Université Paris Nanterre
200 av. de la République
92001 Nanterre Cedex
www.u-paris10.fr

SISSA
ma per seguir virtute e canoscenza

Membre de l'université Paris Lumières
ED 139 – Connaissance, Langage, Modélisation

Luca Tamanini

Analyse et géométrie des espaces RCD par le biais du problème de Schrödinger

Résumé en français

Thèse présentée et soutenue publiquement le 29 septembre 2017
en vue de l'obtention du doctorat de Mathématiques
de l'Université Paris Nanterre

sous la direction de M. Christian Léonard (Université Paris Nanterre) et de M. Nicola Gigli (SISSA - Trieste)

Membre du jury :	M. Andrei Agrachev	Professeur, SISSA
Membre du jury :	M. Massimiliano Berti	Professeur, SISSA
Membre du jury :	M. Gianni Dal Maso	Professeur, SISSA
Rapporteur :	M. Ivan Gentil	Professeur, Lyon 1
Co-directeur de thèse :	M. Nicola Gigli	Professeur, SISSA
Directeur de thèse :	M. Christian Léonard	Professeur, Paris Nanterre
Membre du jury :	M. Olivier Raimond	Professeur, Paris Nanterre
Rapporteur :	M. Giuseppe Savaré	Professeur, Università di Pavia

Remerciements

Je voudrais d'abord remercier mes directeurs de thèse M. Christian Léonard et M. Nicola Gigli : le long des trois derniers ans ils m'ont guidé à travers la recherche, constamment supporté et aidé, mais surtout ils m'ont toujours transmis une attitude inspirante et stimulante envers les mathématiques et ses problèmes.

Je tiens à remercier aussi G. De Philippis, E. Pasqualetto et C. Rigoni pour tous les discussions et échanges d'idées qu'on a eu lorsque un problème, ou plus qu'un, survenait. Mais plus en général j'aimerais remercier tous les amis de la SISSA et de Nanterre avec lesquels de manière plus ou moins assidue j'ai eu l'occasion et la chance de parler mathématiques et non seulement.

Je suis aussi réconnaissant envers tous les professeurs, chercheurs, post-docs, doctorants et étudiants de la SISSA et du laboratoire MODAL'X, parce que c'est aussi grâce à eux que j'ai affiné mon éducation.

Mais pour ce qui je suis, je ne peux pas m'abstenir d'être toujours infiniment réconnaissant envers mes parents et Arianna, envers mes proches et tous les amis, avec lesquels j'ai partagé tous les instants de ma vie.

Introduction

Dans les derniers dix ans, l'intéresse pour les espaces métriques mesurés est augmenté de manière considérable, comme témoigné par la littérature riche et florissante. Pour une liste non exhaustive des résultats les plus importants sur le sujet, le lecteur peut s'adresser à [20], [30], [31], [13], [1], [2], [11], [3], [26], [27], [14], [8], [10], [16], [4], [23], [6], [5]. Les points de départ de cette recherche si active et prospère ont été les travaux-phare [20] et [30], [31], qui ont lié pour la première fois des bornes inférieures sur la courbure de Ricci sur des espaces métriques mesurés à des propriétés de fonctionnelles de type 'entropie' en connexion avec la géométrie de l'espace de Wasserstein. Successivement ([1]) on s'est aperChcu que l'analyse de Sobolev est aussi associée à la géométrie Wasserstein et donc, en construisant sur ces considérations, la définition originelle d'espace CD à la Lott-Sturm-Villani a evolué vers celle d'espace RCD ([2], [11]).

Un exemple de lien entre l'analyse de Sobolev et la géométrie de l'espace de Wasserstein est donné par l'énoncé suivant, montré dans [8] :

Théorème 0.1 (Formule de dérivation du premier ordre)**.** *Soit* $(\mathrm{X}, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ *un espace* $\mathsf{RCD}(K, \infty)$*,* (μ_t) *une géodésique Wasserstein constituée par des mesures à support borné telles que* $\mu_t \leq C\mathfrak{m}$ *pour tout* $t \in [0,1]$ *et une certaine constante* $C > 0$*. Alors pour toute* $f \in W^{1,2}(\mathrm{X})$ *la fonction*

$$[0,1] \ni t \quad \mapsto \quad \int f \,\mathrm{d}\mu_t$$

est C^1 *et l'identité suivante est satisfaite*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int f \,\mathrm{d}\mu_t\big|_{t=0} = -\int \mathrm{d}f(\nabla\varphi)\,\mathrm{d}\mu_0,$$

où φ *est un potentiel de Kantorovich localement lipschitzien de* μ_0 *à* μ_1*.*

Rappelons que sur un espace $\mathsf{RCD}(K, \infty)$ toute géodésique Wasserstein (μ_t) entre deux mesures à support et densité bornés a elle-même densité bornée de manière uniforme, c'est à dire $\mu_t \leq C\mathfrak{m}$ pour tout $t \in [0,1]$ et une certaine constante $C > 0$ ([27]), de sorte que le théorème implique l'existence de plusieurs fonctions C^1 sur les espaces RCD. Il est important de remarquer que la régularité C^1 - qui a été crucial dans [8] – n'est pas du tout triviale, même si la fonction f est supposée lipschitzienne. En plus, les énoncés concernant la régularité C^1 sont assez rares en géométrie métrique.

Le Théorème 0.1 peut être vu comme une version intégrée de la formule de base

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma_t)|_{t=0} = \mathrm{d}f(\gamma_0')$$

qui est valable dans le cadre lisse ; d'un point de vue strictement technique, la preuve de cette affirmation est liée au fait que la géodésique (μ_t) résout l'équation de continuité

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_t + \mathrm{div}(\nabla(-\varphi_t)\mu_t) = 0, \tag{0.1}$$

où les φ_t sont des choix convenables de potentiels de Kantorovich (voir aussi [12] dans cette direction).

Dans [9], Gigli a développé le calcul du deuxième ordre sur les espaces RCD, en définissant en particulier l'espace $H^{2,2}(\mathrm{X})$ et, pour toute fonction $f \in H^{2,2}(\mathrm{X})$ la Hessienne $\mathrm{Hess}(f)$, voir [9] et la section préliminaire de la thèse. Il est ensuite naturel de se poser la question si une version 'intégrée' de la formule de dérivation du deuxième ordre

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} f(\gamma_t)|_{t=0} = \mathrm{Hess}(f)(\gamma_0', \gamma_0') \qquad \text{for } \gamma \text{ geodesic}$$

est satisfaite dans ce contexte. Dans ce manuscrit, et plus précisément dans le Chapitre 7, on donne une réponse affirmative à cette question et le résultat les plus important que l'on établira est le suivant.

Théorème 0.2 (Formule de dérivation du deuxième ordre)**.** *Soient*

- $(\mathrm{X}, \mathsf{d}, \mathfrak{m})$ *un espace* $\mathsf{RCD}^*(K,N)$*, avec* $K \in \mathbb{R}$ *et* $N < \infty$
- (μ_t) *une géodésique Wasserstein telle que* $\mu_t \leq C\mathfrak{m}$ *et* μ_t *a support compact pour tout* $t \in [0,1]$ *et une certaine constante* $C > 0$
- $f \in H^{2,2}(\mathrm{X})$.

Alors la fonction

$$[0,1] \ni t \quad \mapsto \quad \int f \,\mathrm{d}\mu_t$$

est C^2 *et l'identité suivante est satisfaite*

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \int f \,\mathrm{d}\mu_t|_{t=0} = \int \mathrm{Hess}(f)(\nabla\varphi, \nabla\varphi)\,\mathrm{d}\mu_0, \tag{0.2}$$

où φ *est un potentiel de Kantorovich de* μ_0 *à* μ_1*.*

Le lecteur peut voir aussi le Théorème 7.1.2 pour une formulation alternative mais équivalente du résultat. Ce résultat a été prouvé en premier lieu dans [15] sous l'hypothèse supplémentaire de compacité, mais comme l'on expliquera dans la suite cette supposition peut être ôtée par le biais de techniques de localisation. Par contre, l'hypothèse de dimension finie joue un rôle clé, parce que par exemple on invoque à plusieurs reprises l'inégalité de Li-Yau.

Avoir à disposition une telle formule de dérivation du deuxième ordre, c'est intéressant non seulement d'un point de vue purement théorique, mais aussi pour les applications dans l'étude de la géométrie des espaces RCD. Par exemple, les preuves des théorèmes de splitting et 'from volume cone to metric cone' peuvent être simplifiées à l'aide de cette formule. En plus, un aspect de la théorie des espaces RCD qui n'est pas encore clair est le suivant : est-ce que leur dimension est constante ? Pour les espaces qui sont des 'Ricci limits' la réponse est connue et positive, grâce au résultat de Colding-Naber [7], qui utilise de manière cruciale la dérivation du deuxième ordre le long des géodésiques. Donc, notre résultat est nécessaire afin de répliquer la preuve de Colding et Naber dans le cadre non lisse (toutefois, il n'est pas suffisant : ils utilisent aussi des techniques de calcul avec les champs de Jacobi qui, pour l'instant, n'admettent pas encore des analogues non lisses).

Stratégie de la preuve

Le point de départ est une formule de dérivation du deuxième ordre obtenue dans [9], valable sous certaines hypothèse de régularité :

Théorème 0.3. *Soit* (μ_t) *une courbe* W_2*-absolument contnue solution de l'équation de continuité*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_t + \mathrm{div}(X_t\mu_t) = 0,$$

pour un certain champ de vecteurs $(X_t) \subset L^2(T\mathrm{X})$ *au sens suivant : pour toute* $f \in W^{1,2}(\mathrm{X})$ *la fonction* $t \mapsto \int f \, \mathrm{d}\mu_t$ *est absolument continue et l'identité*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int f \, \mathrm{d}\mu_t = \int \langle \nabla f, X_t \rangle \, \mathrm{d}\mu_t$$

est vérifiée. Supposons que

(i) $t \mapsto X_t \in L^2(T\mathrm{X})$ *est absolument continue,*

(ii) $\sup_t\{\|X_t\|_{L^2} + \|X_t\|_{L^\infty} + \|\nabla X_t\|_{L^2}\} < +\infty$.

Alors pour toute $f \in H^{2,2}(\mathrm{X})$ *la fonction* $t \mapsto \int f \, \mathrm{d}\mu_t$ *est* $C^{1,1}$ *et la formule*

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int f \mathrm{d}\mu_t = \int \mathrm{Hess}(f)(X_t, X_t) + \left\langle \nabla f, \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_t + \nabla_{X_t}X_t \right\rangle \mathrm{d}\mu_t \tag{0.3}$$

est satisfaite pour p.t. $t \in [0, 1]$*.*

Si les champs de vecteurs X_t sont du type gradient, c'est à dire $X_t = \nabla\phi_t$ pour tout t et l''accélération' a_t est définie comme étant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t + \frac{|\nabla\phi_t|^2}{2} =: a_t$$

alors (0.3) devient

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int f \mathrm{d}\mu_t = \int \mathrm{Hess}(f)(\nabla\phi_t, \nabla\phi_t) \, \mathrm{d}\mu_t + \int \langle \nabla f, \nabla a_t \rangle \, \mathrm{d}\mu_t. \tag{0.4}$$

Dans le cas des géodésiques, les fonctions φ_t qui apparaissent dans (0.1) résolvent (en un sens qui ne sera pas précisé ici) l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t = \frac{|\nabla\varphi_t|^2}{2}, \tag{0.5}$$

et donc dans ce cas l'accélération a_t est identiquement nulle (observons le signe moins dans (0.1)). Pour cette raison, si les champs de vecteurs $(\nabla\varphi_t)$ satisfaisaient les conditions de régularité $(i),(ii)$ du dernier théorème, on serait facilement capable d'obtenir le Théorème 0.2. Pourtant ceci n'est pas le cas en général ; de manière informelle, le problème est lié au fait que pour les solutions de l'équation de Hamilton-Jacobi on n'a pas d'estimations du deuxième ordre suffisamment fortes.

Afin de montrer le Théorème 0.2 il est donc naturel de chercher des approximations 'lisses' appropriées des géodésiques, auxquelles on peut appliquer le Théorème 0.3 précédent et puis passer à la limite dans la formule (0.3). Étant donné que le manque de régularité des géodésiques Wasserstein est conséquence du manque de régularité des solutions de (0.5), en parallèle avec la théorie classique de l'approximation visqueuse pour l'équation de Hamilton-Jacobi, il y a une approche assez naturelle à essayer : résoudre, pour $\varepsilon > 0$, l'équation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t^\varepsilon = \frac{|\nabla\varphi_t^\varepsilon|^2}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\Delta\varphi_t^\varepsilon, \qquad\qquad \varphi_0^\varepsilon := \varphi,$$

où φ est un potentiel de Kantorovich donné et fixé, associé à la géodésique (μ_t), et ensuite résoudre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_t^\varepsilon - \mathrm{div}(\nabla\varphi_t^\varepsilon\mu_t^\varepsilon) = 0, \qquad\qquad \mu_0^\varepsilon := \mu_0.$$

Ce projet peut effectivement être mis en place et, en suivant les idées présentées dans ce manuscrit, on peut montrer que si $(\mathrm{X},\mathsf{d},\mathfrak{m})$ est un espace $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ et la géodésique (μ_t) est constituée par des mesures ayant densités uniformément bornées, alors lorsque $\varepsilon \downarrow 0$:

i) les courbes (μ_t^ε) convergent de faChcon W_2-uniforme à la géodésique (μ_t) et les mesures μ_t^ε ont densités uniformément bornées ;
ii) les fonctions φ_t^ε sont uniformément lipschitziennes et convergent de manière localement uniforme aussi bien que dans la topologie $W^{1,2}_{loc}$ vers l'unique solution visqueuse (φ_t) de (0.5) avec φ comme donnée initiale ; en particulier, l'équation de continuité (0.1) est satisfaite par la courbe limite.

Ces résultats de convergence sont basés sur les estimations de Hamilton pour le gradient et sur l'inégalité de Li-Yau et ils sont suffisants pour passer à la limite dans le terme avec la Hessienne dans (0.4). Pour ces courbes l'accélération est donnée par $a_t^\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2}\Delta\varphi_t^\varepsilon$ et donc il ne reste à prouver que la quantité

$$\varepsilon \int \langle \nabla f, \nabla \Delta \varphi_t^\varepsilon \rangle \, \mathrm{d}\mu_t^\varepsilon$$

disparaît à la limite en un certain sens. Cependant, il se trouve qu'il n'y a pas d'espoir d'obtenir cela à travers des techniques fondées sur les EDP. Le problème est dû au fait que ce type d'approximation visqueuse peut produire à la limite une courbe qui n'est pas une géodésique si φ n'est pas c-concave : en peu de mots, cela arrive dès qu'un choc se produit dans l'équation de Hamilton-Jacobi. Comme on ne peut pas espérer que la formule (0.2) est vraie pour des courbes qui ne sont pas géodésiques, on voit bien que très difficilement il est possible d'obtenir le résultat souhaité à travers des telles approximations visqueuses.

Pour cette raison on va utiliser une faChcon différente de se rapprocher aux géodésiques : le ralentissement des interpolations entropiques. Décrivons brièvement en quoi cela consiste, en se plaChcant dans le plus familier cadre euclidien.

Fixons deux mesures de probabilité $\mu_0 = \rho_0 \mathcal{L}^d$, $\mu_1 = \rho_1 \mathcal{L}^d$ sur $\mathbb{R}^d$. Les équations fonctionnelles de Schrödinger sont les suivantes

$$\rho_0 = f \, \mathsf{h}_1 g \qquad\qquad \rho_1 = g \, \mathsf{h}_1 f, \tag{0.6}$$

les inconnues étant les fonctions boreliennes $f, g : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$, où $\mathsf{h}_t f$ est le flot de la chaleur démarrant en f et évalué à l'instant t. En grande généralité, ces équations admettent une solution, qui est unique à la transformtion triviale $(f, g) \mapsto (cf, g/c)$ près, pour une certaine constante $c > 0$. Cette solution peut être trouvée de la manière suivante : soit R la mesure sur $(\mathbb{R}^d)^2$ dont la densité par rapport à $\mathcal{L}^{2d}$ est donnée par le noyau de la chaleur $\mathsf{r}_t(x, y)$ à l'instant $t = 1$ et minimisons l'entropie de Boltzmann-Shannon $H(\boldsymbol{\gamma} \,|\, \mathsf{R})$ parmi tous les couplages $\boldsymbol{\gamma}$ de μ_0 à μ_1. L'équation d'Euler pour le minimiseur force celui-ci à avoir la forme $f \otimes g \, \mathsf{R}$ pour des fonctions boreliennes $f, g : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ appropriées, où $f \otimes g(x, y) := f(x)g(y)$ (on montrera à nouveau ce résultat déjà connu dans la Proposition 4.1.5).

Une fois que l'on a trouvé la solution de (0.6) on peut l'utiliser conjointement avec le flot de la chaleur, afin d'interpoler de ρ_0 à ρ_1 en définissant

$$\rho_t := \mathsf{h}_t f \, \mathsf{h}_{1-t} g.$$

Ceci est appelé interpolation entropique. Maintenant on ralentit le flot de la chaleur : fixons $\varepsilon > 0$ et en imitant ce que l'on vient de présenter trouvons

$f^\varepsilon, g^\varepsilon$ telles que

$$\rho_0 = f^\varepsilon\,\mathsf{h}_{\varepsilon/2} g^\varepsilon \qquad\qquad \rho_1 = g^\varepsilon\,\mathsf{h}_{\varepsilon/2} f^\varepsilon, \tag{0.7}$$

(le facteur $1/2$ ne joue aucun rôle special, mais il est utile pour les calculs). Puis, définissons

$$\rho_t^\varepsilon := \mathsf{h}_{t\varepsilon/2} f^\varepsilon\,\mathsf{h}_{(1-t)\varepsilon/2} g^\varepsilon.$$

Ce qui est remarquable et non trivial, c'est que lorsque $\varepsilon \downarrow 0$ les courbes de mesures $(\rho_t^\varepsilon \mathcal{L}^d)$ convergent à la géodésique Wasserstein de μ_0 à μ_1.

Les premiers liens entre les équations de Schrödinger et le transport optimal ont été découverts par Mikami dans [21] pour le coût quadratique sur $\mathbb{R}^d$; ensuite, Mikami et Thieullen [22] ont montré que le lien persiste même pour des coûts plus généraux. L'énoncé qu'on vient de présenter au sujet de la convergence des interpolations entropiques aux celles par déplacement a été prouvé par Léonard dans [18]. En fait, Léonard a travaillé dans un cadre beaucoup plus abstrait et général : comme c'est peut-être évident à en juger par la présentation, la construction des interpolations entropiques peut être mise en œuvre en grande généralité, parce qu'il suffit d'avoir un noyau de la chaleur. Il a aussi fourni une intuition élémentaire pour expliquer pourquoi cette convergence a lieu : l'idée essentielle est que si le noyau de la chaleur admet l'expansion asymptotique $\varepsilon \log \mathsf{r}_\varepsilon(x,y) \sim -\frac{\mathsf{d}^2(x,y)}{2}$ (au sens des grandes déviations), alors les fonctionnelles d'entropie rééchelonnées $\varepsilon H(\cdot \,|\, \mathsf{R}_\varepsilon)$ convergent à $\frac{1}{2}\int \mathsf{d}^2(x,y)\,\mathrm{d}\cdot$ (au sens de la Γ-convergence). Le lecteur est adressé à [19] pour une dissertation plus profonde de cet argument, pour des remarques historiques et tout renseignement complémentaire.

En partant de ces intuitions et résultats et en travaillant dans le cadre des espaces $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ on obtient des nouvelles informations sur la convergence des interpolations entropiques vers celles par déplacement. Afin d'énoncer nos résultats, il est plus pratique d'introduire les potentiels de Schrödinger $\varphi_t^\varepsilon, \psi_t^\varepsilon$ comme étant

$$\varphi_t^\varepsilon := \varepsilon \log \mathsf{h}_{t\varepsilon/2} f^\varepsilon \qquad\qquad \psi_t^\varepsilon := \varepsilon \log \mathsf{h}_{(1-t)\varepsilon/2} g^\varepsilon.$$

À la limite pour $\varepsilon \downarrow 0$, ils convergent vers des potentiels de Kantorovich 'forward' et 'backward' le long de la géodésique limite (μ_t), voir aussi en bas. Dans cette direction, il vaut la peine de noter que, alors que pour $\varepsilon > 0$ il y a un lien étroit entre les potentiels et les densités, car

$$\varphi_t^\varepsilon + \psi_t^\varepsilon = \varepsilon \log \rho_t^\varepsilon,$$

à la limite cela devient la célèbre (et plus faible) relation entre les potentiels 'forward' et 'backward' et les mesures (μ_t) :

$$\begin{aligned}
\varphi_t + \psi_t = 0 &\qquad \text{on } \operatorname{supp}(\mu_t),\\
\varphi_t + \psi_t \le 0 &\qquad \text{on X},
\end{aligned}$$

voir par exemple la Remark 7.37 dans [32] (en faisant attention aux signes différents). Par des calculs directs on peut verifier que $(\varphi_t^\varepsilon), (\psi_t^\varepsilon)$ résolvent les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t^\varepsilon = \frac{1}{2}|\nabla\varphi_t^\varepsilon|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\Delta\varphi_t^\varepsilon \qquad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_t^\varepsilon = \frac{1}{2}|\nabla\psi_t^\varepsilon|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\Delta\psi_t^\varepsilon, \tag{0.8}$$

donc, en introduisant les fonctions

$$\vartheta_t^\varepsilon := \frac{\psi_t^\varepsilon - \varphi_t^\varepsilon}{2}$$

il n'est pas difficile de contrôler que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_t^\varepsilon + \operatorname{div}(\nabla\vartheta_{\mathrm{t}}^\varepsilon\,\rho_{\mathrm{t}}^\varepsilon) = 0 \tag{0.9}$$

est satisfait et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vartheta_t^\varepsilon + \frac{|\nabla\vartheta_t^\varepsilon|^2}{2} = a_t^\varepsilon, \qquad \text{where} \qquad a_t^\varepsilon := -\frac{\varepsilon^2}{8}\Big(2\Delta\log\rho_t^\varepsilon + |\nabla\log\rho_t^\varepsilon|^2\Big).$$

Ceci dit, nos résultats principaux concernant les interpolations entropiques peuvent être résumés de la faChcon suivante. Sous les hypothèses que l'espace métrique mesuré est $\mathsf{RCD}^*(K,N)$, $N<\infty$, et ρ_0,ρ_1 appartiennent à $L^\infty(\mathrm{X})$ on a :

- Ordre zéro
  - *borne* Pour quelque $C>0$ on a $\rho_t^\varepsilon \le C\mathfrak{m}$ pour tout $\varepsilon\in(0,1)$ et $t\in[0,1]$ (Proposition 5.2.2).
  - *convergence* Les courbes $(\rho_t^\varepsilon\mathfrak{m})$ convergent de manière W_2-uniforme vers l'unique géodésique Wasserstein (μ_t) de μ_0 à μ_1 (Propositions 6.1.1 and 6.2.2).
- Premier ordre
  - *borne* Pour tout $t\in(0,1]$ les fonctions $\{\varphi_t^\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ sont localement uniformement lipschitziens (Proposition 5.2.3). Le même pour les ψ.

– *convergence* Pour toute suite $\varepsilon_n \downarrow 0$ il existe une sous-suite – non ré-étiquetée – telle que pour tout $t \in (0,1]$ les fonctions φ_t^ε convergent de manière localement uniforme aussi bien que dans la topologie $W^{1,2}_{loc}(\mathrm{X})$ vers une fonction φ_t telle que $-t\varphi_t$ est un potential de Kantorovich de μ_t à μ_0 (voir les Propositions 6.1.1, 6.2.2 et 6.2.6 pour la formulation précise des résultats). De même pour les ψ.

- Deuxième ordre Pour tout $\delta \in (0,1/2)$ on a
  – *borne*

$$\begin{aligned}
&\sup_{\varepsilon\in(0,1)} \iint_\delta^{1-\delta} \big(|\mathrm{Hess}(\vartheta_t^\varepsilon)|^2_{\mathsf{HS}} + \varepsilon^2|\mathrm{Hess}(\log\rho_t^\varepsilon)|^2_{\mathsf{HS}}\big)\rho_t^\varepsilon \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mathfrak{m} < \infty,\\
&\sup_{\varepsilon\in(0,1)} \iint_\delta^{1-\delta} \big(|\Delta\vartheta_t^\varepsilon|^2 + \varepsilon^2|\Delta\log\rho_t^\varepsilon|^2\big)\rho_t^\varepsilon \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mathfrak{m} < \infty,
\end{aligned} \tag{0.10}$$

  (Lemme 5.3.4). Observons que, puisque en général le laplacien n'est pas la trace de la Hessienne, il n'y a pas de liens directs entre ces deux bornes.

  – *convergence* Pour toute fonction $h \in W^{1,2}(\mathrm{X})$ avec $\Delta h \in L^\infty(\mathrm{X})$ on a

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \iint_\delta^{1-\delta} \langle \nabla h, \nabla a_t^\varepsilon\rangle\, \rho_t^\varepsilon \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = 0, \tag{0.11}$$

  (Theorem 7.1.2).

À l'exception de la convergence $\rho_t^\varepsilon\mathfrak{m} \to \mu_t$, tous ces résultats sont nouveaux, même sur les variétés lisses compactes (même sur le tore plat). Les bornes d'ordre zéro et du premier ordre sont conséquences des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (0.8) satisfaites par les φ et les ψ et peuvent être obtenues à partir de l'estimation de Hamilton pour le gradient et de l'inégalité de Li-Yau. Les faits que la courbe limite est la géodésique Wasserstein entre μ_0 et μ_1 et que les potentiels limite sont des potentiels de Kantorovich, ce sont conséquences du fait que l'on peut passer à la limite dans l'équation de continuité (0.9) et que les potentiels limite satisfont l'équation de Hamilton-Jacobi. À cet égard, il est crucial que l'on se rapproche au même instant du potentiel 'forward' ψ et de celui 'backward' φ : le lecteur peut regarder la preuve de la Proposition 6.2.2 et se souvenir du fait que les approximations visqueuses 'simples' (non pas entropiques) peuvent bien converger vers des courbes qui ne sont pas géodésiques Wasserstein.

Ces résultat de convergence d'ordre zéro et un sont suffisants pour passer à la limite dans le terme avec la Hessienne dans (0.4).

Comme on l'a déjà remarque avant, l'approximation visqueuse peut produire le même type de convergence. L'avantage principal et caractéristique provenant du fait que l'on s'appuie sur les interpolations entropiques apparaît dans le résultat de convergence du deuxième ordre (0.11), qui montre en quel sens le terme avec l'accélération dans (0.4) disparaît à la limite. Par conséquent, cela nous permettra de montrer le résultat principal, c'est à dire le Théorème 7.1.2. Dans cette direction, signalons de manière informelle que, étant l'équation des géodésiques une équation du deuxième ordre, quand on cherche une procédure d'approximation il est naturel d'en chercher une qui produise une convergence jusqu'au deuxième ordre.

La propriété de convergence (0.11) est pour la plupart une conséquence – bien que non triviale – de la borne (0.10) (voir en particulier Lemme 5.3.5 et la preuve du Théorème 7.1.2), donc concentrons-nous sur la manière pour obtenir (0.10). Le point de démarrage est une formule montrée par Léonard dans [17] ; il s'est aperChcu de la connexion qui existe entre interpolations entropiques et bornes inférieures sur la courbure de Ricci : il a calculé explicitement la dérivée d'ordre deux de l'entropie le long des interpolations entropiques, en obtenant

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} H(\rho_t^\varepsilon \mathfrak{m} \,|\, \mathfrak{m}) = \int \big(\Gamma_2(\vartheta_t^\varepsilon) + \tfrac{\varepsilon^2}{4}\Gamma_2(\log \rho_t^\varepsilon)\big)\rho_t^\varepsilon \,\mathrm{d}\mathfrak{m}, \tag{0.12}$$

où Γ_2 est l'opérateur carré du champ itéré, défini comme étant

$$\Gamma_2(f) := \Delta \frac{|\nabla f|^2}{2} - \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle$$

(dans le cadre des espaces RCD il faut faire attention dans le traitement de cet objet, parce que en général $\Gamma_2(f)$ est seulement une mesure, mais pour l'instant oublions cet aspect).

Donc, si l'on est sur une variété avec courbure de Ricci non négative, alors l'inégalité de Bochner

$$\Gamma_2(f) \geq |\mathrm{Hess}(f)|_{\mathsf{HS}}^2 \tag{0.13}$$

assure que l'entropie est convexe le long des interpolations entropiques.

Maintenant observons que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ est convexe, alors pour $t \in (0,1)$ la quantité $|f'(t)|$ peut être contrôlée en termes de $f(0), f(1)$ et

t seulement. Pour cette raison, comme la valeur de $H(\rho_t^\varepsilon \mathfrak{m} \,|\, \mathfrak{m})$ aux instants $t = 0, 1$ est indépendante de $\varepsilon > 0$, on obtient la borne uniforme

$$\sup_{\varepsilon>0} \int_\delta^{1-\delta} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} H(\mu_t^\varepsilon \,|\, \mathfrak{m}) \, \mathrm{d}t = \sup_{\varepsilon>0} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(\mu_t^\varepsilon \,|\, \mathfrak{m})_{|t=1-\delta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(\mu_t^\varepsilon \,|\, \mathfrak{m})_{|t=\delta} \right) < \infty$$

qui par (0.13) et (0.12) garantit la première borne dans (0.10). La deuxième est déduite de manière similaire, en utilisant l'inégalité de Bochner suivante

$$\Gamma_2(f) \geq \frac{(\Delta f)^2}{N}$$

à la place de (0.13).

Structure de la thèse

La thèse est divisée en trois parties, trois étant aussi les domaines mathématiques principaux qui interviennent de manière plus ou moins assidue dans le cours des pages suivantes : l'analyse, la géométrie et les probabilités. Bien que très liées entre elles, les trois parties sont caractérisées par la prédominance d'un domain sur les autres et cela est bien évident à en juger par les titres choisis pour chaque partie. Il vaut la peine de dire quelques mots sur les motivations derrière un tel choix et, surtout, sur l'organisation du manuscrit. Comme on l'a déjà remarqué avant, la motivation originelle qui est à la base du présent travail de recherche est essentiellement géométrique, mais il est évident que pour sa preuve l'analyse est un ingrédient incontournable. Pour cette raison dans la première partie, après une introduction préliminaire ayant comme but celui de donner au lecteur tous les notions et résultats sur le transport optimal et la théorie des espaces RCD nécessaires pour la compréhension de l'œuvre, on s'occupe de l'approche basée sur des techniques EDP et suggéré toute à l'heure : il n'est pas surprenant de voir que un rôle clé est joué par le logarithme des solutions de l'équation de la chaleur (parce que cela donne une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman) et par la manière dont on peut l'estimer. Dans la deuxième partie on traite le problème de Schr »odinger et donc on aborde le thème des grandes déviations ; bien que le langage adopté soit analytique, parce qu'il s'adapte mieux au contexte des espaces RCD, le sujet est spécifiquement probabiliste dans l'esprit et nous donne les outils corrects pour approximer les géodésiques Wasserstein : interpolations entropiques et potentiels de Schrödinger. Finalement, dans la troisième partie on fusionne les résultats des chapitres précédents, ce qui aboutit à donner une réponse affirmative au problème de départ, c'est à dire :

> Est-ce que l'on peut établir la formule de dérivation du deuxième ordre le long des géodésiques ?

En plus, on examine les informations analytiques et géométriques cachées dans les interpolations entropiques et fournit des applications géométriques de la formule de dérivation du deuxième ordre. Ainsi, les trois domaines sur lesquels cette thèse est fondée résulteront liés entre eux de manière encore plus stricte et forte.

Maintenant on va détailler avec plus de précision les trois parties, en présentant les thématiques abordées ainsi que nos contributions.

Partie I.
La théorie du transport optimal tire son origine des travaux d'ingénieur de Gaspard Monge, dans le XVIIIe siècle, et à travers les décennies l'intérêt pour ce domaine ne s'est jamais épuisé ; par contre, il s'est de plus en plus enrichi, avec les contributions de Kantorovich dans les Années Quarante du XXe siècle et il a progressé jusqu'à nos jours. Par contre, beaucoup plus récent est l'étude des bornes synthétiques sur la courbure et la dimension, une branche des mathématiques qui s'intéresse à caractériser la structure géométrique des variétés riemanniennes en termes de géométrie métrique et théorie de la mesure, ce qui permet d'étendre les notions de (bornes sur la) courbure de Ricci à des cadres beaucoup plus généraux et abstraits que les variétés riemanniennes.

Comme on l'a déjà remarqué, les deux domaines sont liés entre eux et pour cette raison dans le Chapitre 1 le lecteur peut trouver un guide aux définitions et résultats incontournables pour la compréhension du manuscrit. Dans un *crescendo*, on passera de la structure différentielle du premier ordre dont les espaces polonais peuvent être munis à celle du deuxième ordre, qui par contre nécessite de la condition RCD, à travers des énoncés de plus en plus détaillés sur le transport optimal.

Le Chapitre 2 est par contre entièrement consacré à l'analyse sur les espaces RCD et un rôle clé y est joué par les estimations gaussiennes sur le noyau de la chaleur, qui interviennent à plusieurs reprises pour montrer les inégalités de Hamilton et de Li-Yau. Ces théorèmes étaient déjà connus, même sur les espaces RCD, mais on en donne la preuve dans le cas compact parce que presque la même stratégie du cas lisse peut être adopté ; en plus, on en déduit des résultats qui, eux, sont nouveaux et nécessaires pour la suite.

Partie II.
En 1931 Erwin Schrödinger proposa un nouveau problème d'interpolation qui, dès son apparition, montra des analogies frappantes avec la mécanique ondulatoire, qui venait d'être découverte, et l'équation de Schrödinger ; des analogies beaucoup plus marquées et évidentes que celles encodées dans l'équation de Fokker-Planck et dans les études de Smoluchowski sur le mouvement brownien. Cependant, malgré les nombreux défis proposés par Schrödinger dans [28], ils ne devinrent pas aussi célèbres que l'équation nommée d'après lui ; au contraire, le problème d'interpolation fut presque entièrement oublié, même redécouvert plusieurs ans après, et ce n'est que récemment qu'un intérêt diffus pour la thématique a apparu. Cette deuxième partie veut donc

être en premier lieu une présentation historique du problème, avec fréquents aperChcus sur son interprétation physique, et en deuxième instance un guide d'utilisation pour les non probabilistes ; en fait, tout le langage probabiliste traditionnellement employé dans la description du problème est ici traduit dans un langage analytique, de sorte qu'un plus vaste public puisse en bénéficier.

Pour cette raison dans le Chapitre 3 on éclaircira les décennies écoulées entre 1931 et nos jours. En ce qui concerne l'histoire du problème, le point de départ est donné par la formulation originelle, la motivation et l'interprétation physiques du phénomène (voir [28], [29], l'étude [19] et les monographies [24], [25]). Souvent, on utilisera les mots de Schrödinger à cause de leur puissance enrichissante, éclairante et suggestive et, à travers un raisonnement informel enraciné dans la physique statistique, les équations fonctionnelles de Schrödinger se traduiront dans la formulation de Föllmer, où un problème de minimisation entropique apparaît. Comme remarque finale, plusieurs développements et applications importants sont rappelés.

Une discussion mathématique sur le problème de Schrödinger est au centre des Chapitre 4 et 5. Dans le premier, la version de Föllmer du problème, ébauchée de manière informelle précédemment, est déduite rigoureusement et énoncée proprement sur un espace polonais quelconque. En plus, les versions dynamique et duale du problème sont aussi introduites. Pour elles, les résultats classiques d'existence sont énoncés et les liens entre les trois formulations différentes sont abordés. En outre, bien que moins général que les résultats déjà connus dans la littérature, on fournit un théorème d'existence qui est partiellement nouveau ; la spécificité du résultat consiste en la caractérisation de l'unique minimiseur du problème de Schrödinger parmi tous les couplages associés aux contraints marginales. Dans la dernière partie du chapitre, en imitant certains résultats classiques de la théorie du transport optimal, comme par exemple la convexité du coût de transport, la propriété de restriction et la stabilité, on met en place une boîte à outils pour le problème de Schrödinger qui, à notre connaissance, est encore manquante.

Dans le Chapitre 5 on abandonne le cadre des espaces polonais pour se placer dans celui des espaces RCD, où les bornes sur la courbure et la dimension déterminent une connaissance plus profonde des interpolations entropiques. Pierres angulaires de ce chapitre, ce sont les suivantes : une borne uniforme pour les densités des interpolations entropiques (Proposition 5.2.2), la lipschitzianité localement uniforme des potentiels de Schrödinger leur associés (Proposition 5.2.3), des formules explicites pour les dérivées première et seconde de l'entropie le long des interpolations entropiques (Proposition 5.3.3) et, par conséquent, un contrôle L^2 à poids uniforme pour les Hessiennes de ces potentiels (Lemme 5.3.4). Tous ces résultats, sauf les formules des dérivées du premier et deuxième ordre, sont nouveaux même dans le cas lisse.

Partie III.
Après une première partie d'inspiration analytique et une deuxième d'esprit probabiliste, la troisième et dernière partie du manuscrit est dédiée à la preuve de la formule de dérivation du deuxième ordre et aux applications géométriques des outils que l'on a développés dans les chapitres précédents, notamment les inégalités de Hamilton et de Li-Yau pour le côté analytique et tous les bornes (localement) uniformes au sujet des interpolations entropiques et des potentiels de Schrödinger leur associés pour le côté à priori probabiliste. En montrant de quelle manière les interpolations entropiques et les potentiels de Schrödinger convergent vers les géodésiques Wasserstein et les potentiels de Kantorovich respectivement, on bâtira un pont solide entre le problème de Schrödinger et le transport optimal qui nous permettra non seulement de franchir la cible principale de ce projet de recherche, mais encore de pousser plus loin les analogies entre les deux problèmes de minimisation, découvrant ainsi des liens inespérés, dont on va parler bientôt.

Le Chapitre 6 s'ouvre avec l'application directe et immédiate des Propositions 5.2.2 et 5.2.3 : grâce aux bornes uniformes y énoncées on a assez de compacité à disposition pour montrer l'existence d'une courbe limite de mesures et des potentiels limite. Ensuite, la question naturelle qui se présente est la suivante : qu'est-ce que l'on peut dire de ces trajectoires limite ? Est-ce que l'on peut les caractériser ? La réponse est affirmative et l'on voit que la courbe de mesures limite est une géodésique W_2 et donc elle est unique, étant uniques les géodésiques dans l'espace de Wasserstein bâti sur un espace RCD ; en ce qui concerne les potentiels, ils convergent vers les solutions visqueuses de l'équation de Hamilton-Jacobi, par analogie avec le cas lisse, ce qui donne un aperChcu des possibles développements de la théorie de la viscosité sur les espaces métriques. Les résultats de convergence qu'on vient de présenter permettent d'obtenir, d'une manière qu'on peut dire 'entropique', des faits déjà connus (par exemple la (K, N)-convexité de l'entropie le long des interpolations par déplacement et l'inégalité HWI) sur les espaces RCD ; pourtant, il vaut la peine de donner ces application, parce qu'elles sont déduites avec peu d'effort, ce qui est une conséquence directe des bonnes propriétés de régularité des interpolations entropiques.

Dans le Chapitre 7, en s'appuyant sur tous les résultats précédents on donne la preuve du théorème principal, c'est à dire la formule de dérivation du deuxième ordre pour les géodésiques Wasserstein. Une première conséquence du résultat est une formule de dérivation du premier ordre pour des champs de vecteurs (voir Corollaire 7.1.3), mais d'autres applications surgissent dans le domaine de l'analyse géométrique : on expliquera comment la formule de dérivation du deuxième ordre intervient dans les théorèmes de splitting et 'from volume cone to metric cone', en simplifiant les stratégies de preuve.

Références

[1] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré, *Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below*, Invent. Math., 195 (2014), pp. 289–391.

[2] ——, *Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below*, Duke Math. J., 163 (2014), pp. 1405–1490.

[3] ——, *Bakry-Émery curvature-dimension condition and Riemannian Ricci curvature bounds*, The Annals of Probability, 43 (2015), pp. 339–404. arXiv :1209.5786.

[4] L. Ambrosio, A. Mondino, and G. Savaré, *Nonlinear diffusion equations and curvature conditions in metric measure spaces*. Preprint, arXiv :1509.07273, 2015.

[5] F. Cavalletti and E. Milman, *The globalization theorem for the curvature dimension condition*. Preprint, arXiv :1612.07623, 2016.

[6] F. Cavalletti and A. Mondino, *Sharp and rigid isoperimetric inequalities in metric-measure spaces with lower ricci curvature bounds*. Accepted at Inv. Math., arXiv :1502.06465, 2015.

[7] T. H. Colding and A. Naber, *Sharp Hölder continuity of tangent cones for spaces with a lower Ricci curvature bound and applications*, Ann. of Math. (2), 176 (2012), pp. 1173–1229.

[8] N. Gigli, *The splitting theorem in non-smooth context*. Preprint, arXiv :1302.5555, 2013.

[9] ——, *Nonsmooth differential geometry - an approach tailored for spaces with Ricci curvature bounded from below*. Accepted at Mem. Amer. Math. Soc., arXiv :1407.0809, 2014.

[10] ——, *An Overview of the Proof of the Splitting Theorem in Spaces with Non-Negative Ricci Curvature*, Analysis and Geometry in Metric Spaces, 2 (2014), pp. 169–213.

[11] ——, *On the differential structure of metric measure spaces and applications*, Mem. Amer. Math. Soc., 236 (2015), pp. vi+91.

[12] N. Gigli and B. Han, *The continuity equation on metric measure spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 53 (2013), pp. 149–177.

[13] N. Gigli, K. Kuwada, and S.-i. Ohta, *Heat flow on Alexandrov spaces*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 66 (2013), pp. 307–331.

[14] N. Gigli and S. Mosconi, *The Abresch-Gromoll inequality in a non-smooth setting*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 34 (2014), pp. 1481–1509.

[15] N. Gigli and L. Tamanini, *Second order differentiation formula on compact rcd$^*(k,n)$ spaces.* Preprint, arXiv :1701.03932, 2017.

[16] C. Ketterer, *Cones over metric measure spaces and the maximal diameter theorem*, J. Math. Pures Appl. (9), 103 (2015), pp. 1228–1275.

[17] C. Léonard, *On the convexity of the entropy along entropic interpolations.* To appear in "Measure Theory in Non-Smooth Spaces", Partial Differential Equations and Measure Theory. De Gruyter Open, 2017. ArXiv :1310.1274v.

[18] ——, *From the Schrödinger problem to the Monge-Kantorovich problem*, J. Funct. Anal., 262 (2012), pp. 1879–1920.

[19] ——, *A survey of the Schrödinger problem and some of its connections with optimal transport*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 34 (2014), pp. 1533–1574.

[20] J. Lott and C. Villani, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, Ann. of Math. (2), 169 (2009), pp. 903–991.

[21] T. Mikami, *Monge's problem with a quadratic cost by the zero-noise limit of h-path processes*, Probab. Theory Related Fields, 129 (2004), pp. 245–260.

[22] T. Mikami and M. Thieullen, *Optimal transportation problem by stochastic optimal control*, SIAM J. Control Optim., 47 (2008), pp. 1127–1139.

[23] A. Mondino and A. Naber, *Structure Theory of Metric-Measure Spaces with Lower Ricci Curvature Bounds I.* Preprint, arXiv :1405.2222, 2014.

[24] M. Nagasawa, *Schrödinger equations and diffusion theory*, vol. 86 of Monographs in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.

[25] E. Nelson, *Dynamical theories of Brownian motion*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1967.

[26] T. Rajala, *Local Poincaré inequalities from stable curvature conditions on metric spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 44 (2012), pp. 477–494.

[27] T. Rajala and K.-T. Sturm, *Non-branching geodesics and optimal maps in strong $CD(K,\infty)$-spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 50 (2012), pp. 831–846.

[28] E. Schrödinger, *Über die Umkehrung der Naturgesetze. Von E. Schrödinger. (Sonderausgabe a. d. Sitz.-Ber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., Phys.-math. Klasse, 1931, IX.) Verlag W. de Gruyter, Berlin. Preis RM. 1,-*, Angewandte Chemie, 44 (1931), pp. 636–636.

[29] ——, *Sur la théorie relativiste de l'électron et l'interprétation de la mécanique quantique*, Ann. Inst. H. Poincaré, 2 (1932), pp. 269–310.

[30] K.-T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. I*, Acta Math., 196 (2006), pp. 65–131.

[31] ——, *On the geometry of metric measure spaces. II*, Acta Math., 196 (2006), pp. 133–177.

[32] C. Villani, *Optimal transport. Old and new*, vol. 338 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin, 2009.