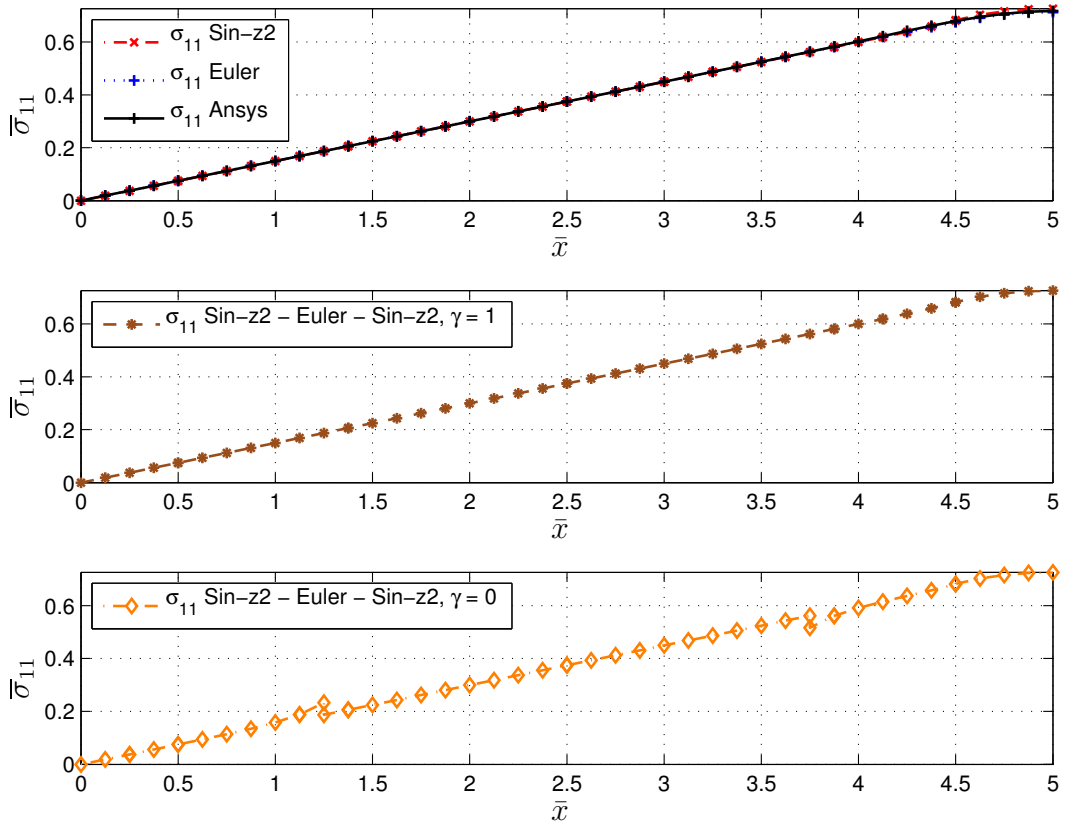


FIGURE 12 – Matériaux homogène : $\bar{\sigma}_{11}$ à $z = -\frac{h}{2}$ avec différentes modèles cinématiques

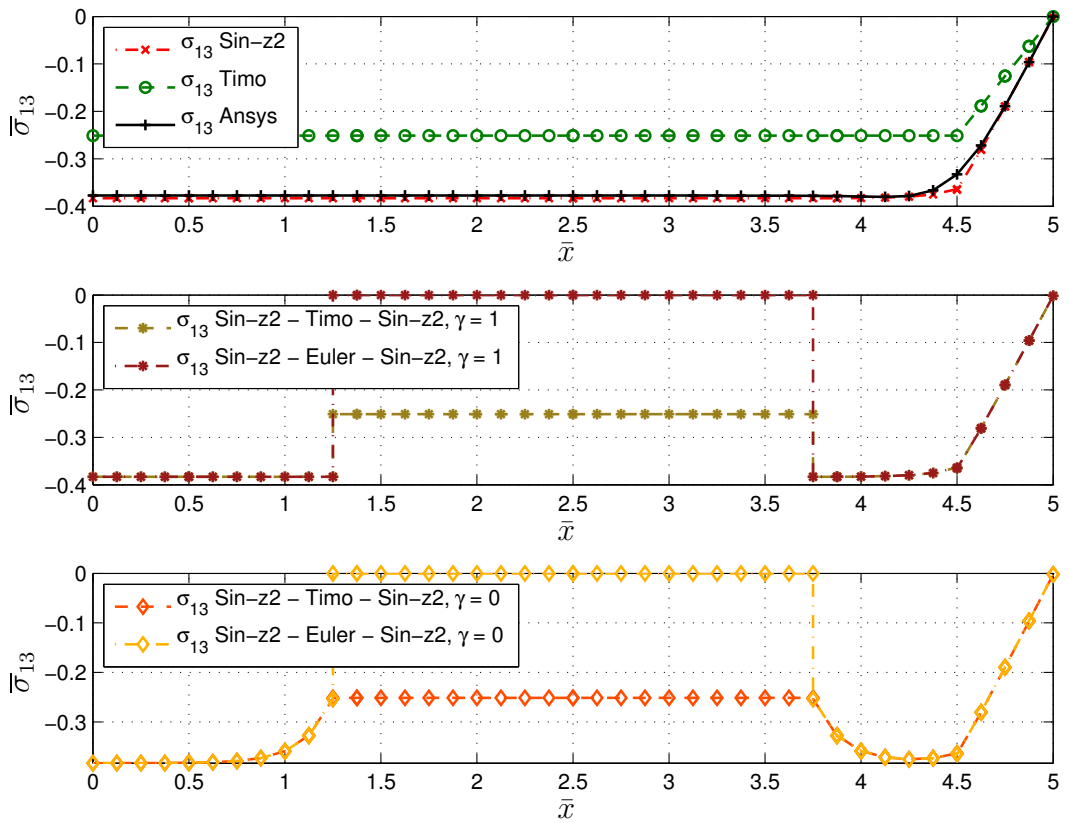


FIGURE 13 – Matériaux homogène : $\bar{\sigma}_{13}$ à $z = 0$ avec différentes modèles cinématiques

2.2.2 Multicouches

Le même test est appliqué à des structures multicouches, illustré dans Fig. 14. La configuration du sandwich est pris d'un test de Kapuria [5].

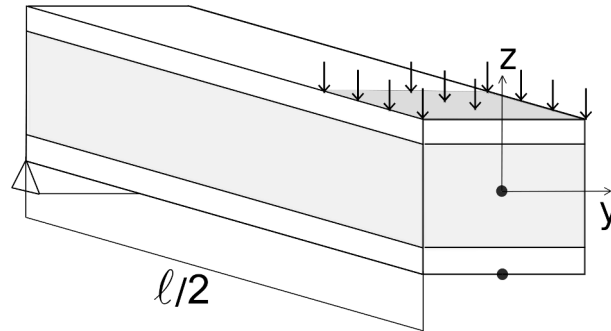


FIGURE 14 – Configuration avec une poutre sandwich soumis à une pression locale

Pour l'utilisation de la XVF, une modification du produit dual est appliqué. Grâce à des différentes rigidités des différentes couches dans le stratifié des problèmes de conditionnement peuvent apparaître. Pour améliorer le comportement, le coefficient de rigidité C_{11} de chaque couche est maintenant inclus dans le produit de la dualité, en plus de la géométrie, que seulement ne suffit pas. Les produits de la dualité des structures multicouches sont intégrées sur tous les N_L couches, en comptant à partir de $k = 1, \dots, N_L$:

$$\sum_{k=1}^{N_L} C_{11}^k \int_{h_{k-1}}^{h_k} {}^i \delta \lambda^j \mathbf{u} dz \quad (14)$$

$$(15)$$

Les résultats pour les distributions de contraintes suivant la longueur de la poutre est donné par Fig. 15 pour le cas des contraintes normaux $\bar{\sigma}_{11}$ et pour les contraintes transversaux $\bar{\sigma}_{13}$ dans Fig. 16. Avec l'opérateur modifié le même comportement comme pour les matériaux homogène est assurée. Sans l'opérateur modifié les perturbations à l'interface apparaissent pour tout les valeurs de γ avec une magnitude qui perturbe tout les résultats.

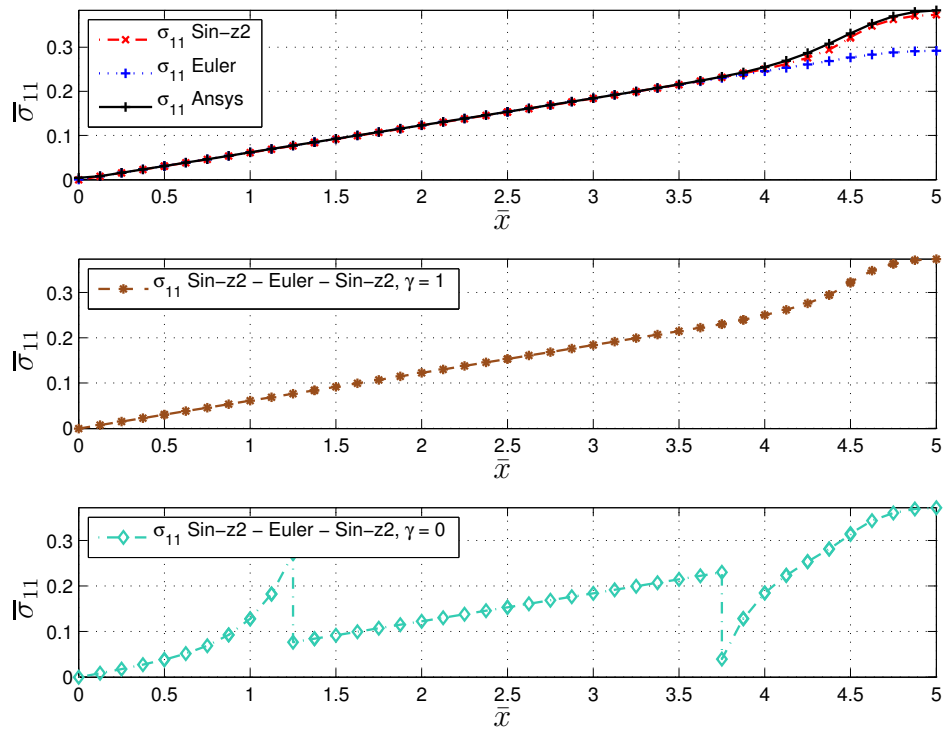


FIGURE 15 – Matériaux Sandwich : $\bar{\sigma}_{11}$ à $z = -\frac{h}{2}$ avec combinaisons Euler suivant x

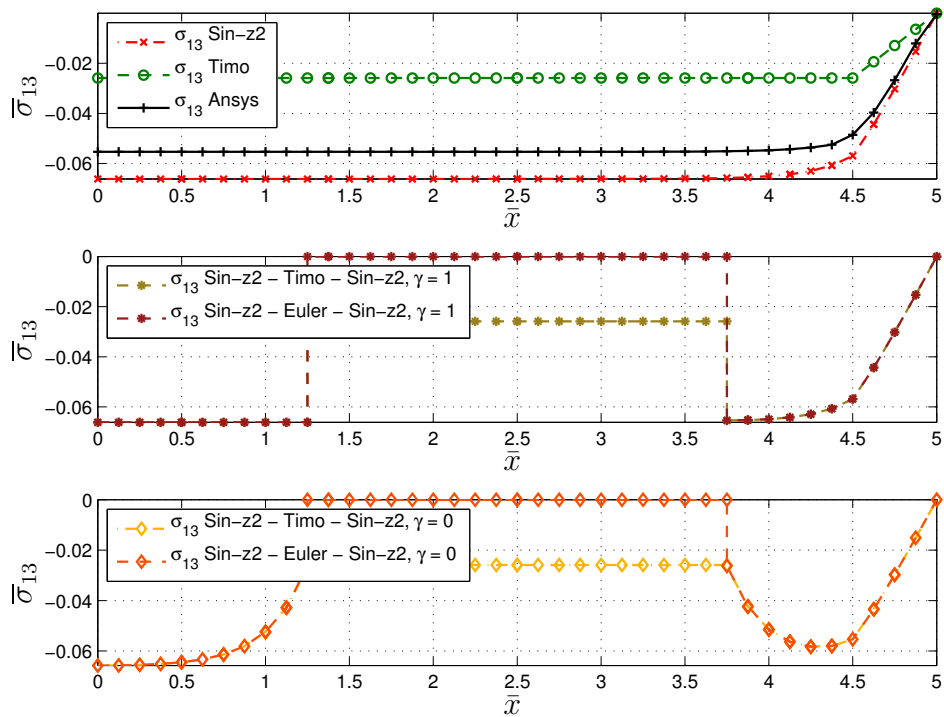


FIGURE 16 – Matériaux Sandwich : $\bar{\sigma}_{13}$ à $z = 0$ avec combinaisons Euler et Timoshenko suivant x

Réduction des modèles Comme vu précédemment, le couplage des différentes cinématiques peut induire une zone de transition qui ne doit pas perturber les résultats dans la région d'intérêt. Par conséquent, l'influence de la taille de la zone complexe est étudié ensuite pour les deux cas $\gamma = 0$ et $\gamma = 1$. Un maillage régulier constitué de 20 éléments est utilisé pour la moitié de la poutre. En faisant varier le nombre d'éléments dans la partie centrale de la demi-poutre, la taille de la sous-domaine simple et complexe est varié par conséquent. Le nombre d'éléments dans la partie centrale de la poutre correspondant à la cinématique simples est augmentée de 0 (Sinus z^2 monomodel) à 18. Pour ce dernier, un seul élément à chaque extrémité de la poutre est associée à la cinématique complexe. Fig. 17 et 18 présentent la variation du l'erreur sur la valeur maximale de $\bar{\sigma}_{11}$ et $\bar{\sigma}_{13}$ par rapport au nombre d'éléments simples (c'est à dire la taille de la zone centrale simple). Ce erreur est défini comme $\Delta\sigma_{ij} = 100 \frac{\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}^{Sin-z2}}{\bar{\sigma}_{ij}^{Sin-z2}}$. On peut déduire de résultats que $\gamma = 1$ donne de meilleurs résultats, en particulier pour la contrainte de cisaillement transversal. Un seul élément complexe peut être utilisé sans affecter la qualité des résultats à la fin de la poutre. Pour $\gamma = 0$, la taille de la zone complexe doit être multipliée par quatre pour obtenir un erreur total de 2 %. En ce qui concerne la contrainte dans le plan qui la concerne, soit un gain de deux peut être obtenue. Pour illustrer l'efficacité de l'approche de XVF avec $\gamma = 1$, la distribution de la contrainte de cisaillement transversal est représenté sur la Fig. 19 avec un domaine globale comprenant 16 éléments simples. Nous voyons clairement que la variation de la contrainte est perturbé pour $0 < x < \frac{l}{20} = \frac{h}{2}$ dans la région d'intérêt pour $\gamma = 0$. Ce n'est pas le cas pour $\gamma = 1$ où les résultats des modèles complexes sont récupérés dans cette région. Cette caractéristique intéressante permet de limiter le modèle plus riche dans une très petite région où les contraintes précises doivent être récupérés. Il peut donner à une réduction drastique du coût de calcul.

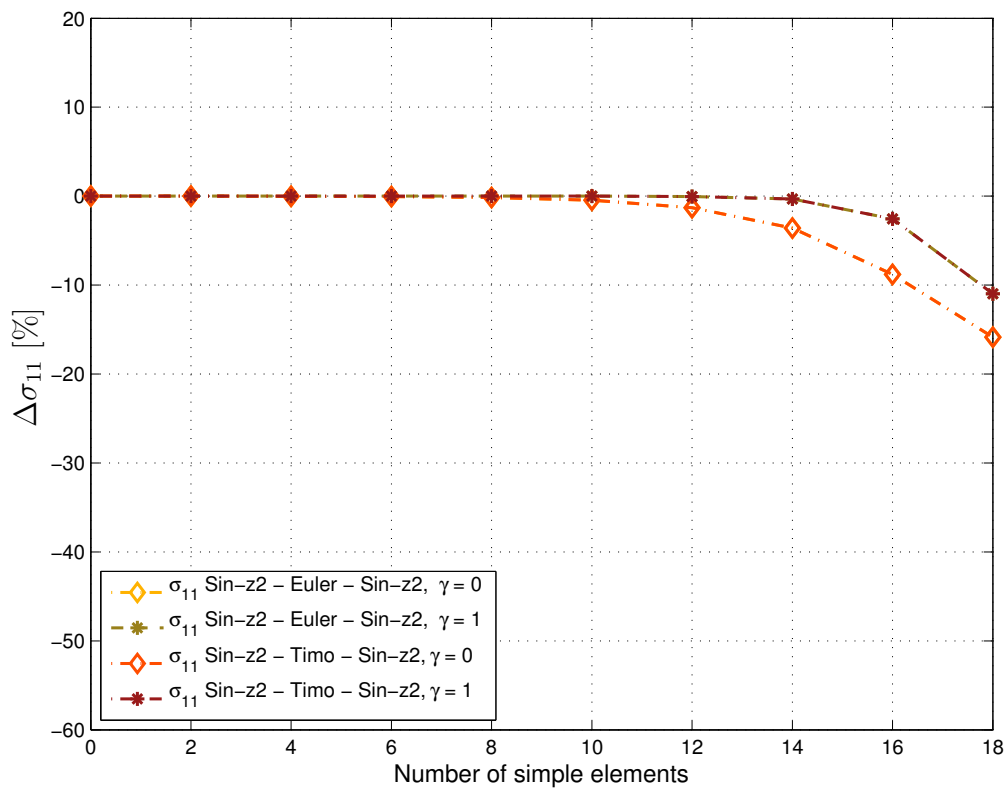


FIGURE 17 – Matériaux Sandwich : Error relative sur $\bar{\sigma}_{11}$ pour nombre croissant des éléments simple

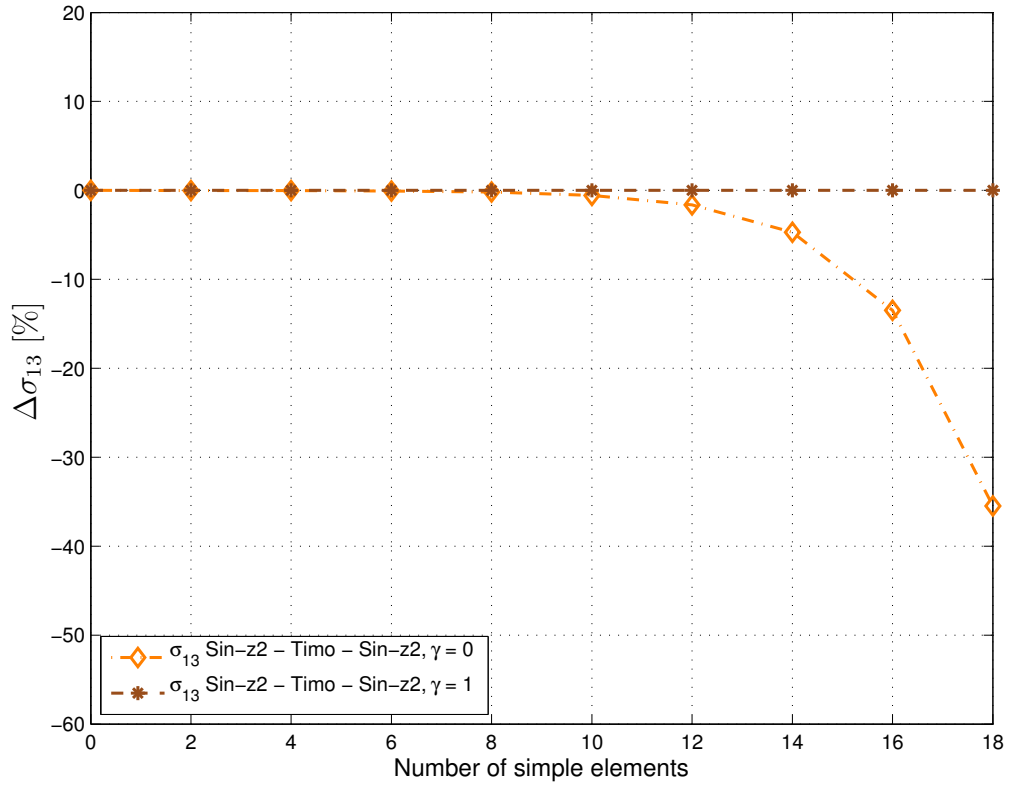


FIGURE 18 – Matériaux Sandwich : Error relative sur $\bar{\sigma}_{13}$ pour nombre croissant des éléments simple

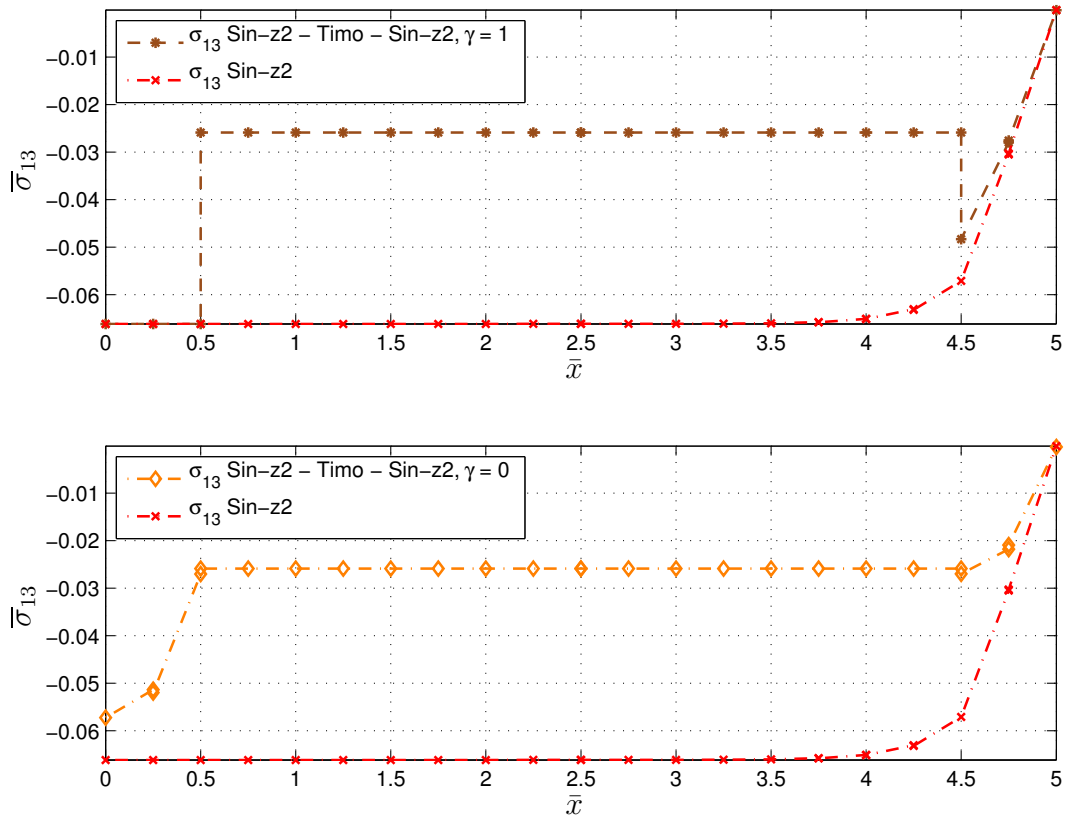


FIGURE 19 – Matériaux Sandwich : $\bar{\sigma}_{11}$ suivant x avec 16 éléments Timoshenko

Références

- [1] P.J. Blanco, R.A. Feijóo, and S.A. Urquiza. A variational approach for coupling kinematically incompatible structural models. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 197 :1577–1602, 2008.
- [2] E. Carrera. Developments, ideas and evaluations based upon reissner’s mixed variational theorem in the modeling of multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Review*, 54, 2001.
- [3] E. Carrera. Theories and finite elements for multilayered plates and shells : A unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 10(3) :215–296, 2003.
- [4] G. Davì and A. Milazzo. Boundary element solution for free edge stresses in composite laminates. *Journal of Applied Mechanics*, 64 :877–884, 1997.
- [5] S. Kapuria, P. C. Dumir, and N.K. Jain. Assessment of zigzag theory for static loading, buckling, free and forced response of composite and sandwich beams. *Composite Structures*, (64) :317–327, 2004.
- [6] G. Kirchhoff. Über das gleichgewicht und die bewegungen einer elastischen scheibe. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 40 :51–88, 1850.
- [7] I.S. Raju and J.H. Crews. Interlaminar stress singularities at a straight free edge in composite laminates. *Computers & Structures*, 14(1-2) :21–28, 1981.
- [8] E. Reissner. On a certain mixed variational theorem and a proposed application. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20 :1366–1368, 1984.
- [9] E. Reissner. On a mixed variational theorem and on a shear deformable plate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23 :193–198, 1986.
- [10] N. Saeedi, K. Sab, and J.-F. Caron. Delaminated multilayered plates under uniaxial extension. part ii : Efficient layerwise mesh strategy for the prediction of delamination onset. *International Journal of Solids and Structures*, 49 :3727–3740, 2012.
- [11] S.P. Timoshenko. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, 1970.
- [12] C. Wenzel, P. Vidal, M. D’Ottavio, and O. Polit. Coupling of heterogeneous kinematics and finite element approximations applied to composite beam structures. *Composite Structures*, 116 :177–192, 2014.