

Membre de l'université Paris Lumières

## Patrick Ribeiro

# Analyse entropique et multi-échelle pour la fatigue et la rupture thermomécanique

Thèse présentée et soutenue publiquement le 22/11/2017  
en vue de l'obtention du doctorat de **Energétique, génie des procédés** de  
l'Université Paris Nanterre  
sous la direction de M. Diogo Queiros-Condé (Université Paris Nanterre)  
et de M. Laurent Gallimard (codirecteur) et de Mme Lavinia Grosu (co encadrante)

### Jury :

Rapporteur :	M. Thomas Michelitsch	Directeur de recherche, CNRS - Institut Jean le Rond d'Alembert
Rapporteur :	Mme Sylvie Lorente	Professeur, LMDC - INSA Toulouse
Membre du jury :	M. Michel Feidt	Professeur émérite, LEMTA - Université de Lorraine
Membre du jury :	M. Luis Le Moyne	Professeur, ISAT - Université de Bourgogne



## Remerciements

*Une âme délicate est gênée de savoir qu'on lui doit des remerciements, une âme grossière, de savoir qu'elle en doit*

– Friedrich Nietzsche

Le travail de recherche présenté dans cette thèse est le résultat de la participation de nombreuses personnes auxquelles des remerciements sont nécessaires.

Je remercie Diogo Queiros-Condé et Laurent Gallimard, mes directeurs de thèse pour leur implication, leur confiance, et la liberté qu'ils m'ont accordée. J'ai pu apprécier leur sens pédagogique ainsi que leurs qualités scientifiques et humaines tout au long de ce travail.

Je remercie également Lavinia Grosu et Johann Petit pour leur aide précieuse et sans qui ce travail n'aurait pu aboutir.

C'est sans aucun doute grâce à leur enthousiasme pour les sciences qu'ils ont pu me transmettre cette passion de la recherche. Le temps qu'ils m'ont consacré et leurs conseils suite aux nombreuses discussions et réunions sur leurs domaines était toutes plus constructives les unes que les autres.

Je tiens à remercier Sylvie Lorente et Thomas Michelitsch qui m'ont fait l'honneur de rapporter ce travail. Je tiens aussi à remercier Michel Feidt et Luis Le Moynes d'avoir examiné cette thèse. L'ensemble de leurs remarques et questions ont été pertinentes et génératrices de nouvelles idées. Je tiens d'autre part à remercier Michel Feidt pour sa disponibilité et l'ensemble de ses remarques pour l'élaboration de la version finale de ce manuscrit.

Mes remerciements vont aussi à l'ensemble des doctorants et collaborateurs du LEME pour la bonne ambiance existante, leur aide, leur sympathie et les diverses discussions possibles sur leurs différents sujets de thèse. Une partie de ce que j'ai appris est aussi grâce à eux, je remercie ainsi Khan Tran, Michele D'ottavio, Yvain Canivet, Ruijie Li, Tanguy Davin, Julien Pierre Offret, Jérémy Lebedinski, Loris Navello, Romain Pawelko, Mohand Ouarabi, José Luis Ramirez, Astrid Rubiano, Boobackar Seck, Jonas Maruani et Laithe Aboudou pour tous nos échanges.

Enfin mes remerciements vont à ma famille, mes amis (un grand merci à Yoann Vigilant) et ma compagne pour leur soutien, leur générosité et leurs encouragements qui m'ont permis de rester concentré sur mon sujet de recherche.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Sommaire</b>	<b>iv</b>
<b>1 Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>2 Fatigue et thermodynamique classique</b>	<b>3</b>
2.1 Historique . . . . .	4
2.2 Fatigue : présentation et modèles . . . . .	4
2.2.1 Mécanismes et généralités sur la fatigue . . . . .	5
2.2.2 Modèles d'estimation du nombre de cycles à rupture	8
2.3 La thermodynamique de la fatigue . . . . .	17
2.3.1 Formulation de la thermomécanique . . . . .	17
2.3.2 Entropie de rupture pour la fatigue oligocyclique : Modèles empiriques . . . . .	22
2.3.3 Entropie de rupture pour la fatigue oligocyclique : Relations permettant l'estimation de l'entropie de rupture . . . . .	23
2.4 Procédure expérimentale en fatigue oligocyclique . . . . .	27
2.4.1 La thermographie en fatigue . . . . .	27
2.4.2 Montage expérimental . . . . .	30
2.4.3 Hypothèses et remarques générales . . . . .	31
2.5 Résultats et discussion sur l'entropie de rupture . . . . .	32
2.5.1 Vérification de l'hypothèse 1D . . . . .	32
2.5.2 Estimations de l'entropie de rupture . . . . .	33
2.5.3 De l'entropie à l'endommagement . . . . .	47
2.6 Étude des modèles d'estimation empiriques . . . . .	55
2.6.1 Sur l'imprécision du modèle de Park et Nelson . . . . .	55
2.6.2 Sur le modèle de Ramberg-Osgood cyclique . . . . .	56
2.7 Exergie en fatigue . . . . .	64
2.7.1 Exergie et notion de qualité . . . . .	64
2.7.2 Des deux principes à l'exergie . . . . .	65
2.7.3 L'exergie de déformation . . . . .	70
2.8 Conclusion . . . . .	77
Nomenclature - Fatigue et thermodynamique classique . . . . .	79
Références . . . . .	87
<b>3 Analyse multi-échelle en mécanique</b>	<b>99</b>
3.1 Historique . . . . .	99
3.2 De la géométrie fractale simple à la dépendance en échelle	101

3.2.1	Généralités sur les objets fractals . . . . .	101
3.2.2	Autosimilarité stricte comme cas particulier . . . . .	104
3.2.3	Fractal dépendant d'échelle . . . . .	106
3.3	Caractérisation et généralisation des géométries dépendantes d'échelle . . . . .	108
3.3.1	Les différents cas simples . . . . .	108
3.3.2	Généralisation du puits d'entropie d'échelle en régime stationnaire . . . . .	110
3.3.3	Fractals dissipatifs déterministes et log-périodicité . . . . .	115
3.4	Géométrie fractale et entropie d'échelle en mécanique des solides . . . . .	131
3.4.1	Caractérisation fractale des propriétés mécaniques . . . . .	131
3.4.2	Multifractal Scaling Law et dépendance en échelle . . . . .	137
3.4.3	Analyse de faciès de rupture . . . . .	141
3.4.4	Fragmentation mécanique . . . . .	150
3.5	Fractal parabolique et lien constructal . . . . .	156
3.5.1	Introduction . . . . .	156
3.5.2	Approche constructale en mécanique des milieux continus . . . . .	159
3.5.3	Approche constructale microscopique . . . . .	162
3.6	Conclusion . . . . .	165
	Nomenclature - Analyse multi-échelle en mécanique . . . . .	167
	Références . . . . .	171
<b>4</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>189</b>
	Références . . . . .	193
	<b>Table des figures</b>	<b>195</b>
	<b>Liste des tableaux</b>	<b>203</b>



## Introduction générale

*L'homme est poussé par le besoin de savoir*

– Robert Oppenheimer

### Problématique

La fatigue d'un matériau consiste en l'étude de la durée de vie d'un matériau soumis à des cycles d'efforts. C'est un domaine d'intérêt général d'un point de vue industriel et social. En effet, ce domaine étudie les matériaux par l'intermédiaire de nombreux critères, modèles, et méthodes, pour la prédiction de la rupture en fatigue. Dans ce phénomène de dégradation, seule la thermodynamique du premier principe est généralement utilisée. Récemment, le concept d'entropie de rupture en fatigue a été introduit en utilisant des modèles empiriques et des mesures de température. Cette entropie de rupture en fatigue apparaît avoir une valeur constante liée uniquement au matériau. Notre première étude est donc de vérifier à partir de résultats expérimentaux si ce concept d'entropie de rupture peut être considéré comme un paramètre intrinsèque d'un matériau.

Les géométries dépendantes d'échelles représentent une extension des géométries fractales pures. Elles sont étudiées par l'intermédiaire du concept d'entropie d'échelle. On appelle fractal parabolique, un cas particulier de fractal dépendant d'échelle impliquant une équipartition d'un terme source dans l'espace des échelles. Ce type de géométrie apparaît dans plusieurs phénomènes, c'est le cas lorsque l'on optimise un flux de matière par la théorie constructale (théorie d'évolution thermodynamique). Notre deuxième étude se concentre sur le lien entre géométrie et mécanique, et finalement sur l'étude d'une orientation constructale possible en mécanique.

### Objectif

Dans le cadre de l'étude des matériaux, ce mémoire apporte une contribution à l'utilisation de la thermodynamique et de la géométrie pour l'étude des phénomènes mécaniques. L'objectif est de vérifier et de proposer plusieurs relations tirés de la formulation thermomécanique pour estimer expérimentalement l'entropie de rupture d'un matériau, puis d'étudier les modèles mécaniques empiriques existants. Une extension du cadre thermodynamique est possible par l'utilisation du concept d'exergie. Le deuxième objectif de ce travail consiste en l'étude des géométries dépendantes d'échelles et leur application en mécanique, puis de voir si un lien avec la théorie constructale est possible.

## Organisation du mémoire

Le plan s'oriente suivant 2 axes :

— **Fatigue et entropie dans le cadre de la thermodynamique classique :**

Dans un premier temps, les mécanismes et généralités sur les tests de fatigue à faible et grand nombre de cycles sont présentés. Puis dans la continuité, des modèles d'estimations du nombre de cycles à rupture basés sur différents critères sont évoqués. Dans un deuxième temps, la formulation thermomécanique de la fatigue est abordée, et différentes relations d'entropie de rupture sont présentées. Dans un troisième temps, la procédure expérimentale est développée à travers la présentation de la thermographie, du montage expérimental, et des hypothèses utilisées. En quatrième partie sont présentés les résultats tirés des différentes relations permettant d'obtenir les valeurs expérimentales et leur comparaison aux modèles empiriques. Puis, un endommagement basé sur l'entropie est abordé. La cinquième partie traite de l'étude des modèles empiriques sur l'estimation de l'entropie de rupture. Finalement, la dernière partie est consacrée à l'exergie, sa présentation et sa dérivation ainsi que son application à la fatigue.

— **Analyse multiéchelle en mécanique :**

Cette partie commence par un rappel de géométrie fractale et une bibliographie non exhaustive sur ce sujet vu l'abondance de documents autour de ce domaine tel que l'auto similarité, l'auto affinité, la multifractalité... Dans la continuité, des théories liées à la dépendance en échelle puis à ce que l'on appelle l'entropie d'échelle sont présentées. Ensuite, l'équation de diffusion de l'entropie d'échelle est présentée sur différents cas simples et étudiée sur plusieurs termes sources. Cette étude mène à une généralisation de l'équation de diffusion de l'entropie d'échelle permettant des comportements variés dans l'espace des échelles, conduisant à l'étude de géométries fractales déterministes finies et leur lien avec la log-périodicité. Des applications concrètes de l'équation de diffusion d'entropie d'échelle sont ensuite analysées en mécanique. La détermination de propriétés mécaniques, l'analyse de faciès de rupture ou encore la fragmentation ont ainsi été étudiées. Pour finir, la théorie constructale est évoquée à travers l'entropie d'échelle pouvant mener à une approche constructale macroscopique et microscopique.

## Contexte

Le travail transdisciplinaire présenté dans cette thèse implique le laboratoire énergétique mécanique et électromagnétisme (LEME - UPN) et plus précisément deux opérations, l'opération Exergie et l'opération Mécanique Numérique et Théorique qui ont permis la réalisation des essais en fatigue oligocyclique.

## Fatigue et thermodynamique classique

*Une confrontation permanente entre théorie et expérience est une condition nécessaire à l'expression de la créativité.*

– Pierre Joliot-Curie

### Sommaire

<b>2.1 Historique</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>2.2 Fatigue : présentation et modèles</b> . . . . .	<b>4</b>
2.2.1 Mécanismes et généralités sur la fatigue . . . . .	5
2.2.2 Modèles d'estimation du nombre de cycles à rupture . . . . .	8
<b>2.3 La thermodynamique de la fatigue</b> . . . . .	<b>17</b>
2.3.1 Formulation de la thermomécanique . . . . .	17
2.3.2 Entropie de rupture pour la fatigue oligocyclique : Modèles empiriques	22
2.3.3 Entropie de rupture pour la fatigue oligocyclique : Relations permet-	
tant l'estimation de l'entropie de rupture . . . . .	23
<b>2.4 Procédure expérimentale en fatigue oligocyclique</b> . . . . .	<b>27</b>
2.4.1 La thermographie en fatigue . . . . .	27
2.4.2 Montage expérimental . . . . .	30
2.4.3 Hypothèses et remarques générales . . . . .	31
<b>2.5 Résultats et discussion sur l'entropie de rupture</b> . . . . .	<b>32</b>
2.5.1 Vérification de l'hypothèse 1D . . . . .	32
2.5.2 Estimations de l'entropie de rupture . . . . .	33
2.5.3 De l'entropie à l'endommagement . . . . .	47
<b>2.6 Étude des modèles d'estimation empiriques</b> . . . . .	<b>55</b>
2.6.1 Sur l'imprécision du modèle de Park et Nelson . . . . .	55
2.6.2 Sur le modèle de Ramberg-Osgood cyclique . . . . .	56
<b>2.7 Exergie en fatigue</b> . . . . .	<b>64</b>
2.7.1 Exergie et notion de qualité . . . . .	64
2.7.2 Des deux principes à l'exergie . . . . .	65
2.7.3 L'exergie de déformation . . . . .	70
<b>2.8 Conclusion</b> . . . . .	<b>77</b>
<b>Nomenclature - Fatigue et thermodynamique classique</b> . . . . .	<b>79</b>
<b>Références</b> . . . . .	<b>87</b>

## 2.1 Historique

DEPUIS Newton<sup>1</sup> (1642-1727), la mécanique n'a cessé de prendre de l'ampleur car c'est un domaine scientifique qui possède un aspect sociétal indéniable dans une civilisation urbanisée. Les domaines de la fragmentation et de la rupture en fatigue étant des exemples parmi d'autres. Les contributions de divers spécialistes au cours du temps comme Robert Hooke (1635-1703) avec sa théorie de l'élasticité linéaire, Augustin Cauchy (1789-1857) avec la notion de contrainte, et Thomas Young (1773-1829) qui introduisit le module de Young<sup>2</sup> (ou d'élasticité) vinrent améliorer nos connaissances sur les matériaux et diversifier nos études autour de ceux-ci. Les enjeux de compréhension des phénomènes mécaniques requièrent ainsi encore beaucoup d'attention chez les spécialistes. L'un d'eux consiste en la compréhension du phénomène de fatigue qui implique le vieillissement mécanique d'un matériau et permettrait ainsi d'accéder à la prédiction de la durée de vie restante d'un matériau.

Depuis la création par Sadi Carnot (1796-1832) de ce qui sera appelé plus tard la thermodynamique<sup>3</sup>, cette science traite de l'étude des transformations d'énergie et des états d'équilibre d'un corps. Elle se base principalement sur deux principes. Le premier étant celui de James Joule (1818-1889) postulant la conservation de l'énergie<sup>4</sup>. Mais, Carnot dans son travail précurseur avait remarqué l'existence d'une dissymétrie entre travail et chaleur, ce qui mena au deuxième principe de la thermodynamique introduit par Rudolf Clausius (1822-1888)<sup>5</sup> et au concept d'entropie (puis plus tard à la thermodynamique des processus irréversibles). La thermodynamique de nos jours contribue à expliquer les phénomènes complexes dans des domaines divers qui ne sont plus forcément liés à l'énergétique. En effet, le second principe et plus précisément l'entropie est un concept très vaste à travers ses diverses définitions (entropie de Clausius, de Boltzmann, de Gibbs-Shannon, de Rényi, de Tsallis... voir [Pellegrino et Ghibaudo \[2014\]](#)) et contribue à étudier l'organisation et la configuration des systèmes.

Toute transformation réelle d'un système est irréversible du point de vue du deuxième principe, l'entropie paraît de fait offrir une mesure naturelle de la dégradation faisant de ce concept, un outil d'étude du comportement d'un matériau.

## 2.2 Fatigue : présentation et modèles

La défaillance d'une structure ou d'une de ses parties soumise à des cycles de sollicitations est un domaine d'intérêt majeur puisque diverses applications mécaniques existent au sein de l'économie actuelle. On dit d'un matériau qu'il est soumis à la fatigue lorsqu'il subit des sollicitations cycliques menant après un certain temps, à une formation de fissures puis à la rupture. La prédiction de la durée de vie d'un matériau possède par conséquent une dimension sociétale non négligeable, on peut citer par exemple un accident de déraillement

---

1. Dans ses *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687), Newton introduit à la fois le calcul différentiel et ses trois lois de la mécanique.

2. Définition donnée par Young : "Le module d'élasticité d'une substance quelconque est une colonne de cette même substance capable d'exercer sur sa base une pression qui est, par rapport au poids causant un certain degré de compression, comme la longueur de cette substance par rapport à sa diminution de longueur".

3. *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance* (1824).

4. Les deux articles de Joule permettent à la fois la mise en évidence du premier principe, mais aussi la création de la calorie comme unité : *On the Mechanical Equivalent of Heat - On the Existence of an Equivalent Relation between Heat and the ordinary Forms of Mechanical Power* (1845).

5. La communauté scientifique était réticente concernant l'idée d'entropie, il lui faudra huit ans pour qu'elle soit acceptée : *Ueber eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie* (1854) - *Über die Wärmeleitung gasförmiger Körper* (1862).

de train au Canada [BST, 2009].

## 2.2.1 Mécanismes et généralités sur la fatigue

### Caractéristiques de la fatigue

Les premiers travaux réalisés sur l'étude de la fatigue remontent à Albert un ingénieur allemand dans l'environnement minier<sup>6</sup>. À leur tour Rankine<sup>7</sup>, Morin<sup>8</sup> puis Poncelet<sup>9</sup> (qui dénommera la fatigue comme le phénomène de vieillissement du matériau), étudieront ce phénomène nouveau pour l'époque. C'est August Wöhler qui sera le premier à introduire la notion de durée de vie à travers ses courbes contrainte-nombre de cycles à rupture<sup>10</sup>. Cette courbe aussi appelée courbe de Wöhler, permet de catégoriser les trois types de fatigue :

- La fatigue à faible nombre de cycles (low cycle fatigue < 10<sup>5</sup> cycles) aussi appelée fatigue oligocyclique qui concerne les grandes contraintes
- La fatigue à grand nombre de cycles (high cycle fatigue < 10<sup>7</sup> cycles) aussi appelée domaine d'endurance limitée qui concerne les contraintes intermédiaires
- La fatigue à très grand nombre de cycles (very high cycle fatigue > 10<sup>7</sup> cycles) aussi appelée domaine d'endurance qui concerne les très faibles contraintes

Dans le cadre d'essais mécaniques en laboratoire, on se limite généralement à des sollicitations cycliques de type sinusoïdales et uniaxiales. Dès lors, la réponse classique contrainte-déformation se traduit habituellement par une boucle d'hystérésis en fatigue oligocyclique (voir figure 2.1) dépendante des sollicitations et de leurs amplitudes aboutissant aux définitions de l'amplitude de contrainte et de la contrainte moyenne :

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \quad \text{et} \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \quad (2.1)$$

L'évolution du chargement ( $\sigma$ ) en fonction du temps d'une part, et le ratio de charge ( $R_\sigma$ ) d'autre part permettent de distinguer les différents types de sollicitations (figure 2.2) que l'on utilise en fatigue à faible et grand nombre de cycles (avec  $f$  la fréquence de sollicitation) :

$$\sigma = \sigma_m + \frac{\Delta\sigma}{2} \sin(2\pi f t) \quad \text{et} \quad R_\sigma = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad (2.2)$$

Lors d'un test en laboratoire, on peut choisir d'asservir en contrainte ou bien en déformation suivant les paramètres que l'on souhaite contrôler. En asservissant en contrainte par exemple, la boucle d'hystérésis contrainte-déformation possède différents comportements suivant le matériau sollicité ou l'état d'endommagement de celui-ci :

- Lorsque le matériau est sollicité élastiquement, l'aire de l'hystérésis est nulle et identique à chaque cycle.
- Le phénomène d'adaptation correspond à un matériau qui, sollicité plastiquement dans un premier temps va tendre vers un comportement élastique au fil des cycles
- L'accommodation plastique correspond à une stabilisation de la boucle d'hystérésis après plusieurs cycles
- L'effet rochet est relatif à une augmentation de la déformation plastique moyenne jusqu'à la rupture de l'échantillon

6. Über Treibseile am Harz (1837).

7. On the causes of unexpected breakage of the journals of the railway axles and on the means of preventing such accidents by observing the law of continuity in their construction (1842).

8. Leçons de Mécanique Pratique - Résistance des Matériaux (1853)

9. Introduction à la Mécanique Industrielle, Physique ou Expérimentale (1939)

10. Über die Festigkeits-Versuche mit Eisen und Stahl

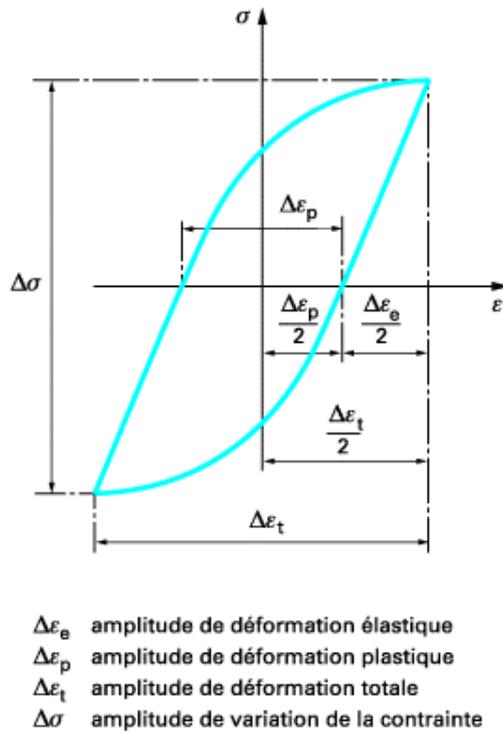


FIGURE 2.1 – Boucle d’hystérésis contrainte-déformation symbolisant un cycle de sollicitation [Rabbe et al., 2016]

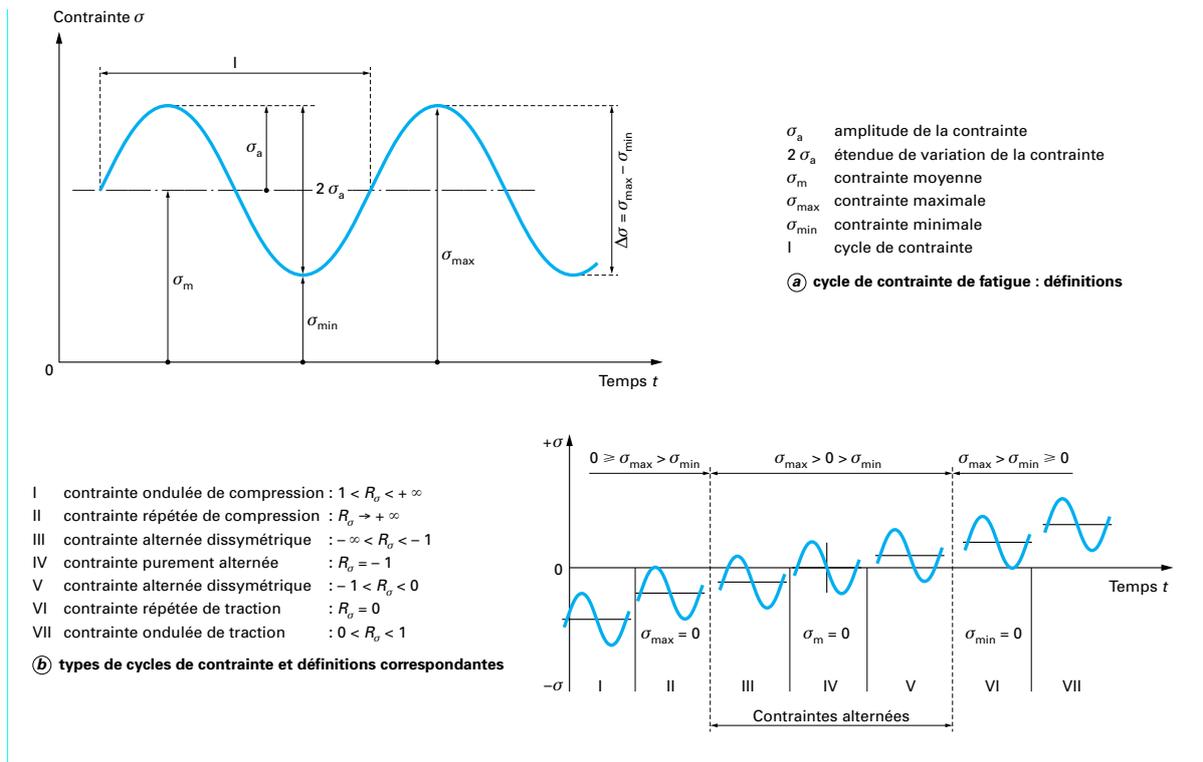


FIGURE 2.2 – Classification des sollicitations [Rabbe et al., 2016]

### Mécanismes de la fatigue

Deux types d’initiations de fissure en fatigue sont décrites dans la littérature. Le premier type étant l’initiation de fissure en surface et le deuxième étant une initiation au niveau d’une inclusion interne au matériau. Ces différents types d’initiations ont une même origine,

les lignes de glissement causées par la dynamique des dislocations (phénomène de Frank-Read par exemple en figure 2.3 et figure 2.4). Certaines d'entre elles sont appelées bandes de glissement persistantes, elles manifestent le caractère irréversible du phénomène de fatigue car elles réapparaissent lors de la reprise d'un test, même après un polissage. Pour ce qui est de la propagation des fissures, celle-ci suit deux stades. Un premier où les microfissures se propagent suivant le plan des bandes de glissement au niveau du grain (stade I - figure 2.5), puis un deuxième stade où la fissure traverse les grains perpendiculairement à la contrainte principale (stade II - figure 2.5).

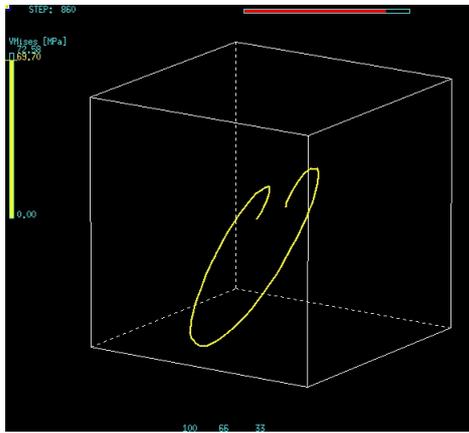


FIGURE 2.3 – Boucle de Franck-Read simulée [Fivel et Verdier]



FIGURE 2.4 – Boucle de Franck-Read in vivo [Fivel et Verdier]

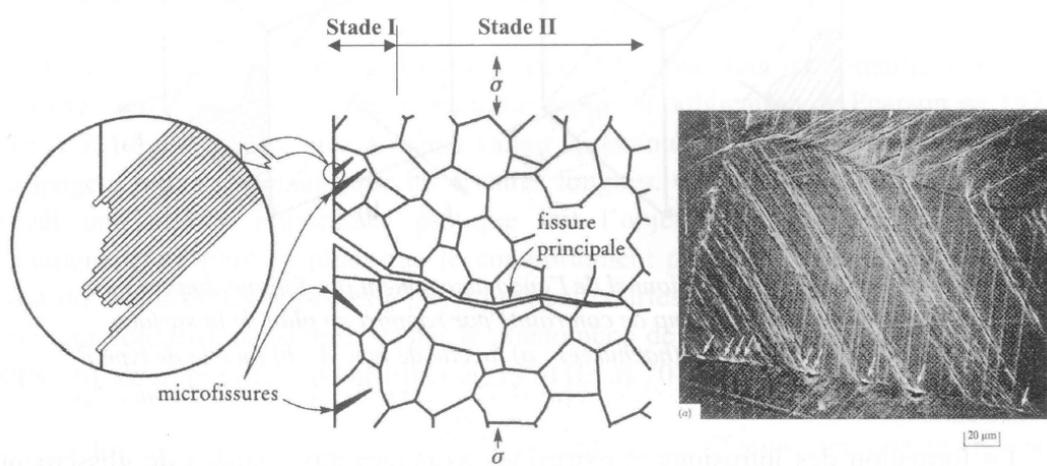


FIGURE 2.5 – Les différents stades de propagation de fissure [Bathias et Bailon, 1997]

Dans le cas général de fatigue oligocyclique à déformation imposée, trois phases liées aux phénomènes physiques en microstructure apparaissent durant le test (figure 2.6) :

- Dans un premier temps, la contrainte augmente fortement lors des premiers cycles ainsi que la température témoignant d'une accumulation d'énergie.
- Ensuite, l'amplitude de contrainte et la température se stabilisent.
- La dernière étape correspond à un écroulement de la contrainte associée à la création de macrofissures et accompagnée d'une brusque augmentation de température.

Les deux premières phases correspondent au stade I d'amorçage qui équivaut à la dynamique des dislocations avant la création d'une fissure, avec création de dislocation à partir de défauts existants, annihilation des dislocations de sens opposés puis apparition de bandes de glissements persistantes. Le dernier stade correspond à la propagation de fissure, avec une première phase d'orientation où des fissures s'amorcent dans la direction des

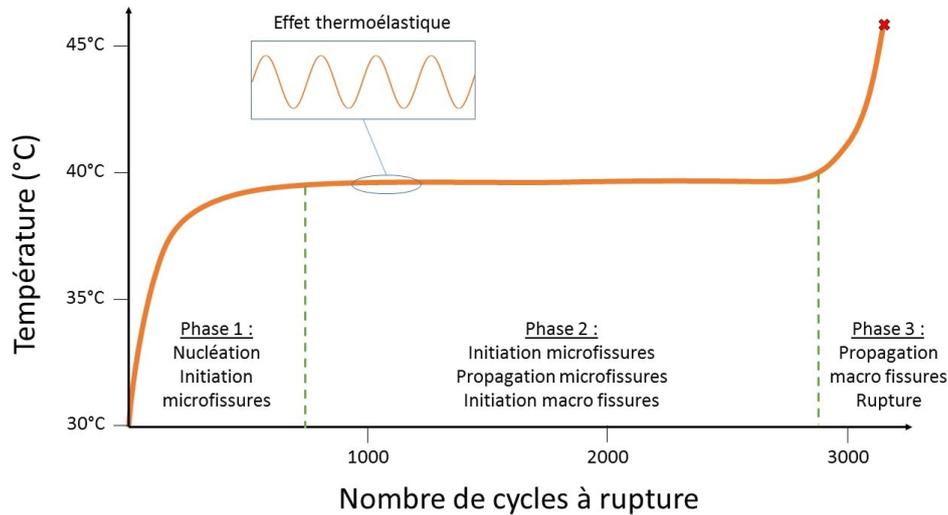


FIGURE 2.6 – Les trois phases typiques d’un essai de fatigue

bandes de glissements persistantes puis, après avoir outrepassé les barrières microstructurales comme les joints de grains, deviennent une macrofissure qui se propage perpendiculairement à la direction de la contrainte principale. La phase finale est ainsi une phase de propagation à proprement parler avec un accompagnement de striations et d’oxydation. À faible contrainte, la formation et la phase d’orientation représentent entre 40 et 99 % de la durée de vie du matériau (voir 90-99 % en fatigue gigacyclique), en effet, l’apparition des bandes de glissement est précoce, mais c’est la formation des microfissures dans celles-ci qui est lente. De plus, la fissure peut s’amorcer directement en stade II, lorsque de grosses inclusions clivées conduisent à des stries aiguës. Pour les grandes contraintes, la proportion est inversée et 10 % de la durée de vie seulement correspond à l’amorçage contre 90 % pour la propagation [Bathias, 2013].

### 2.2.2 Modèles d’estimation du nombre de cycles à rupture

#### Modèles basés sur la déformation

Les modèles d’estimation du nombre de cycles à rupture ont été proposés initialement par Manson [1964a] et Coffin [1971] à travers une loi empirique pour la fatigue oligocyclique. Cette loi relie le nombre de cycles à rupture du matériau à la déformation plastique.

$$\frac{\Delta\epsilon_p}{2} = \epsilon'_f N_f^c \tag{2.3}$$

$\Delta\epsilon_p$  : Variation de déformation plastique

$\epsilon'_f$  : Coefficient de ductilité en fatigue

$N_f$  : Nombre de cycles à rupture

$c$  : Exposant de ductilité en fatigue

Des lois de plasticité ont aussi été étendues à la fatigue oligocyclique (type Ramberg-Osgood). Stephens et al. [2001] utilisent ainsi :

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\Delta\epsilon_e}{2} + \frac{\Delta\epsilon_p}{2} = \frac{\sigma'_f}{E_y} (2n_f)^b + \epsilon'_f (2n_f)^c = \frac{\Delta\sigma}{2E_y} + \left(\frac{\Delta\sigma}{2K'}\right)^{1/n'} \tag{2.4}$$

$$K' = \frac{\sigma'_f}{(\epsilon'_f)^{b/c}} \quad n' = b/c \tag{2.5}$$

$\Delta\sigma$  : Amplitude de contrainte [Pa]  
 $E_y$  : Module de Young [Pa]  
 $K'$  : Module d'écrouissage cyclique [Pa]  
 $n'$  : Exposant d'écrouissage cyclique  
 $\sigma'_f$  : Coefficient de résistance à la fatigue [Pa]  
 $\epsilon'_f$  : Coefficient de ductilité en fatigue  
 $2n_f = N_f$  : Nombre de cycles à rupture  
 $b$  : Exposant de résistance à la fatigue  
 $c$  : Exposant de ductilité en fatigue

### Modèles basés sur l'énergie

Le rôle de la dissipation d'énergie associée à la déformation plastique fut étudié par **Morrow** [1965] et **Halford** [1966] (figure 2.7), en la liant aux relations empiriques existantes :

$$W_p = 4\sigma'_f \epsilon'_f \left( \frac{c-b}{c+b} \right) (2n_f)^{b+c} \quad (2.6)$$

$W_p$  : Travail de déformation plastique cyclique [ $J/m^3$  cycle]  
 $\sigma'_f$  : Coefficient de résistance à la fatigue [Pa]  
 $\epsilon'_f$  : Coefficient de ductilité en fatigue  
 $2n_f = N_f$  : Nombre de cycles à rupture  
 $b$  : Exposant de résistance à la fatigue  
 $c$  : Exposant de ductilité en fatigue

Puis l'énergie stockée par le matériau fut abordée [Aravas et al., 1990, Bever et al., 1973, Clarebrough et al., 1957] (figure 2.8, figure 2.9). **Park et Nelson** [2000] quant à eux introduisent des relations liant le nombre de cycles à rupture et les énergies de déformation plastique et de déformation élastique pour la fatigue à faible et grand nombre de cycles :

$$W_T = W_p + W_e = AN_f^\alpha + BN_f^\beta \quad (2.7)$$

$$A = 2^{2+b+c} \sigma'_f \epsilon'_f \left( \frac{c-b}{c+b} \right) \quad \alpha = b+c \quad B = \frac{2^{2b+1} (1+\nu) \sigma'_f{}^2}{3E_y} \quad \beta = 2b \quad (2.8)$$

$W_p$  : Travail de déformation plastique cyclique [ $J/m^3$  cycle]  
 $W_e$  : Travail de déformation élastique cyclique [ $J/m^3$  cycle]  
 $W_T$  : Travail de déformation cyclique total [ $J/m^3$  cycle]  
 $\sigma'_f$  : Coefficient de résistance à la fatigue [Pa]  
 $\epsilon'_f$  : Coefficient de ductilité en fatigue  
 $N_f$  : Nombre de cycles à rupture  
 $b$  : Exposant de résistance à la fatigue  
 $c$  : Exposant de ductilité en fatigue  
 $E_y$  : Module de Young [Pa]  
 $\nu$  : Coefficient de Poisson

Une autre direction a été proposée à travers l'utilisation de la chaleur comme critère d'étude valable pour la fatigue, et non plus le travail de déformation seul [Fargione et al., 2002, Iacoviello et al., 2015, La Rosa et Risitano, 2000, Meneghetti et Ricotta, 2012] (figure 2.10).

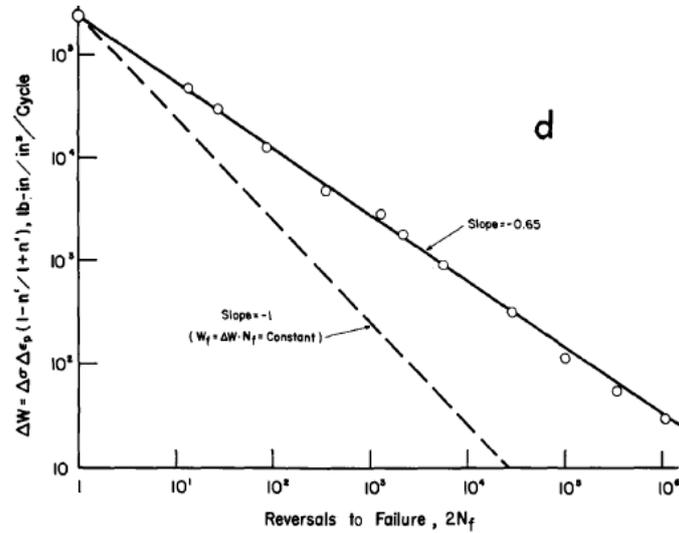


FIGURE 2.7 – Énergie de déformation plastique cyclique en fonction de la durée de vie [Morrow, 1965]

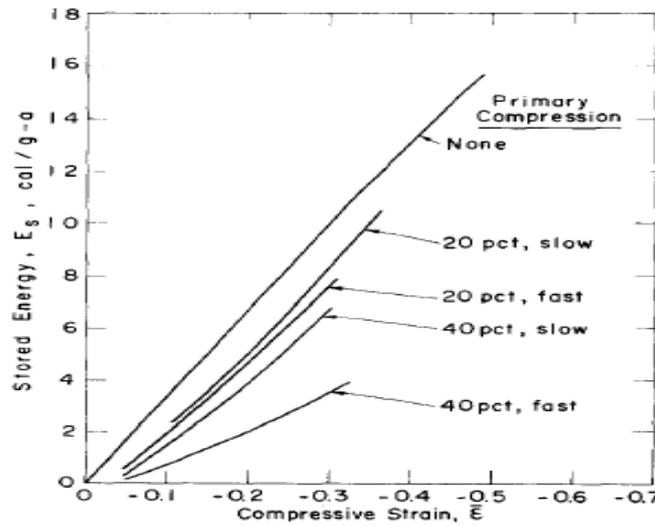


FIGURE 2.8 – Énergie stockée dans le cuivre à la première compression puis à la seconde, pour des vitesses différentes en première compression [Bever et al., 1973]

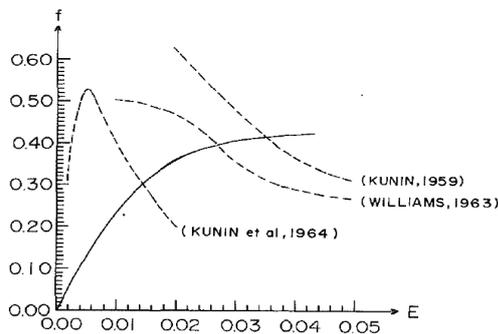


FIGURE 2.9 – Comparaison du modèle théorique et des données expérimentales de la littérature pour la fraction d'énergie bloquée en fonction de l'énergie de déformation [Aravas et al., 1990]

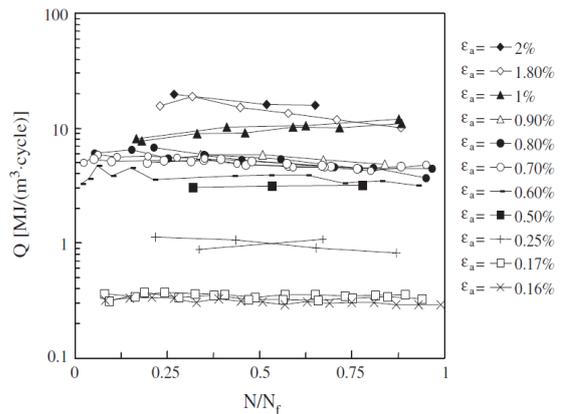


FIGURE 2.10 – Densité d'énergie chaleur cyclique en fonction de la durée de vie d'un acier inoxydable 304 pour différentes amplitudes de déformation [Meneghetti et Ricotta, 2012]

### Modèles basés sur l'entropie

Dans un premier temps, l'entropie a été utilisée comme critère de prédiction pour la rupture mécanique [Ital'yantsev, 1984a,b] puis, la création d'entropie classique et l'entropie de Boltzmann ont été utilisées par Basaran et Nie [2004] et Basaran et al. [2003] dans le cadre de l'endommagement des matériaux allant jusqu'à la thermodynamique de la dégradation [Bryant et al., 2008]. Dans un deuxième temps, il a été observé qu'un matériau soumis à une fatigue oligocyclique possède une valeur seuil de production d'entropie au-delà de laquelle la rupture en fatigue est inévitable, et ce, indépendamment des paramètres du système (taille, type de sollicitation, amplitude et fréquence de sollicitation...). Ce que Khonsari et Amiri [2012] appelle la Fracture Fatigue Entropy (FFE) est précisément cette constante, apparemment intrinsèque au matériau et représentant le maximum d'entropie accumulée au sein de l'échantillon (obtenue dans le cadre d'essais en fatigue oligocyclique). Le premier article consacré à l'étude de la FFE provient de Naderi et al. [2009], où la base thermodynamique est reprise, et un modèle de travail de déformation plastique basé sur la loi de Morrow (équation 2.6) est utilisé pour estimer la FFE à partir de différents types d'essais. Les résultats obtenus de la FFE (pour un matériau donné) apparaissent assez constants et peu sensibles à la variation de fréquence, d'épaisseur, d'amplitude de déplacement ou encore du type de sollicitation (figure 2.11 - figure 2.12).

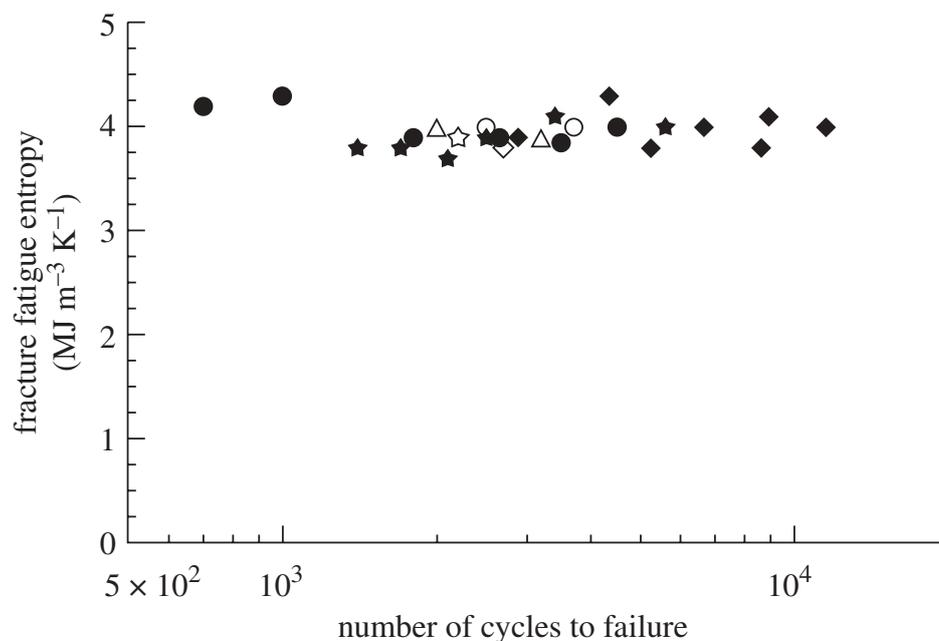


FIGURE 2.11 – Résultats de la FFE pour l'aluminium 6061-T6 en fatigue de type flexion avec des amplitudes de déplacement variant de 25 à 50mm (cercle rempli : épaisseur 6.35mm - f=10Hz; diamant rempli : épaisseur 3.00mm - f=10Hz; étoile remplie : épaisseur 4.82mm - f=10Hz; cercle vide : épaisseur 6.35mm - f=6.5Hz; triangle vide : épaisseur 4.82mm - f=12.5Hz; étoile vide : épaisseur 6.35mm - f=6.5Hz; diamant vide : épaisseur 6.35mm - f=12.5Hz) [Naderi et al., 2009]

Naderi et Khonsari [2010a,b] se sont intéressés au lien existant entre l'accumulation de l'endommagement et la production d'entropie, puis à l'accumulation d'endommagement dans le cas de chargements variables où l'endommagement est exprimé en fonction de la production d'entropie. L'évolution de l'endommagement semble ainsi universelle et indépendante des conditions expérimentales (figure 2.13 - figure 2.14). De plus, l'analyse thermodynamique par la production d'entropie s'est étendue aux composites à travers Naderi et Khonsari [2012] et à l'étude de l'effet de la concentration de contrainte sur la FFE [Liakat et Khonsari, 2015a] (figure 2.15 - figure 2.16).

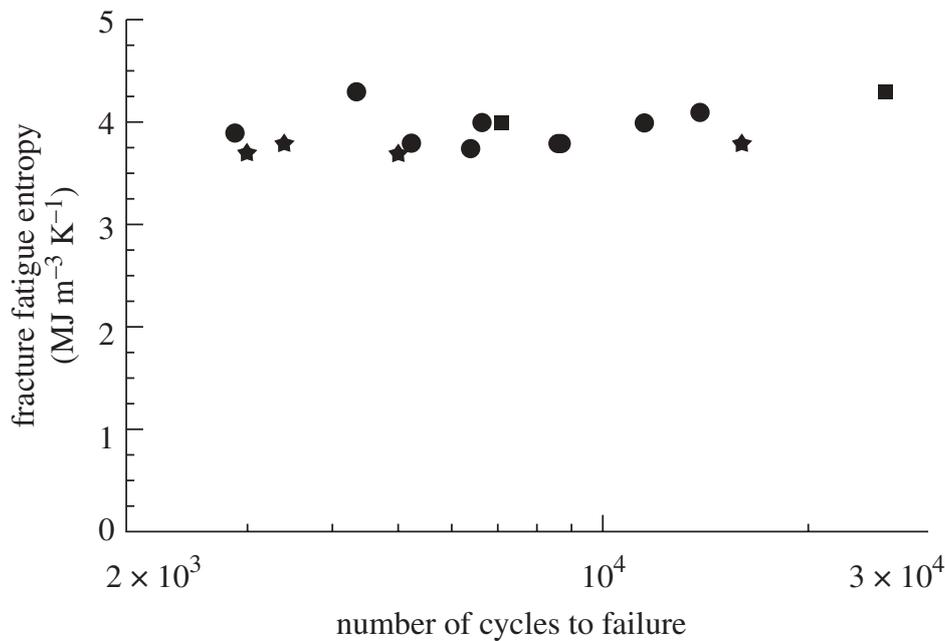


FIGURE 2.12 – Résultats de la FFE pour l'acier 304 en fatigue de type flexion et torsion avec des amplitudes de déplacement variant de 25 à 50mm (cercle rempli : flexion -  $f=10\text{Hz}$ ; triangle rempli : flexion -  $f=18\text{Hz}$ ; diamant rempli : flexion -  $f=6\text{Hz}$ ; étoile remplie : torsion -  $f=10\text{Hz}$ ) [Naderi et al., 2009]

Des réflexions théoriques complémentaires ont été menées sur la mécanique en lien avec la thermodynamique et la production d'entropie marquant l'irréversibilité des phénomènes par l'intermédiaire de Amiri et Khonsari [2010a], Amiri et Modarres [2014], Amiri et al. [2015]. Par exemple, à partir du postulat de l'existence d'une FFE constante, Amiri et Khonsari [2012] parviennent à retrouver les lois de Coffin-Manson et de Miner pour l'endommagement, puis, à partir du théorème de dégradation de Bryant et al. [2008] qui lie création d'entropie et coefficient de dégradation, déduisent un lien entre le coefficient de dégradation et la constante de la loi de Paris (loi de croissance de fissure en fatigue). Pour finir, il existe des moyens rapides d'estimer à la fois la FFE, l'endommagement et la durée de vie en fatigue, mis au point en utilisant la pente des phases d'augmentation de température lorsque le matériau est sollicité [Liakat et Khonsari, 2014a,b] (figure 2.17). Une extension à la fatigue à grand nombre de cycles [Liakat et Khonsari, 2015b] (figure 2.18) et une application à la prédiction d'initiation de fissure [Ontiveros et al., 2015] ont aussi été explorées.

### Propriétés en fatigue

Les lois évoquées à savoir la loi de Morrow (équation 2.6) et le modèle de Park et Nelson (équation 2.7 et équation 2.8) permettent l'estimation d'un travail de déformation plastique, mais nécessitent la connaissance des propriétés en fatigue du matériau étudié, soit :

- $\sigma'_f$  et  $\epsilon'_f$  représentant les coefficients de résistance à la fatigue et de ductilité en fatigue
- $b$  et  $c$  représentant les exposants de résistance à la fatigue et de ductilité en fatigue

La finitude du nombre d'échantillons à disposition nous impose de nous concentrer sur l'estimation de la FFE plutôt que sur la détermination des propriétés en fatigue. En effet, ces coefficients et exposants peuvent être déterminés par des méthodes plus ou moins générales. Morrow [1965] fut le premier à estimer les exposants en fatigue à partir de ce que l'on appelle l'exposant d'écrouissage cyclique  $n'$  :

$$b = \frac{-n'}{1+5n'} \quad c = \frac{-1}{1+5n'} \quad (2.9)$$

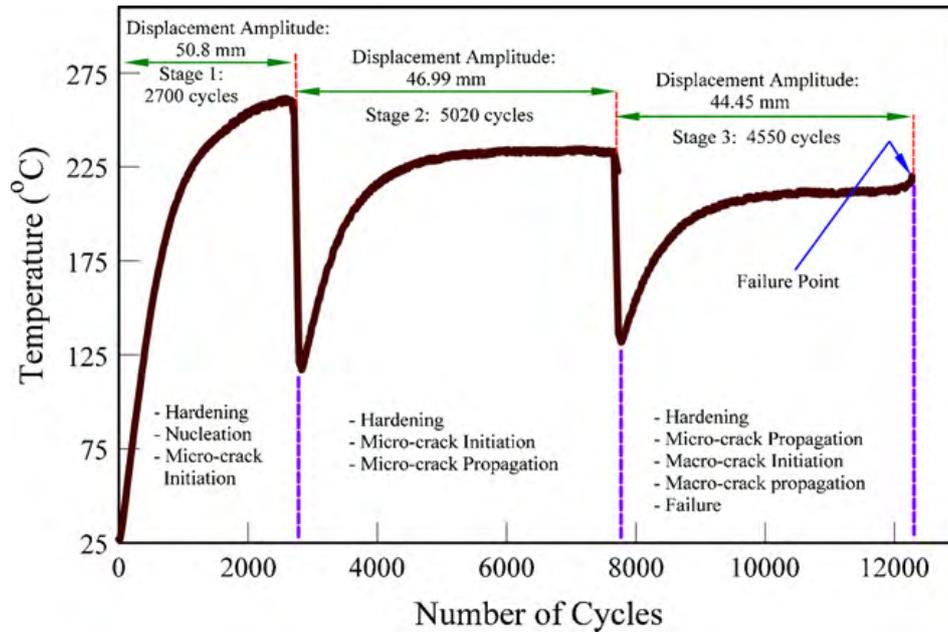


FIGURE 2.13 – Évolution de la température pour le SS 304 en fonction du nombre de cycles pour des amplitudes de déplacement étagées [Naderi et Khonsari, 2010b]

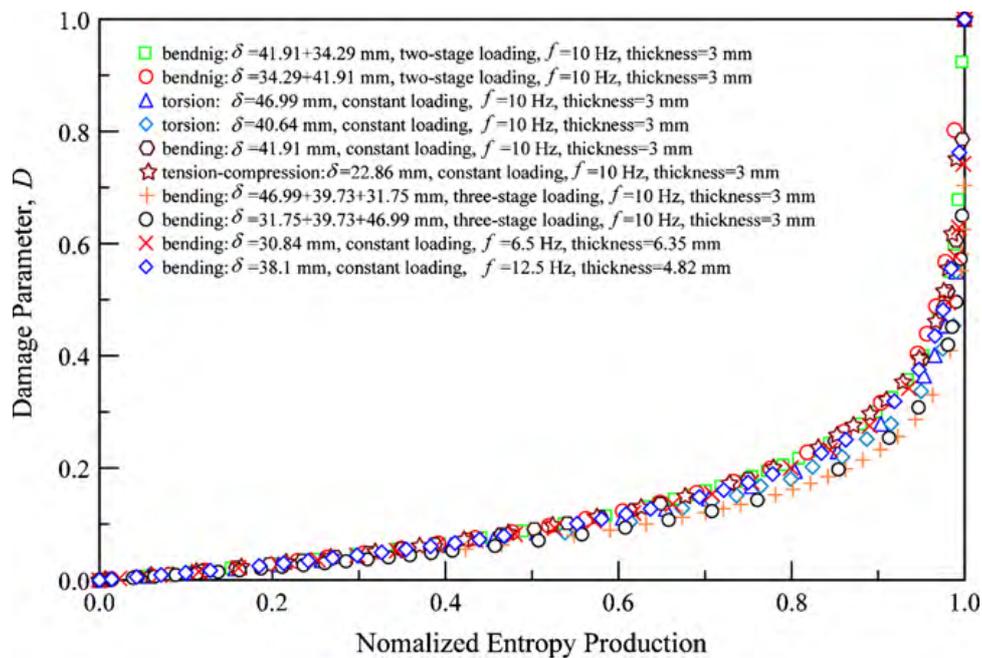


FIGURE 2.14 – Endommagement en fonction de la production d'entropie (normalisée par la FFE) pour l'aluminium 6061-T6 dans diverses configurations expérimentales [Naderi et Khonsari, 2010b]

Puis Manson [1964b] mis au point deux méthodes différentes, la première étant la méthode des pentes universelles, utilisant la résistance mécanique ( $S_u$ ) et la réduction de section (RA) à la rupture :

$$\sigma'_f = 1,9 S_u \quad \epsilon'_f = 0,76 \left[ \ln \left( \frac{1}{1 - RA} \right) \right]^{0,6} \quad b = -0,12 \quad c = -0,6 \quad (2.10)$$

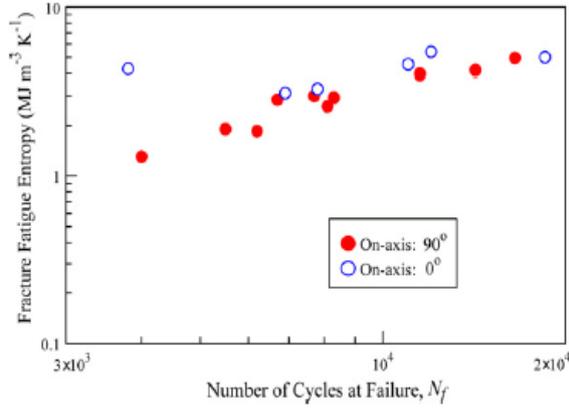


FIGURE 2.15 – FFE en fonction de la durée de vie pour des éprouvettes Verre/Epoxy (GR10/FR4) pour différents chargements (30-50mm d’amplitude de déplacement) à 10Hz et R=-1 en flexion [Naderi et Khonsari, 2012]

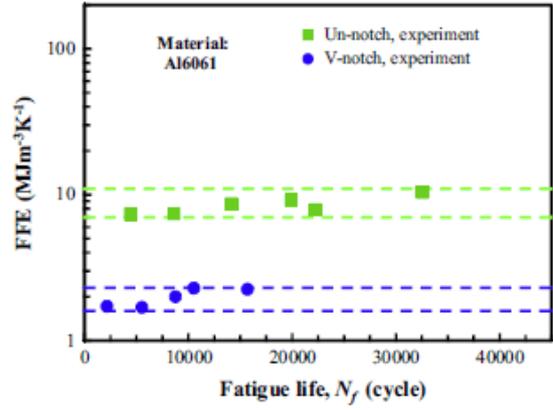


FIGURE 2.16 – FFE en fonction de la durée de vie pour des éprouvettes d’aluminium 6061 entaillées en V et non entaillées et pour différents chargements et différentes tailles d’éprouvettes [Naderi et Khonsari, 2010b]

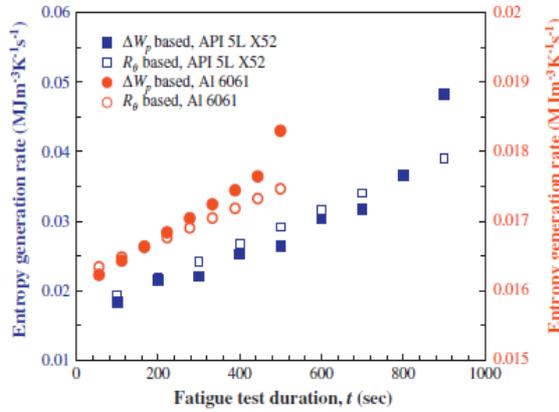


FIGURE 2.17 – Comparaison entre flux d’entropie générée obtenus en utilisant le travail de déformation plastique  $W_p$  (tests classiques) et la pente moyenne  $R_p$  (tests STE short-time excitation) pour l’API 5L X52 et l’Al 6061 [Liakat et Khonsari, 2014b]

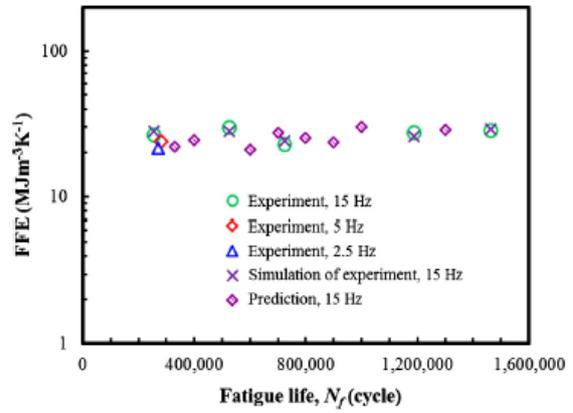


FIGURE 2.18 – FFE en fonction de la durée de vie pour des éprouvettes MCS 1018 pour différents chargements (en fatigue à grand nombre de cycles) [Liakat et Khonsari, 2015b]

Et la seconde, la méthode des corrélations à quatre points se basant sur des tests en traction monotone, utilisant le module de Young ( $E_y$ ) et l’allongement à la rupture ( $\epsilon_f$ ) :

$$\sigma'_f = 1,25 \sigma_f \cdot 2^b \quad \epsilon'_f = \frac{0,125}{20^c} \left[ \ln \left( \frac{1}{1-RA} \right) \right]^{3/4} \quad b = \frac{\log(0,36 Su/\sigma_f)}{5,6} \quad (2.11)$$

$$\sigma_f \approx Su(1 + \epsilon_f) \quad c = \frac{1}{3} \log \left( \frac{0,0066 - \sigma'_f (2 \cdot 10^4)^b / E_y}{0,239 (\ln [1/(1-RA)])^{3/4}} \right) \quad (2.12)$$

La première méthode fut modifiée par Muralidharan et Manson [1988] donnant l’équation 2.13 puis la seconde par Ong [1993] donnant l’équation 2.14 :

$$\sigma'_f = (0,623) E_y \left( \frac{Su}{E_y} \right)^{0,832} \quad \epsilon'_f = 0,0196 (Su/E_y)^{-0,53} \left[ \ln \left( \frac{1}{1-RA} \right) \right]^{0,155} \quad b = -0,09 \quad c = -0,56 \quad (2.13)$$

$$\sigma'_f = Su(1 + \epsilon_f) \quad \epsilon'_f = \epsilon_f \quad b = \frac{1}{6} \log \frac{(Su/E_y)^{0,81}}{6,25\sigma_f/E_y} \quad c = \frac{1}{4} \log \frac{0,0074 - \sigma'_f(10^4)^b/E_y}{2,074\epsilon_f} \quad (2.14)$$

**Socie et al. [1977]** présentèrent des lois permettant d'estimer les paramètres en fatigue en se focalisant sur les aciers, puis dans la continuité, **Mitchell [1979]** se focalisa sur les aciers dont la dureté Brinell était inférieure à 500 HB. **Bäumel et Seeger [1990]** se concentrèrent sur une différenciation des lois utilisées, menant ainsi à la différenciation des matériaux (Uniform Material Law, UML) :

$$\sigma'_f = 1,5Su \quad \epsilon'_f = 0,59 \quad \text{si } Su/E_y \leq 0,003 \quad b = -0,087 \quad c = -0,58 \\ \epsilon'_f = 0,812 - 75 Su/E_y \quad \text{si } Su/E_y > 0,003 \quad \text{Aciers} \quad (2.15)$$

$$\sigma'_f = 1,67Su \quad \epsilon'_f = 0,35 \quad b = -0,095 \quad c = -0,69 \quad \text{Alluminiums - Titanes} \quad (2.16)$$

**Roessle et Fatemi [2000]** proposèrent une méthode pour les métaux basée sur la dureté Brinell HB (Hardness Method, H) :

$$\sigma'_f = 4,25HB + 225MPa \quad \epsilon'_f = \frac{0,32HB^2 - 487HB + 191.10^9Pa}{E_y} \quad b = -0,09 \quad c = -0,56 \quad (2.17)$$

Puis, **Park et Song [1995]** analysèrent plusieurs des méthodes précédentes sur 138 matériaux dont 116 catégories d'acier, 16 alliages d'aluminium et 6 alliages de titane, ce qui permit de conclure que les méthodes de **Bäumel et Seeger [1990]**, **Muralidharan et Manson [1988]** et **Ong [1993]** fournissent les meilleures approximations des coefficients pour l'estimation du nombre de cycles à rupture. Plus récemment, **Meggiolaro et Castro [2004]** obtinrent une loi très simple basée sur la méthode des médianes pour les aciers et pour les alliages d'aluminium par l'intermédiaire d'une analyse statistique et une vérification expérimentale contenant 724 catégories d'acier et 81 alliages d'aluminium (Median Method, M) :

$$\sigma'_f = 1,5Su \quad \epsilon'_f = 0,45 \quad b = -0,09 \quad c = -0,59 \quad \text{Aciers} \quad (2.18)$$

$$\sigma'_f = 1,9Su \quad \epsilon'_f = 0,28 \quad b = -0,11 \quad c = -0,66 \quad \text{Alliages d'aluminium} \quad (2.19)$$

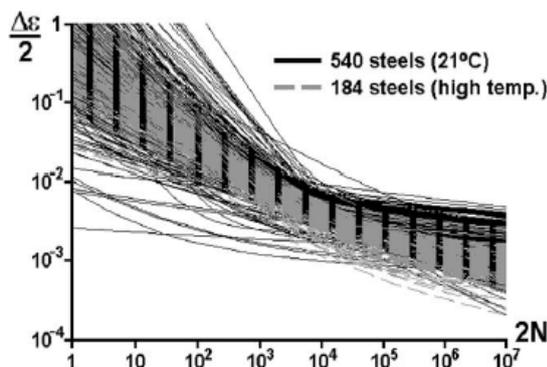


FIGURE 2.19 – Courbes de Coffin-Manson de 724 aciers pour des températures comprises entre 21°C et 800°C [Meggiolaro et Castro, 2004]

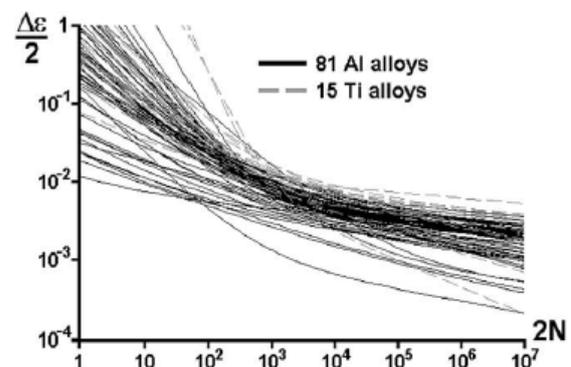


FIGURE 2.20 – Courbes de Coffin-Manson pour 81 alliages d'aluminium et 15 alliages de titane [Meggiolaro et Castro, 2004]

Les méthodes présentées pour estimer les différents coefficients et exposants en fatigue peuvent présenter une certaine disparité puisque ce sont des lois moyennes pour une grande quantité de matériaux différents (malgré leur même type). Cette disparité peut mener à des ordres de grandeur de différence dans l'estimation du nombre de cycles à rupture comme le souligne Meggiolaro et Castro [2004] (figure 2.19, figure 2.20), et donc à des erreurs sur l'estimation du travail de déformation plastique. D'autres articles présentent d'ailleurs des méthodes nouvelles afin de réduire les erreurs des méthodes générales s'appliquant à une population de matériaux [Basan et al., 2015, Fatemi et al., 2005, Lipski et Mroziński, 2012, Manson, 1964b, Marohnić et al., 2017] (figure 2.21, figure 2.22, figure 2.23).

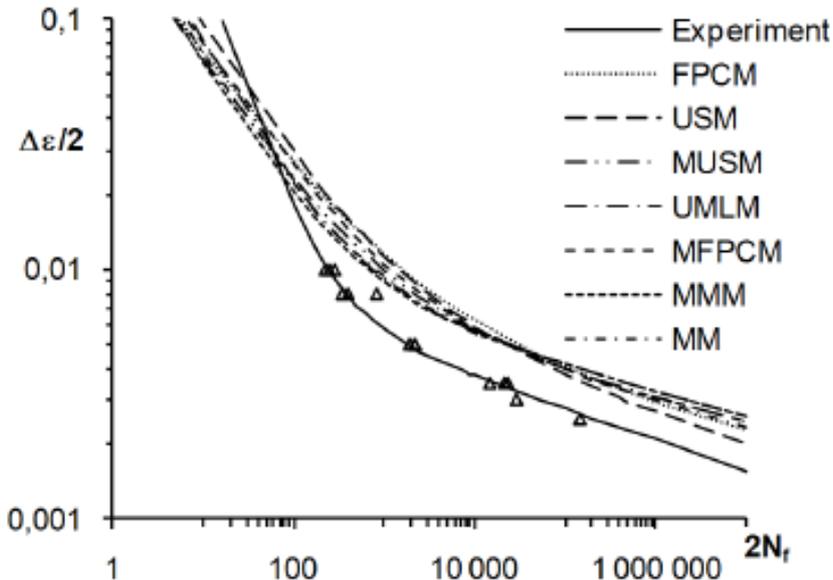


FIGURE 2.21 – Courbes de fatigue déterminées par différentes méthodes de la littérature comparées à l'expérience pour un Al-2024-T3 [Lipski et Mroziński, 2012]

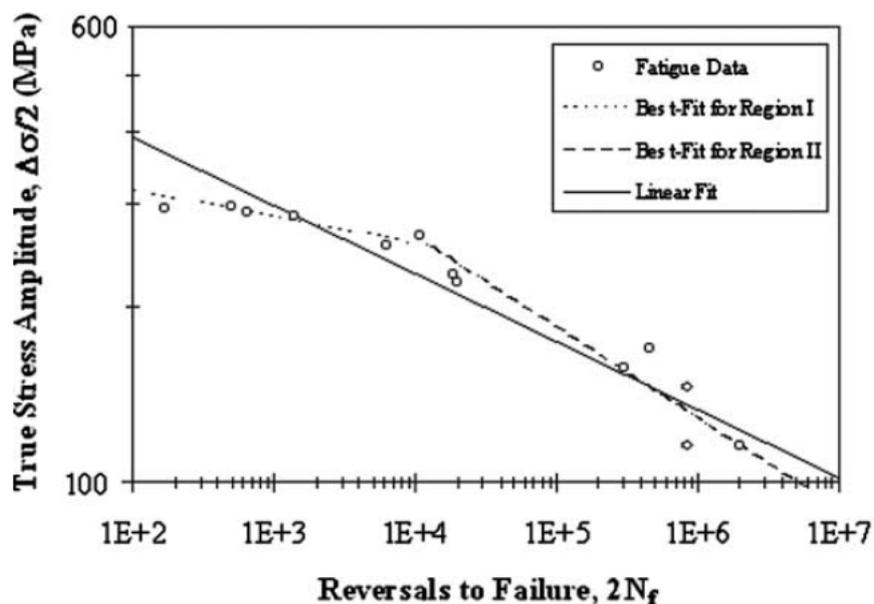


FIGURE 2.22 – Amplitude de contrainte en fonction du nombre de cycles à rupture pour l'Al 7075-T6 (modèle bilinéaire de la courbe contrainte-nombre de cycles à rupture) [Fatemi et al., 2005]

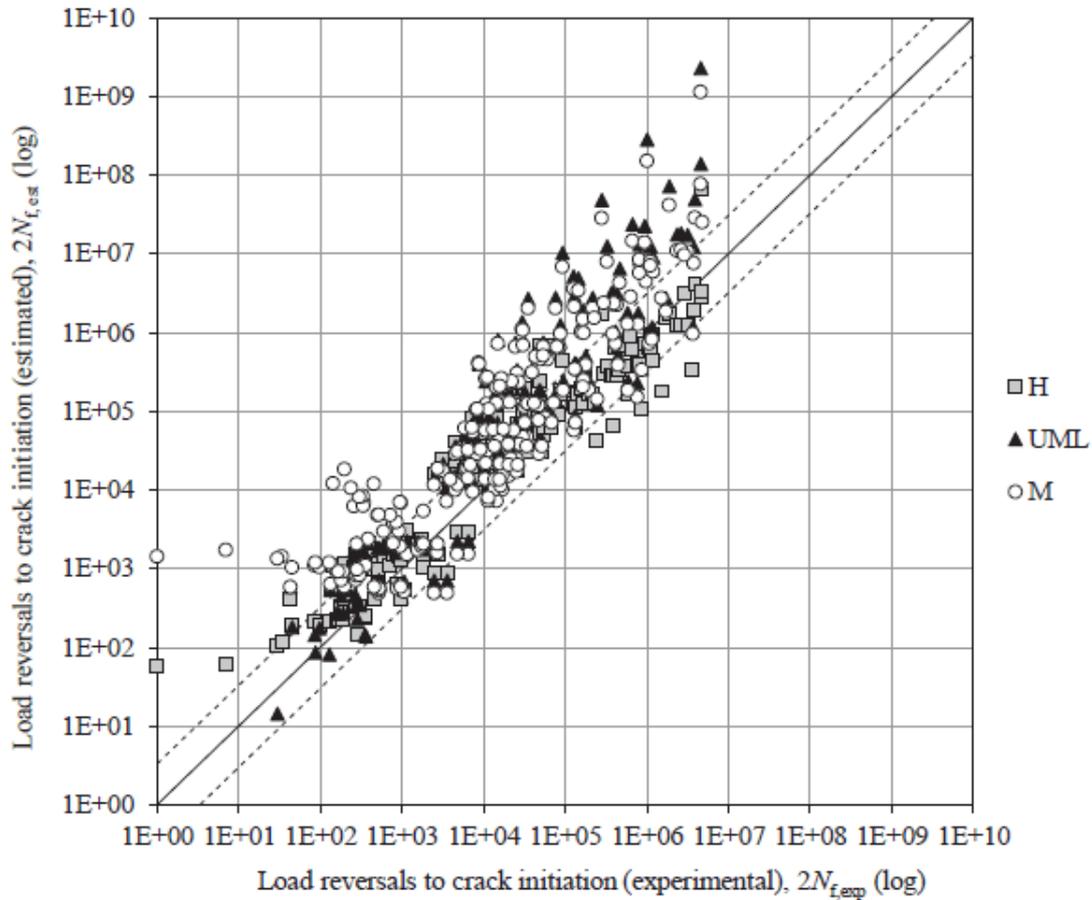


FIGURE 2.23 – Nombre de cycles à rupture obtenu par l'expérience et comparé aux modèles connus comme la Hardness Method (H), Uniform Material Law (UML) et la Median Method (M) [Basan et al., 2015]

## 2.3 La thermodynamique de la fatigue

### 2.3.1 Formulation de la thermomécanique

#### Premier principe

L'étude thermodynamique d'un échantillon soumis à la fatigue est réalisable en considérant la méthode de l'état local, ce qui permet d'assimiler le phénomène de fatigue à une suite de transformations quasi statiques (suite d'états d'équilibres). En d'autres termes, on considère le temps de relaxation du système à revenir à l'équilibre très inférieur au temps d'évolution du phénomène. En outre, puisque le nombre de Knudsen (rapport du libre parcours moyen des molécules sur l'échelle caractéristique du phénomène),  $Kn \ll 1$ , l'utilisation de la mécanique des milieux continus est possible, et les deux principes de la thermodynamique classique peuvent être appliqués. Ces deux principes sont de fait appliqués à un volume de contrôle ( $\Omega$ ) et aux frontières d'un échantillon ( $\partial\Omega$ ) soumis à la fatigue (voir figure 2.24), en considérant  $\vec{n}_x$ ,  $\vec{n}_y$  et  $\vec{n}_z$  les normales sortantes du volume de contrôle (correspondant à chacune des coordonnées spatiales étudiées, on utilisera  $\vec{n}$  dans la suite pour alléger l'écriture).

L'équation de bilan de puissance et le théorème de l'énergie cinétique s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}(dE + dK) = \frac{d}{dt}(\delta W + \delta Q) = \delta \dot{W} + \delta \dot{Q} \quad \frac{dK}{dt} = \delta \dot{W} + \delta \dot{W}_{int} \quad (2.20)$$

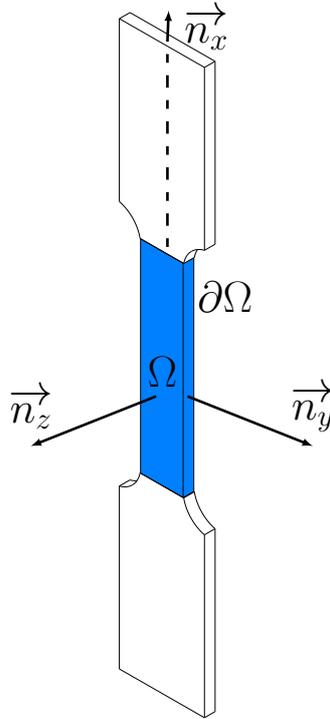


FIGURE 2.24 – Volume de contrôle et frontières d'étude pour une éprouvette plate

$$E = \int_{\Omega} dE = \int_{\Omega} \rho e d\Omega$$

E représente l'énergie interne, e l'énergie interne massique et  $\rho$  la masse volumique

$$K = \int_{\Omega} dK = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} d\Omega$$

K correspond à l'énergie cinétique, et  $\vec{v}$  le champ de vitesse (référentiel galiléen)

$$\dot{W} = \int_{\Omega} \delta \dot{W} = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{v} d(\partial\Omega)$$

$\dot{W}$  représente la puissance des efforts extérieurs sur le volume  $\Omega$ ,  $\vec{F}$  et  $\vec{f}$  sont les efforts surfacique et volumique qui s'exercent sur  $\partial\Omega$  et  $\Omega$

$$\dot{W}_{int} = - \int_{\Omega} \sigma : D d\Omega$$

$\dot{W}_{int}$  symbolise la puissance des efforts intérieurs, produit doublement contracté du tenseur des contraintes  $\sigma$  et du tenseur vitesse de déformation D, opérants sur le volume  $\Omega$

$$\dot{Q} = \int_{\Omega} \delta \dot{Q} = \int_{\Omega} \dot{r} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} d(\partial\Omega)$$

$\dot{Q}$  correspond à la puissance du transfert de chaleur, r est la puissance de la source volumique de chaleur et  $\vec{q}$  la puissance volumique de chaleur reçue à travers la surface  $\partial\Omega$

$\frac{dX}{dt}$  représente la variation temporelle de la variable X qui peut aussi être notée  $\dot{X}$

$\delta$  représente la dépendance au trajet suivi ( $\neq$  fonction d'état), par exemple on peut montrer que les dérivées partielles successives par rapport à des variables d'état (contrainte, température...) dépendent de l'ordre dans lequel la dérivation a lieu.

Généralement, les fonctions d'état intensives seront affectées à des minuscules et les fonctions d'état extensives aux majuscules.

Le théorème de Green-Ostrogradski, ou théorème de la divergence permet d'écrire l'intégrale d'un flux sur une surface fermée comme étant l'équivalent de la divergence de ce flux dans un volume :

$$\int_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} d(\partial\Omega) = \int_{\Omega} div \vec{q} d\Omega \quad (2.21)$$

L'équation est effective sur le domaine  $\Omega$  et en admettant la continuité de l'intégrale, le reste, quel que soit le point étudié du domaine. De plus, en utilisant le théorème du transport de Reynolds (en considérant  $\rho$  constante, la dérivée convective étant nulle) on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho e d\Omega \right) = \int_{\Omega} \rho \frac{de}{dt} d\Omega \quad (2.22)$$

Ce qui permet finalement d'aboutir au premier principe sous forme locale :

$$\boxed{\rho \frac{de}{dt} = \sigma : D + \dot{r} - \text{div} \vec{q}} \quad (2.23)$$

## Deuxième principe

On écrit maintenant le bilan d'entropie par unité de temps (deuxième principe), en utilisant les deux théorèmes précédents :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho s d\Omega \right) = \int_{\Omega} \rho \frac{ds}{dt} d\Omega \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \frac{r}{T} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} d(\partial\Omega) \right) + \dot{S}_{irr} \quad (2.24)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho s d\Omega \right)$$

Variation d'entropie dans le volume  $\Omega$ ,  
s entropie massique

$$\frac{dS_{cha}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \frac{r}{T} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} d(\partial\Omega) \right)$$

Variation d'entropie associée à la chaleur,  
forme d'énergie "dégradée"

$$\frac{dS_{int}}{dt} = \dot{S}_{irr} \geq 0$$

Variation d'entropie interne, terme de création d'entropie caractéristique de l'irréversibilité d'un phénomène

T

Température absolue

Le terme de création d'entropie est difficile à estimer, par conséquent, on utilise l'inégalité de Clausius-Duhem (idéale pour caractériser les processus de dissipation d'un matériau) et les théorèmes de Green-Ostrogradski et de transport de Reynolds pour obtenir l'expression locale du deuxième principe :

$$\boxed{\rho \dot{s} + \frac{\text{div} \vec{q}}{T} - \vec{q} \cdot \frac{\overrightarrow{\text{grad}}(T)}{T^2} - \frac{\dot{r}}{T} \geq 0} \quad (2.25)$$

Les équations précédentes sont des équations générales prenant en compte un matériau produisant de la chaleur grâce à un terme source de chaleur volumique (interne ou externe). Cependant, ce terme source peut ne pas toujours être présent et généralement dans le cadre de l'étude du transfert thermique, ce terme est négligé. De plus, le fait de postuler l'état local permet la description des fonctions d'état telles que l'énergie et l'entropie par des variables d'état observables comme la température et des variables dites internes, liées à des phénomènes physiques plus complexes comme le serait un changement de phase ou l'écroutissage au sens général.

### Utilisation de l'énergie libre de Helmholtz

On introduit l'énergie libre massique de Helmholtz  $\psi$ , potentiel thermodynamique défini comme la transformée de Legendre de l'énergie interne massique :

$$\psi = e - Ts \quad \text{et} \quad \dot{\psi} = \dot{e} - T\dot{s} - s\dot{T} \quad (2.26)$$

Puis en remplaçant l'énergie et l'entropie par leurs expressions :

$$\underbrace{\frac{-\rho}{T} (\dot{\psi} + s\dot{T}) + \frac{\sigma : D}{T}}_{\text{Partie mécanique}} + \underbrace{\left( -\frac{\dot{q}}{T^2} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \right)}_{\text{Partie thermique}} \geq 0 \quad (2.27)$$

On observe ainsi dans l'équation 2.27 deux composantes sources de création d'entropie. Une part de création liée à la mécanique et une part de création liée à la thermique. On peut continuer à simplifier l'équation précédente en utilisant l'hypothèse des petites perturbations (HPP), ce qui nous permet de linéariser le tenseur vitesse de déformation :

$$D = \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_p + \dot{\epsilon}_e \quad (2.28)$$

$\dot{\epsilon}_p$  Tenseur des vitesses de déformation plastique

$\dot{\epsilon}_e$  Tenseur des vitesses de déformation élastique

On utilise maintenant le théorème de dérivation des fonctions composées pour l'énergie libre massique de Helmholtz à partir de nouvelles variables en considérant une loi de comportement de l'énergie libre de Helmholtz dépendante de la déformation élastique, de la température et de variables internes :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{d\epsilon_e} \cdot \frac{d\epsilon_e}{dt} + \frac{d\psi}{dT} \cdot \frac{dT}{dt} + \frac{d\psi}{dV_k} \cdot \frac{dV_k}{dt} \quad (2.29)$$

En effet, l'énergie libre de Helmholtz représente une énergie, l'énergie "libre de toute entropie", dont la variation est liée à la fois à la variation de température, la vitesse de déformation élastique<sup>11</sup> et une variation de variables interne au matériau ( $V_k$ ), témoins des phénomènes sous-jacents aux phénomènes mécaniques connus<sup>12</sup>.

On injecte donc l'équation précédente dans l'équation 2.27 pour obtenir :

$$\left[ \frac{\left( \sigma - \rho \frac{d\psi}{d\epsilon_e} \right) : \dot{\epsilon}_e}{T} \right] + \left[ \frac{\sigma : \dot{\epsilon}_p}{T} \right] + \left[ \frac{-\rho\dot{T}}{T} \left( s + \frac{d\psi}{dT} \right) \right] + \left[ \frac{-\rho}{T} \left( \frac{d\psi}{dV_k} \dot{V}_k \right) \right] + \left( -\frac{\dot{q}}{T^2} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \right) \geq 0 \quad (2.30)$$

En utilisant le fait que les transformations réversibles sont des transformations à générations d'entropie nulles, on peut donner une équation particulière pour la production d'entropie. Ainsi, dans le cadre des hypothèses précédentes, les transformations thermodynamiques réversibles sont :

11. En réalité, on utilise  $\dot{\epsilon}_e = D - \dot{\epsilon}_p$  où l'on retire la partie considérée comme entropique (plastique) de la déformation totale.

12. L'inégalité de Clausius et l'énergie libre de Helmholtz ont été complétées par les variables internes introduites par Coleman et Gurtin [1967], Lemaitre et Chaboche [1990], Rice [1971] afin de pouvoir modéliser correctement différents phénomènes de mécanique des solides, par exemple l'écrasement ou l'énergie bloquée [Chaboche, 1986, Germain et al., 1983, Lemaitre et al., 2009, LExcellent, 1984, Maziere et Forest, 2015, Rosakis et al., 2000].

- Une transformation élastique, isotherme et sans changement de variable interne impliquant :

$$\left[ \frac{\left( \sigma - \rho \frac{d\psi}{d\varepsilon_e} \right) : \dot{\varepsilon}_e}{T} \right] = 0 \Rightarrow \sigma = \rho \frac{d\psi}{d\varepsilon_e} \quad (2.31)$$

- Une transformation thermoélastique réversible, à température homogène et sans modifications de variables internes :

$$\left[ \frac{-\rho \dot{T}}{T} \left( s + \frac{d\psi}{dT} \right) \right] = 0 \Rightarrow s = -\frac{d\psi}{dT} \quad (2.32)$$

Sachant que le phénomène de fatigue des matériaux est irréversible, ces deux équations nous permettent simplement de réécrire l'équation **2.30** sous forme strictement génératrice d'entropie :

$$\left[ \frac{\sigma : \dot{\varepsilon}_p}{T} \right] + \left[ \frac{-\rho}{T} \left( \frac{d\psi}{dV_k} \dot{V}_k \right) \right] + \left( -\frac{\dot{q}}{T^2} \cdot \overrightarrow{grad}(T) \right) > 0 \quad (2.33)$$

Suivant le formalisme de la thermodynamique des processus irréversibles [Bejan, 2016, Kondepudi et Prigogine, 2014, Onsager, 1931a,b], l'équation précédente peut être vue comme la somme des produits des forces thermodynamiques (X) avec les flux thermodynamiques (J) et permettant ainsi de définir une force thermodynamique adjointe aux variables internes :

$$\sum_k X_k \cdot J_k > 0 \quad A_k = \rho \frac{d\psi}{dV_k} \quad (2.34)$$

On peut ainsi mettre en valeur les forces et flux thermodynamiques :

$$\left( \frac{\sigma}{T} \right) : \dot{\varepsilon}_p + \left( \frac{A_k}{T} \right) (-\dot{V}_k) + \left( \frac{\overrightarrow{grad}(T)}{T^2} \right) \cdot (-\dot{q}) > 0 \quad (2.35)$$

$$X = \left\{ \left( \frac{\sigma}{T} \right), \left( \frac{A_k}{T} \right), \left( \frac{\overrightarrow{grad}(T)}{T^2} \right) \right\} \quad \text{Forces thermodynamiques} \quad (2.36)$$

$$J = \left\{ (\dot{\varepsilon}_p), (-\dot{V}_k), (-\dot{q}) \right\} \quad \text{Flux thermodynamiques} \quad (2.37)$$

### Production d'entropie et fracture fatigue entropy (FFE)

Finalemment, on peut écrire ce que l'on appelle, l'équation fondamentale de la production d'entropie ( $\dot{\gamma}$ ) du phénomène de fatigue des matériaux <sup>13</sup> :

$$\dot{\gamma} = \frac{\sigma : \dot{\varepsilon}_p}{T} - \frac{A_k \dot{V}_k}{T} - \frac{\dot{q}}{T^2} \cdot \overrightarrow{grad}(T) > 0 \quad (2.38)$$

**13.** On peut d'ailleurs séparer la production d'entropie en deux parties :

- \* Une "création d'entropie intrinsèque"  $s_1 = \frac{\sigma : \dot{\varepsilon}_p}{T} - \frac{A_k \dot{V}_k}{T}$
- \* Une "création d'entropie thermique"  $s_2 = \frac{\dot{q}}{T^2} \cdot \overrightarrow{grad}(T)$

Comparables aux dissipations intrinsèques et thermiques [Berthel, 2007, Blanche, 2012].

$$\frac{\sigma : \dot{\epsilon}_p}{T}$$

Création d'entropie associée à la puissance mécanique dissipée en déformation plastique

$$\frac{A_k \dot{V}_k}{T}$$

Création d'entropie associée à la puissance mécanique irrécupérable caractérisant les phénomènes microscopiques ayant lieu dans le matériau se traduisant par de l'énergie stockée dans le matériau, la dynamique de dislocation ou encore d'autres phénomènes mécaniques

$$\frac{\dot{q}}{T^2} \cdot \overrightarrow{grad}(T)$$

Terme lié à l'irréversibilité du flux de chaleur par conduction

En revenant sur l'entropie, le concept de Fracture Fatigue Entropy (FFE) correspond au niveau d'entropie auquel un matériau soumis à un essai de fatigue se fracture. Ce qui se traduit par l'intégrale de la production d'entropie sur la durée de vie du matériau :

$$FFE = \int_0^{t_f} \dot{\gamma} dt = \int_0^{t_f} \left( \frac{\sigma : \dot{\epsilon}_p}{T} - \frac{A_k \dot{V}_k}{T} - \frac{\dot{q}}{T^2} \cdot \overrightarrow{grad}(T) \right) dt \quad (2.39)$$

**Avec :**  $t_f$  Temps à la rupture [s]

### 2.3.2 Entropie de rupture pour la fatigue oligocyclique : Modèles empiriques

#### Modèle basé sur **Park et Nelson [2000]**

On cherche à estimer la FFE d'un matériau à partir d'un minimum de paramètres matériau. Sachant que l'on se place dans le cas de la fatigue oligocyclique (LCF), les deux derniers termes de l'équation 2.39 sont négligeables devant la puissance de déformation plastique [Clarebrough et al., 1957, Khonsari et Amiri, 2012, Lemaitre et Chaboche, 1990]. On considèrera donc :

$$FFE_{LCF} = \int_0^{t_f} \frac{\sigma : \dot{\epsilon}_p}{T} dt \quad (2.40)$$

On pourra d'ailleurs vérifier expérimentalement que :

$$FFE_{th} = \int_0^{t_f} \left( -\frac{\dot{q}}{T^2} \cdot \overrightarrow{grad}(T) \right) dt \ll FFE_{LCF} \quad (2.41)$$

Il est par conséquent nécessaire d'estimer correctement la puissance de déformation plastique. Pour ce faire, on utilisera simplement la loi de Park et Nelson (équation 2.7) en ne considérant que la partie plastique, c'est-à-dire en négligeant la partie élastique du modèle. L'entropie de rupture devient ainsi :

$$FFE_{PN} = \int_0^{t_f} \frac{\sigma : \dot{\epsilon}_p}{T} dt \quad (2.42)$$

$$\sigma : \dot{\epsilon}_p = AN_f^\alpha \cdot f \Rightarrow FFE_{PN} = \int_0^{t_f} \frac{AN_f^\alpha \cdot f}{T} dt \quad (2.43)$$

**Avec :**  $f = N/t$  Fréquence de sollicitation

**Avec :**  $N_f$  Nombre de cycles à rupture

**Modèle basé sur Stephens et al. [2001]**

D'autres modèles peuvent être utilisés, en effet, puisque la FFE est fonction uniquement de la déformation plastique, une loi de type Hollomon ou Ramberg-Osgood peut être utilisée. En utilisant l'équation 2.4 et en négligeant la partie élastique, on peut estimer un travail de déformation plastique cyclique, puis en intégrant sur l'ensemble du nombre de cycles (en considérant un nombre de cycles assez grand pour passer d'une sommation à une intégrale), obtenir l'entropie de rupture :

$$FFE_{RO} = \int_0^{N_f} \frac{\Delta\sigma \Delta\varepsilon_p}{T} dN \quad (2.44)$$

**Avec :** N Nombre de cycles

**Avec :**  $N_f$  Nombre de cycles à rupture

**Avec :**  $\Delta\sigma$  Différence entre contrainte maximale et minimale [Pa]

**Avec :**  $\Delta\varepsilon_p$  Différence entre déformation maximale et minimale

**Propriétés en fatigue**

Les propriétés en fatigue des modèles précédents seront estimées par l'équation 2.15, l'équation 2.16, l'équation 2.18 et l'équation 2.19 suivant les matériaux étudiés. Des données expérimentales supplémentaires de propriétés en fatigue obtenues par Stephens et al. [2001] pourront être utilisées pour l'Al-2024.

**2.3.3 Entropie de rupture pour la fatigue oligocyclique : Relations permettant l'estimation de l'entropie de rupture****Retour sur le premier principe et position du problème**

On cherche à estimer la FFE d'un matériau de manière uniquement expérimentale à partir d'un relevé de température de l'échantillon dans le temps, que l'on comparera à la FFE calculée en utilisant des modèles mécaniques du travail de déformation (modèle de Park et Nelson et modèle du type Ramberg-Osgood cyclique). En rappelant que l'on se place dans le cas de la fatigue oligocyclique (LCF), les deux derniers termes de l'équation 2.39 sont négligeables devant la puissance de déformation plastique [Clarebrough et al., 1957, Khonsari et Amiri, 2012, Lemaitre et Chaboche, 1990], on considèrera donc :

$$FFE_{LCF} = \int_0^{t_f} \frac{\sigma : \dot{\varepsilon}_p}{T} dt \quad (2.45)$$

En reprenant l'équation 2.23 et l'énergie libre de Helmholtz, on peut écrire :

$$\rho \frac{d(\psi + Ts)}{dt} = \sigma : D - div \vec{q} \quad (2.46)$$

Puis en utilisant l'équation 2.31, l'équation 2.32 et en sachant :

$$\dot{s} = \frac{-d^2\psi}{dT dt} \quad \dot{s} = \frac{-1}{\rho} \frac{d\sigma}{dT} : \dot{\varepsilon}_e + \frac{ds}{dT} \dot{T} - \frac{1}{\rho} \frac{dA_k}{dT} \dot{V}_k \quad C = T \frac{ds}{dT} = -T \frac{d^2\psi}{dT^2} \quad (2.47)$$

On obtient un premier principe se réécrivant<sup>14</sup> (qui est aussi dérivé dans Liakat et Khonsari [2015a]) :

$$\rho C\dot{T} = \rho \dot{u} = \sigma : \dot{\epsilon}_p - \text{div} \vec{q} - A_k \dot{V}_k + T \left( \frac{d\sigma}{dT} : \dot{\epsilon}_e + \frac{dA_k}{dT} \dot{V}_k \right) \quad (2.48)$$

Ce qui implique en utilisant les hypothèses de fatigue oligocyclique (c'est-à-dire négliger les termes thermocouplés et le terme de variables internes) que FFE<sub>LCF</sub> devienne :

$$\text{FFE}_{\text{LCF}} = \int_0^{t_f} \left( \frac{\rho C\dot{T} + \text{div} \vec{q}}{T} \right) dt \quad (2.49)$$

### Prise en compte des autres modes de transferts thermiques

La littérature modélisant la FFE utilise généralement la conduction de chaleur seule. Cependant, d'autres modes de transferts thermiques peuvent être pris en compte. La convection thermique est un second mode de transfert de chaleur. Il nécessite la connaissance d'un coefficient de transfert convectif ( $h$ ) afin d'évaluer la puissance dissipée par convection lors du test. Pour déterminer celui-ci, on utilise habituellement le nombre de Nusselt ( $Nu$ ) :

$$Nu = \frac{hL_c}{\lambda_F} \sim \frac{R_{cond}}{R_{conv}} \sim \frac{\Phi_{conv}}{\Phi_{cond}} \quad (2.50)$$

$h$  : Coefficient d'échange convectif [ $Wm^{-2}K^{-1}$ ]

$L_c$  : Longueur caractéristique [ $m$ ]

$\lambda_F$  : conductivité thermique du fluide [ $Wm^{-1}K^{-1}$ ]

Ce nombre adimensionnel permet de comparer les résistances thermiques de conduction et de convection dans le fluide (ou encore, de comparer le flux de chaleur de convection et de conduction à travers le fluide). Celui-ci est relié à des corrélations dépendantes du régime d'écoulement ou encore de la géométrie par l'intermédiaire d'autres nombres adimensionnels (par exemple dans un parallélépipède soumis à de la convection naturelle [Baïri et al., 2011]). En convection forcée, on utilisera le nombre de Reynolds et le nombre de Prandtl. Dans notre cas, nous sommes en présence de convection naturelle impliquant l'utilisation du nombre de Rayleigh ( $Ra$ ) pour établir le régime de l'écoulement, laminaire ou turbulent. Le nombre de Rayleigh représente simplement le produit du nombre de Grashof ( $Gr$ ) (comparaison des forces d'Archimède et des forces visqueuses) par le nombre de Prandtl ( $Pr$ ) (comparaison des couches limites thermique et hydrodynamique) :

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{\rho_F^2 g \beta_c (T_p - T_0) L^3}{\mu_F^2} \cdot \frac{\mu_F C p_F}{\lambda_F} = \frac{g \beta_c (T_p - T_0) L^3}{\nu_{FT} \nu_{Fh}} \quad (2.51)$$

$\rho_F$  : masse volumique du fluide soumis à la convection [ $kgm^{-3}$ ]

$g$  : accélération de la pesanteur [ $ms^{-2}$ ]

$\beta_c$  : coefficient de compressibilité isochore (inverse de la température absolue pour un gaz parfait) [ $K^{-1}$ ]

<sup>14</sup>. En utilisant les deux versions de la conservation de l'énergie (équation 2.23 et équation 2.48), un lien entre énergie élastique et variables internes apparaît montrant la transformation possible d'énergie de déformation élastique en variables internes et variables thermocouplées :

$$\sigma : \dot{\epsilon}_e = -A_k \dot{V}_k + T \left( \frac{d\sigma}{dT} : \dot{\epsilon}_e + \frac{dA_k}{dT} \dot{V}_k \right)$$

$T_p - T_0$  : différence de température entre le matériau et le fluide externe [K]

$T_0$  : température du fluide, équivalente à la température de l'environnement (mesurée par thermocouple)

$\nu_{FT}$  ;  $\nu_{Fh}$  : diffusivité thermique et diffusivité de quantité de mouvement (viscosité cinématique) du fluide [ $m^2 s^{-1}$ ]

$L$  : longueur de l'éprouvette [ $m$ ]

$\mu_F$  : viscosité dynamique du fluide [ $kg m^{-1} s^{-1}$ ]

$Cp_F$  : capacité calorifique du fluide [ $J kg^{-1} K^{-1}$ ]

Les propriétés du fluide sont estimées à la température du film, c'est-à-dire à la température moyenne entre la paroi et l'extérieur  $T_{film} = (T_p + T_0)/2$ . Celles-ci seront ainsi déterminées dans notre cas à partir des corrélations (liant les différentes propriétés à la température) données par Dixon [2007] pour de l'air. Pour ce qui est du transfert convectif et la détermination de coefficient d'échange convectif, on utilise les corrélations relatives à l'étude de la convection naturelle pour plaque plane verticale dans Meneghetti [2007] (qui peuvent aussi apparaître pour l'estimation des pertes thermiques au niveau des parois d'une chambre de combustion Pishbin et al. [2015]) :

$$Nu = \left( 0.825 + \frac{0.387 Ra^{1/6}}{\left[ 1 + \left( \frac{0.492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} \right)^2 \quad (2.52)$$

$$Nu = A (Gr \cdot Pr)^{1/4} \quad A^4 = \frac{Pr}{2.43478 + 4.884 Pr^{1/2} + 4.95283 Pr} \quad (2.53)$$

On reconnaît d'ailleurs une corrélation pour une paroi verticale à température imposée pour un régime laminaire ( $Gr < 10^9$ ) :

$$Nu = 0.667 \left( \frac{Pr}{0.952 + Pr} \right)^{1/4} Ra^{1/4} \quad (2.54)$$

On peut aussi utiliser les corrélations données par Etyglunt [1997] :

$$Nu = 0.59 Ra^{1/4} \quad 10^4 < Ra < 10^9 \quad Nu = 0.13 Ra^{1/3} \quad 10^9 < Ra < 10^{13} \quad (2.55)$$

Il est utile de préciser qu'il existe des corrélations en convection naturelle pour des plaques planes verticales dentelées pouvant prendre en compte des rugosités de surface ou certaines irrégularités de la géométrie verticale. Néanmoins, le coefficient d'échange reste assez proche des données pour plaques lisses [Ashjaee et al., 2007].

Les corrélations détaillées précédemment permettent d'obtenir un coefficient d'échange moyen (car  $T_p$  est prise comme la température moyenne spatiale). Et ainsi, d'accéder à la densité de puissance volumique moyenne (d'où la factorisation par le volume de l'éprouvette  $V_{ép}$ ) échangée sous forme de transfert convectif à partir de l'équation de Newton et en considérant :

$$P_{conv} = h_m \frac{S_{conv}}{V_{ép}} (\bar{T} - T_0) \quad E_{conv} = \int_t P_{conv}(t) dt = P_{conv} t_f \quad (2.56)$$

$h_m$  : Coefficient de convection moyen (spatio-temporel) [ $W m^{-2} K^{-1}$ ]

$S_{conv}$  : Surface convectée [ $m^2$ ]

$V_{ép}$  : Volume de l'éprouvette [ $m^3$ ]

$P_{conv}, E_{conv}$  : Puissance moyenne et énergie dissipée par convection [W], [J]

$\bar{T}$  : Température moyenne spatio-temporelle [K]

$T_0$  : Température de l'environnement [K]

$t_f$  : Temps à la rupture [s]

Le dernier mode de transfert implique la densité de puissance moyenne rayonnée, estimée à partir de la loi de Stefan-Boltzmann, en considérant :

$$P_{ray} = \varepsilon \sigma_{SB} \frac{S_{ray}}{V_{ép}} (\bar{T}^4 - T_0^4) \quad E_{ray} = \int_t P_{ray}(t) dt = P_{ray} t_f \quad (2.57)$$

$\varepsilon$  : Emissivité hémisphérique intégrée sur 7.5-13  $\mu\text{m}$  (prise égale à 0.95)

$\sigma_{SB} = 5,67 \cdot 10^{-8}$  : Constante de Stefan-Boltzmann [ $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ ]

$S_{ray}$  : Surface rayonnante [ $\text{m}^2$ ]

$V_{ép}$  : Volume de l'éprouvette [ $\text{m}^3$ ]

$P_{ray}, E_{ray}$  : Puissance moyenne et énergie dissipée par rayonnement [W], [J]

Finalement on obtient une expression pour l'entropie de rupture prenant en compte tous les modes de transferts thermiques :

$$\text{FFE}_{tot} = \int_0^{t_f} \left( \frac{\rho C \dot{T} + \text{div } \vec{q} + P_{conv} + P_{ray}}{T} \right) dt \quad (2.58)$$

### Relation classique pour l'estimation de l'entropie de rupture

Une autre relation connue de la littérature peut être utilisée [Boulanger et al., 2004, Chrysochoos et Louche, 2000, Guo et al., 2015]. elle est basée sur une régression exponentielle afin d'obtenir la puissance de déformation plastique. Cet ajustement ayant la possibilité de prendre en compte tous les modes de transferts. En effet, une estimation de ce que l'on appelle la dissipation intrinsèque est possible à partir de l'équation de la chaleur, et de l'intégration de la température ( $\theta_T$ ) suivant l'épaisseur et la largeur de l'éprouvette (en considérant un régime stationnaire et en utilisant des conditions aux limites de deuxième espèce liée à la convection). L'équation obtenue est proche de l'équation de la chaleur pour une ailette où un terme linéaire en température apparaît. On a ainsi :

$$\rho C \frac{\theta_T}{\tau} - k \frac{\partial^2 \theta_T}{\partial x^2} = \sigma : \dot{\varepsilon}_p - A_k \dot{V}_k = d_1 \quad (2.59)$$

Où  $\theta_T$  apparaît comme la différence de température entre le matériau et l'environnement (obtenue en surface d'échantillon),  $\tau$  représente une constante de temps caractéristique des échanges aux limites du matériau par convection et rayonnement, et  $d_1$ , ce que l'on appelle la dissipation intrinsèque. Puisque la solution de cette ODE est du type :

$$\theta_T = P_1 e^{x \sqrt{\frac{\rho C}{k \tau}}} + P_2 e^{-x \sqrt{\frac{\rho C}{k \tau}}} + \frac{\tau d_1}{\rho C} \quad (2.60)$$

Une régression exponentielle du profil de température permet de remonter à la dissipation intrinsèque, sachant que la constante de temps s'exprime en fonction de l'épaisseur  $e_p$ , de la largeur  $l$  de l'éprouvette et d'un coefficient d'échange global prenant en compte convection et rayonnement :

$$\tau = \frac{\rho C e_p l}{2 h_G (e_p + l)} \quad h_G = h_m + h_{ray} \quad (2.61)$$

Le coefficient équivalent d'échange par rayonnement étant obtenu par linéarisation en utilisant un développement de Taylor de la température autour de la température de l'environnement :

$$T^4 = T_0^4 + 4T_0^3(T - T_0) \quad h_{ray} = 4\epsilon\sigma T_0^3 \quad (2.62)$$

Pour finir, on pourra estimer une  $FFE_{expo}$  à partir de la dissipation intrinsèque :

$$FFE_{expo} = \int_0^{t_f} \frac{d_1}{T} dt \quad (2.63)$$

## 2.4 Procédure expérimentale en fatigue oligocyclique

### 2.4.1 La thermographie en fatigue

La thermographie est une méthode permettant d'obtenir la température de surface d'un élément observé. Les échantillons étudiés consistent généralement en des corps thermiquement minces, c'est-à-dire, des corps dont les gradients de température dans l'épaisseur sont négligeables. Cette méthode a été utilisée en mécanique et a permis l'étude de l'énergie bloquée durant la déformation d'un échantillon, l'étude de la localisation des sources de chaleur lors de la sollicitation d'un matériau ou encore l'étude de la dissipation intrinsèque [Blanche et al., 2015, Chrysochoos et Peyroux, 1998, Chrysochoos et al., 1989] (voir figure 2.25 et figure 2.26). Elle permet aussi l'étude de l'effet de la température sur la propagation de fissure en fatigue ou sur la durée de vie du matériau [Amiri et Khonsari, 2010b,c, Bathias, 2014, Ranc et al., 2008]. Dans notre cas, le relevé en température permettra l'estimation de la génération d'entropie accumulée dans le matériau durant le test de fatigue.

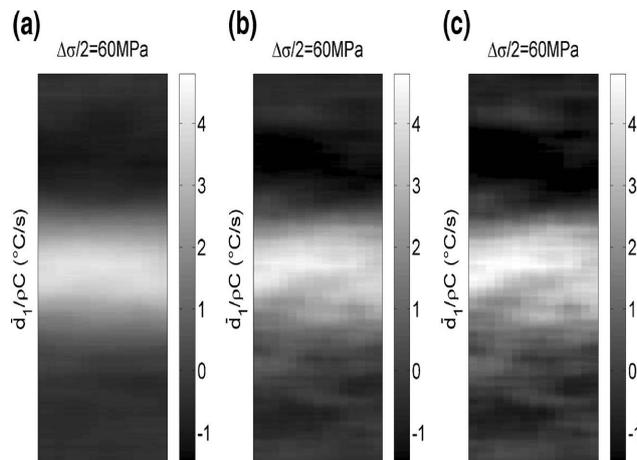


FIGURE 2.25 – Distribution de la dissipation intrinsèque à  $0,3 \cdot 10^5$ ;  $0,6 \cdot 10^5$  et  $10^6$  cycles de sollicitation [Blanche et al., 2015]

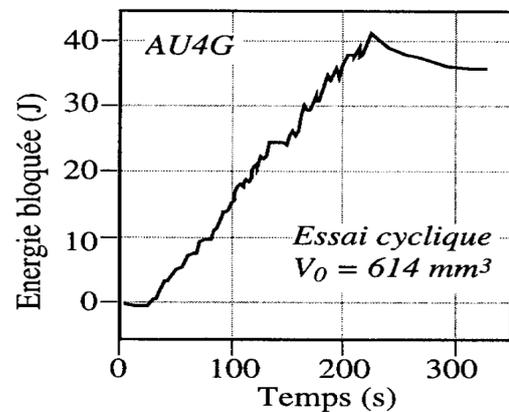


FIGURE 2.26 – Évolution de l'énergie bloquée au cours du temps durant un test cyclique [Chrysochoos et al., 1989]

### Détails sur le rayonnement - Le corps noir

Le rayonnement thermique est un mode de transfert thermique ne nécessitant aucun milieu matériel. Par définition, on dit d'un corps qu'il rayonne thermiquement lorsqu'il possède une température supérieure au zéro absolu (0K). Le rayonnement est à l'interface de la théorie ondulatoire regroupant les équations de Maxwell et la théorie corpusculaire basée sur les quantas d'énergies et l'existence des photons. On différencie différents domaines de rayonnement par l'intermédiaire de la longueur d'onde en ce que l'on appelle le spectre électromagnétique du rayonnement, présenté en figure 2.27.

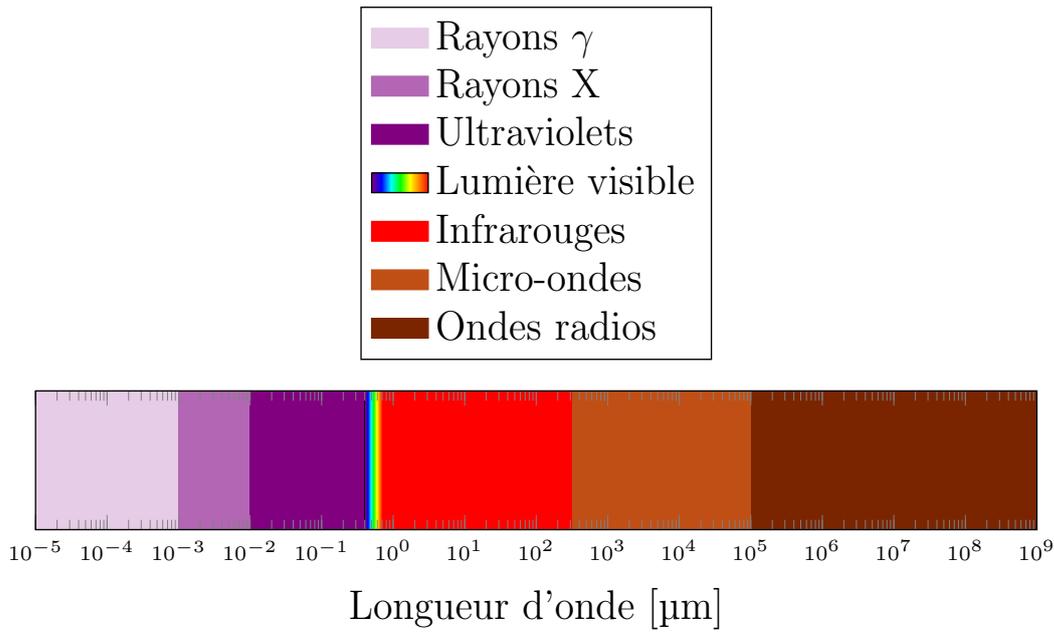


FIGURE 2.27 – Spectre électromagnétique

Pour étudier les propriétés radiatives d'un corps, on utilise généralement un corps idéal appelé "corps noir". Ce corps, lorsqu'il est à l'équilibre thermodynamique absorbe tout le rayonnement incident et le réémet indépendamment de l'angle d'incidence et de la longueur d'onde. La puissance émise par un corps noir est ainsi uniquement dépendante de la température du corps. La luminance monochromatique  $L_{\lambda}^0$  du corps noir est obtenue par l'utilisation de la statistique de Bose-Einstein et est appelée "loi de Planck" :

$$L_{\lambda}^0 = \frac{2h_p c_l^2 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{hc_l}{\lambda k_b T}\right) - 1} \quad [Wm^{-2}sr^{-1}m^{-1}] \quad (2.64)$$

Avec :

$h_p = 6.62 \cdot 10^{-34}$  : Constante de Planck [Js]

$k_b = 1.38 \cdot 10^{-23}$  : Constante de Boltzmann [JK<sup>-1</sup>]

$c_l = 2.9979 \cdot 10^8$  : Célérité de la lumière [ $ms^{-1}$ ]

$\lambda$  : Longueur d'onde [m]

T : Température absolue [K]

Des approximations sont généralement possibles suivant les cas étudiés :

— Approximation de Wien pour  $\lambda \ll \frac{hc_l}{k_b T}$  (menant à la loi de déplacement de Wien)

— Approximation de Rayleigh-Jeans pour  $\lambda \gg \frac{hc_l}{k_b T}$

Pour des corps réels, on définit plutôt la luminance  $L_T$  à partir de la puissance émise  $d\Phi$  par unité d'angle solide  $d\Omega$  et par unité de surface apparente  $dS \cos(\theta)$  pour une source radiative émettant suivant une direction précise (voir figure 2.28).

$$L_T = \frac{d^2\Phi}{d\Omega dS \cos(\theta)} \quad [Wm^{-2}sr^{-1}] \quad (2.65)$$

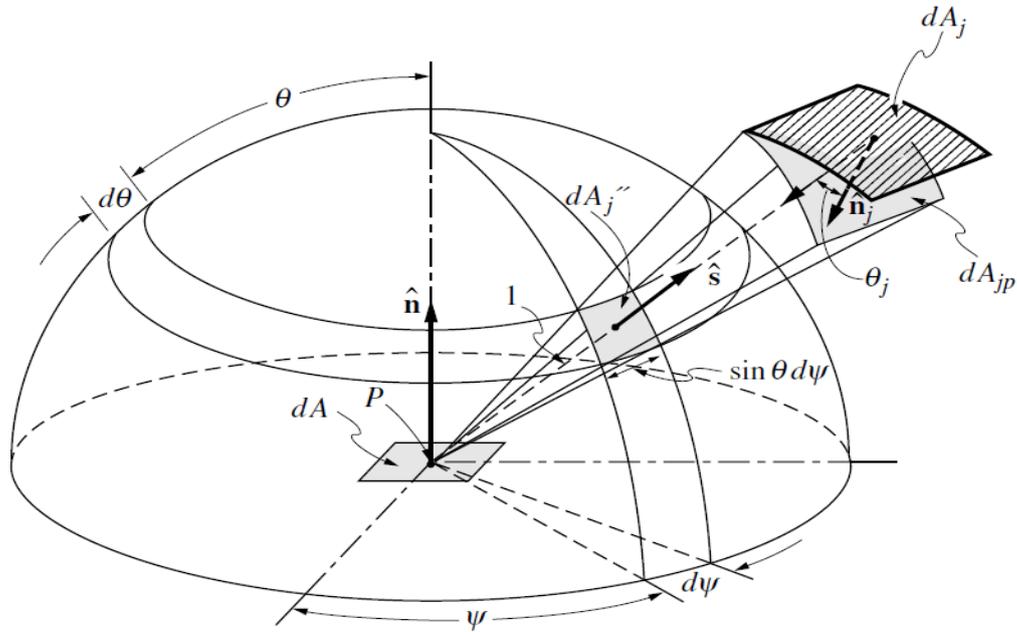


FIGURE 2.28 – Direction d'émission et angle solide d'une surface  $dA$  émettant un rayonnement (figure tirée de **Modest** [2013])

La luminance monochromatique étant :

$$L_\lambda = \frac{dL}{d\lambda} \quad [Wm^{-2}sr^{-1}m^{-1}] \quad (2.66)$$

Lorsque l'on intègre la luminance sur un demi-espace, on obtient ce que l'on appelle l'émittance  $M$  représentant le flux émis par unité de surface. Lorsque l'angle d'incidence n'influence pas la luminance, il est possible d'utiliser la loi de Lambert liant la luminance et l'émittance :

$$M_\lambda = \pi L_\lambda \quad (2.67)$$

Dans le cas précis d'un corps noir, l'émittance intégrée sur tout le spectre de longueur d'onde donne ce que l'on appelle la loi de Stefan-Boltzmann :

$$M^0 = \sigma_{SB} T^4 \quad (2.68)$$

Avec  $\sigma_{SB} = 5,67 \cdot 10^{-8}$  la constante de Stefan-Boltzmann [ $Wm^{-2}K^{-4}$ ]

Lorsque l'on étudie une gamme de longueur d'onde particulière  $[\lambda_1, \lambda_2]$ , l'intégration de la luminance sur une gamme de longueur d'onde est possible en considérant des fractions de puissance émises tel que **[Modest, 2013]** :

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L_\lambda d\lambda = [f(\lambda_2 T) - f(\lambda_1 T)] \sigma_{SB} T^4 \quad (2.69)$$

Avec :

$$f(\lambda T) = \frac{15}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\xi}}{m^4} (6 + 6(m\xi) + 3(m\xi)^2 + (m\xi)^3) \quad \xi = \frac{h_p c}{k_b \lambda T} \quad (2.70)$$

### Détails sur le rayonnement - Le corps réel

La comparaison entre corps noir idéal et corps réel est mise en avant par ce que l'on appelle l'émissivité ( $\epsilon$ ). Elle est ainsi définie comme le rapport de luminance du corps étudié

sur la luminance du corps noir dans les mêmes conditions :

$$\epsilon_\lambda(\lambda, T, \theta) = \frac{L_\lambda(\lambda, T, \theta)}{L_\lambda^0(\lambda, T)} \quad (2.71)$$

Ce facteur est compris entre 0 et 1 et dépend de la longueur d'onde, de la température et de l'angle d'émission, mais aussi du matériau et de son état de surface. Celui-ci est de plus lié aux grandeurs optiques telles que le coefficient d'absorption et le coefficient de transmission.

On peut par conséquent à partir de ce facteur évaluer une température que l'on appelle température de luminance  $T_\lambda$  qui est la température du corps en observation s'il était un corps noir. Dans le cas monochromatique :

$$L_\lambda(T) = \epsilon_\lambda L_\lambda^0(T) = L_\lambda^0(T_\lambda) \quad (2.72)$$

En utilisant l'approximation de Wien, on obtient :

$$\epsilon_\lambda(\lambda, T) \exp\left(\frac{hc}{k_b \lambda T_\lambda}\right) = \exp\left(\frac{hc}{k_b \lambda T}\right) \quad (2.73)$$

Ainsi lorsque l'on étudie deux corps à la même température dont l'un d'eux est un corps noir, on peut déterminer l'émissivité du corps étudié :

$$\ln(\epsilon_\lambda) = \frac{hc}{k_b \lambda} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_\lambda} \right) \quad (2.74)$$

À noter que lorsque l'on travaille sur une gamme de longueurs d'onde, il est nécessaire d'intégrer la luminance sur celle-ci, de fait, la relation devient :

$$\int_\lambda L_\lambda(T) = \int_\lambda \epsilon_\lambda L_\lambda^0(T) = \int_\lambda L_\lambda^0(T_\lambda) \quad (2.75)$$

### 2.4.2 Montage expérimental

Les tests de fatigue oligocyclique ont été effectués sur un aluminium Al-2024 et un acier S-235 soumis à un chargement cyclique de type traction-traction ( $R_\sigma = 0$ ) pour différentes fréquences et amplitudes de sollicitation (tableau 2.1). Les sollicitations de type traction-traction sont choisies pour éviter le flambement de nos éprouvettes plates trop élancées. À chaque test, on relève la température spatialement et temporellement à l'aide d'une caméra infrarouge et du logiciel ®FLIR Research en considérant une émissivité totale hémisphérique de 0,95. En effet, pour pouvoir se rapprocher au maximum du comportement d'un corps noir, les éprouvettes sont recouvertes de peinture émissive (peinture noire), ce qui nous permet de faire l'hypothèse d'une émissivité totale hémisphérique égale à 0,95.

Le matériel expérimental à disposition est composé de :

- Une machine de fatigue servo hydraulique INSTRON 8501 permettant une sollicitation des éprouvettes en fatigue oligocyclique uniaxiale pouvant atteindre un chargement de 100 kN, ayant différents modes de sollicitations et une fréquence de sollicitation modulable. Dans notre cas, le chargement se situera autour des 10 kN en traction-traction ( $R_\sigma = 0$ ) avec une fréquence de 5 ou 10 Hz.
- Une caméra infrarouge FLIR A325sc permettant le suivi en température de l'échantillon avec une fréquence d'acquisition pouvant aller jusque 60 Hz. Ce détecteur est un microbolomètre absorbant le rayonnement infrarouge incident (7,5-13  $\mu m$ ) permettant d'obtenir une température fiable sur une plage de  $-20^\circ C$  à  $120^\circ C$ , et validant l'hypothèse d'une émissivité utilisée de 0,95<sup>15</sup> [Baumann, 2014] (pour l'Al-2024).

15. L'émissivité utilisée n'est ici pas vraiment l'émissivité totale hémisphérique. En effet, c'est l'émissivité hémisphérique intégrée dans la gamme [7,5-13  $\mu m$ ] qui reste assez proche de 0,95.

Matériau -	Fréquence Hz	Chargement kN	Emissivité	Dimensions cm
Al-2024	5	10,5 (Test N°1) 11 (Test N°2) 11,5 (Test N°3 - Test N°4)	0,95	5,7x1,2x0,25
	10	10,5 (Test N°5) 11 (Test N°6) 11,5 (Test N°7) 12 (Test N°8)		
S-235	5	12 (Test N°1)	0,95	6x1,2x0,3
		13 (Test N°2)		

TABLEAU 2.1 – Résumé des différentes configurations de tests réalisés

### Détails sur l'étalonnage

L'étalonnage de la caméra thermique est très important dans l'étude thermique par l'intermédiaire du rayonnement. Suivant le type de détecteur et la précision voulue, plusieurs méthodes sont envisageables. On retrouve par exemple dans la littérature un étalonnage pixel à pixel permettant une grande précision de mesure [Berthel, 2007, Pron et Bouache, 2016]. Dans notre cas, nous utiliserons une calibration plus simple, en effet, nous utiliserons une méthode globale consistant à observer les températures données par la caméra pour différentes zones d'un corps noir. Le corps noir étant considéré comme homogène, ceci nous permet d'observer l'imprécision obtenue pour différentes températures. L'observation montre un écart de 0.1°C entre température mesurée et température vraie.

### 2.4.3 Hypothèses et remarques générales

#### Hypothèses

On va adopter une hypothèse concernant la diffusion de la chaleur, elle sera considérée ici comme diffusant majoritairement suivant une seule dimension, la longueur de l'éprouvette (la diffusion suivant les autres dimensions, largeur et épaisseur sont négligeables devant la diffusion suivant la longueur). En effet, les mors de la machine sont considérés comme des puits de chaleur imposant une température fixe aux limites de l'échantillon.

La deuxième hypothèse étant le fait de considérer le travail de déformation plastique intégralement converti en chaleur et de considérer un terme de conduction de chaleur constant au cours du test plus simple pour évaluer l'entropie de rupture expérimentale (observé par Kaleta et al. [1989], Meneghetti et Ricotta [2012] dans le cadre de la fatigue à faible et grand nombre de cycles, voir figure 2.10 et figure 2.29). Cette hypothèse pouvant être étayée par le fait que la phase stabilisée en température lors du test de fatigue est prépondérante devant les phases d'accumulation d'énergie du matériau.

#### Remarques

Il est utile de préciser que comme l'éprouvette change de taille durant le test, l'outil permettant d'obtenir les profils de températures peut n'accéder qu'à une partie de l'échantillon au fil de l'expérience (préalablement configurée par rapport à la taille de l'échantillon initial). Cependant, l'erreur commise en ne prenant les relevés que sur la surface d'origine de l'éprouvette entraîne une erreur d'environ 7% par rapport à des valeurs relevées sur l'ensemble de l'éprouvette au cours du temps.

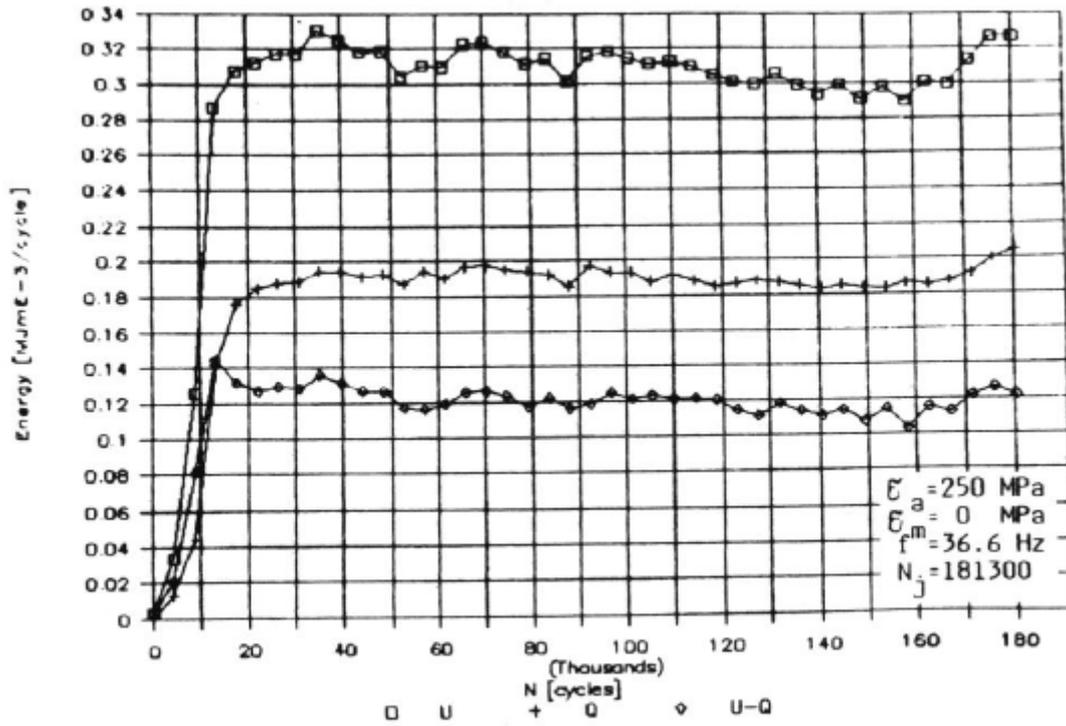


FIGURE 2.29 – Énergies par cycle et par unité de volume [Kaleta et al., 1989]

De plus, puisque l'on travaille en fatigue oligocyclique impliquant une montée en température assez faible comparée à la température de l'environnement et que l'on cherche à obtenir un paramètre global, il est possible de considérer une température moyenne spatio-temporelle constante dans l'estimation de l'entropie de rupture. Ceci a pour effet de sortir la température de l'intégrale, et permet d'intégrer uniquement la puissance de déformation plastique :

$$FFE_{LCF} = \int_0^{t_f} \frac{\sigma : \dot{\epsilon}_p}{T} dt \approx \frac{\int_0^{t_f} \sigma : \dot{\epsilon}_p dt}{\bar{T}} \quad (2.76)$$

Avec  $\bar{T}$  : Température moyenne spatio-temporelle de l'échantillon (en Kelvin)

## 2.5 Résultats et discussion sur l'entropie de rupture

### 2.5.1 Vérification de l'hypothèse 1D

On peut vérifier la pertinence de la réduction de dimension de 3D à 1D pour le transfert thermique par conduction en utilisant au préalable le nombre de Biot représentant le rapport entre la résistance conductive du matériau et la résistance convective du fluide :

$$Bi = \frac{hL_c}{k} \quad L_c = \frac{V_{\epsilon p}}{S_{conv}} \quad (2.77)$$

$h$  : représente le coefficient de transfert convectif [ $Wm^{-2}K^{-1}$ ]

$k$  : coefficient de conduction du matériau [ $Wm^{-1}K^{-1}$ ]

$L_c$  : longueur caractéristique définie comme étant le rapport du volume du matériau étudié sur sa surface (ou section sur périmètre) [ $m$ ]

$V_{\epsilon p}$  : volume de l'échantillon [ $m^3$ ]

$S_{conv}$  : surface d'échange avec l'extérieur [ $m^2$ ]

Lorsque celui-ci est inférieur à l'unité, il indique le fait que la conduction en surface et la conduction dans l'épaisseur du matériau sont identiques. Ceci implique des gradients de température négligeables au sein du matériau, et on dit du matériau qu'il est thermiquement mince. Le nombre de Biot moyen calculé sur l'ensemble des tests est égal à  $Bi = 3,5 \cdot 10^{-5}$  (en utilisant les mesures de température des échantillons et les corrélations en 2.3.3) ce qui permet de négliger le gradient de température dans l'épaisseur, passant ainsi d'une conduction 3D à 2D.

Il est ensuite nécessaire d'avancer nos arguments quant à l'utilisation du gradient suivant une seule direction plutôt que deux, mis à part la vérification expérimentale, il est possible de donner un argument en se basant sur un calcul simple de résistances thermiques. En effet, en comparant les résistances thermiques suivant la longueur, et la largeur de l'échantillon, on écrit :

$$RX_i = \frac{e_p}{kS_{cond}} \quad (2.78)$$

$RX_i$  : Résistance thermique du matériau X suivant i

Avec X = Al (aluminium) ou S (acier) et i = L (longueur) ou l (largeur)

$S_{cond}$  : Représente la section de passage de la chaleur

$e$  : Représente l'épaisseur traversée

En construisant le rapport des résistances suivant la longueur et la largeur, on obtient un critère géométrique de la conduction :

$$r_X = \frac{RX_L}{RX_l} = \left(\frac{L}{l}\right)^2 \Rightarrow \quad r_{Al} = 22.6 \quad r_S = 25 \quad (2.79)$$

À partir de ce petit calcul simple, on peut voir que la résistance thermique latérale est négligeable devant la résistance thermique longitudinale. De plus, puisque les matériaux sont homogènes et isotropes, on peut considérer un flux de chaleur constant (dans l'espace pour un régime stationnaire), et ainsi  $r_X$  peut se traduire par un gradient latéral négligeable devant le gradient de température longitudinal, légitimant le passage d'un modèle de conduction 3D à 1D.

## 2.5.2 Estimations de l'entropie de rupture

Pour pouvoir estimer le coefficient de résistance à la fatigue à partir des équations générales, il est nécessaire de connaître la résistance mécanique (ou résistance à la traction ou encore UTS) du matériau. On réalise alors un essai de traction simple jusqu'à la rupture pour l'Al-2024 et le S-235, ce qui permet de remonter à leurs propriétés en fatigue. De plus, pour pouvoir estimer l'entropie de rupture en fatigue, les propriétés matériaux sont nécessaires. Celles-ci sont résumées dans le tableau 2.2.

Matériau	Densité $kg/m^3$	Conductivité $W/m.K$	Capacité calorifique $J/kg.K$	UTS $MPa$	Module de Young $GPa$
Al-2024	2780	121	875	399	73,1
SS 235	7800	54	450	386	200

TABEAU 2.2 – Propriétés des matériaux utilisés

**Estimations empiriques**

Sachant que l'on considère une variation spatio-temporelle faible de la température, une température moyenne est utilisée (équation 2.76) pour pouvoir estimer l'entropie de rupture. En considérant un travail de déformation plastique constant au cours du test, et en utilisant le modèle de Park et Nelson (équation 2.7 et équation 2.8), on obtient :

$$FFE_{PN} = \int_0^{t_f} \frac{AN_f^\alpha \cdot f}{T} dt \approx \frac{AN_f^{\alpha+1}}{\bar{T}} \quad (2.80)$$

Puis, on différencie plusieurs cas suivant les propriétés en fatigue utilisées (tableau 2.3 ou tableau 2.4) :

— Al-2024 :

1. Propriétés en fatigue à partir de l'équation 2.19 :

$$FFE_{PN} = \frac{AN_f^{\alpha+1}}{\bar{T}} \approx (356 \cdot 10^6) \frac{N_f^{0,23}}{\bar{T}} \quad (2.81)$$

2. Propriétés en fatigue à partir de l'équation 2.16 :

$$FFE_{PN} = \frac{AN_f^{\alpha+1}}{\bar{T}} \approx (410 \cdot 10^6) \frac{N_f^{0,215}}{\bar{T}} \quad (2.82)$$

— S-235 :

1. Propriétés en fatigue à partir de l'équation 2.18 :

$$FFE_{PN} = \frac{AN_f^{\alpha+1}}{\bar{T}} \approx (478 \cdot 10^6) \frac{N_f^{0,32}}{\bar{T}} \quad (2.83)$$

2. Propriétés en fatigue à partir de l'équation 2.15 :

$$FFE_{PN} = \frac{AN_f^{\alpha+1}}{\bar{T}} \approx (636 \cdot 10^6) \frac{N_f^{0,333}}{\bar{T}} \quad (2.84)$$

Matériau	$\epsilon'_f$	$\sigma'_f$ MPa	$b$	$c$
-	-	-	-	-
Al-2024	0,28	758	-0,11	-0,66
SS 235	0,45	579	-0,09	-0,59

TABLEAU 2.3 – Propriétés en fatigue des matériaux (équation 2.18-équation 2.19)

Matériau	$\epsilon'_f$	$\sigma'_f$ MPa	$b$	$c$
-	-	-	-	-
Al-2024	0,35	666	-0,095	-0,69
SS 235	0,59	579	-0,087	-0,58

TABLEAU 2.4 – Propriétés en fatigue des matériaux (équation 2.15-équation 2.16)

En considérant de même un travail plastique constant au cours du test, et en utilisant cette fois-ci un modèle de type plasticité cyclique (équation 2.4 et équation 2.5), on obtient :

$$FFE_{RO} = \int_0^{N_f} \frac{\Delta\sigma \Delta\epsilon_p}{T} dN \approx \frac{2\Delta\sigma^{1+1/n'}}{(2K')^{1/n'} \cdot \bar{T}} \underset{R_\sigma=0}{\Rightarrow} \frac{2\sigma_M^{1+1/n'}}{(2K')^{1/n'} \cdot \bar{T}} \cdot N_f \quad (2.85)$$

$\sigma_M$  : Contrainte maximale (rapport de la force de sollicitation maximale sur la section de l'éprouvette) [Pa]

De manière analogue, on peut différencier plusieurs cas suivant les propriétés en fatigue utilisées (tableau 2.3, tableau 2.4) ou encore les mesures expérimentales rapportées par **Stephens et al. [2001]** :

— Al-2024 :

1. Propriétés en fatigue à partir de l'équation 2.19 :

$$FFE_{RO} = \frac{2\sigma_M^{1+1/0,1667}}{(2 \cdot 937,2 \cdot 10^6)^{1/0,1667} \cdot \bar{T}} \cdot N_f \quad (2.86)$$

2. Propriétés en fatigue à partir de l'équation 2.16 :

$$FFE_{RO} = \frac{2\sigma_M^{1+1/0,1377}}{(2 \cdot 769,6 \cdot 10^6)^{1/0,1377} \cdot \bar{T}} \cdot N_f \quad (2.87)$$

3. Propriétés en fatigue à partir de **Stephens et al. [2001]** pour de l'Al-2024 T3 :

$$FFE_{RO} = \frac{2\sigma_M^{1+1/0,065}}{(2 \cdot 655 \cdot 10^6)^{1/0,065} \cdot \bar{T}} \cdot N_f \quad (2.88)$$

4. Propriétés en fatigue à partir de **Stephens et al. [2001]** pour de l'Al-2024 T3, recalculés en utilisant l'équation 2.5 :

$$FFE_{RO} = \frac{2\sigma_M^{1+1/0,2102}}{(2 \cdot 1512 \cdot 10^6)^{1/0,2102} \cdot \bar{T}} \cdot N_f \quad (2.89)$$

— S-235 :

1. Propriétés en fatigue à partir de l'équation 2.18 :

$$FFE_{RO} = \frac{2\sigma_M^{1+1/0,1525}}{(2 \cdot 654 \cdot 10^6)^{1/0,1525} \cdot \bar{T}} \cdot N_f \quad (2.90)$$

2. Propriétés en fatigue à partir de l'équation 2.15 :

$$FFE_{RO} = \frac{2\sigma_M^{1+1/0,15}}{(2 \cdot 626,7 \cdot 10^6)^{1/0,15} \cdot \bar{T}} \cdot N_f \quad (2.91)$$

Les résultats des modèles empiriques sont présentés en figure 2.30 et figure 2.31. On peut observer  $FFE_{PN} \sim 10\text{MJ}/m^3\text{K}$  pour l'Al-2024 et  $FFE_{PN} \sim 30\text{MJ}/m^3\text{K}$  pour le S-235, proches des résultats obtenus par **Liakat et Khonsari [2014b]**, **Naderi et al. [2009]** pour un Al-6061 et quelques aciers. On observe de plus, que l'utilisation de l'équation de Ramberg-Osgood cyclique implique un ordre de grandeur de différence avec Park et Nelson et que le coefficient d'érouissage cyclique  $K'$  et l'exposant d'érouissage cyclique  $n'$ , donnés par **Stephens et al. [2001]** ne correspondent pas<sup>16</sup> à ces propriétés calculées par l'équation 2.5 lorsque l'on utilise les propriétés en fatigue ( $\sigma'_f$ ,  $\epsilon'_f$ ,  $b$ ,  $c$ ) données dans **Stephens et al. [2001]**. Les résultats obtenus par l'équation 2.88 donnent des résultats fortement différents des autres équations, cette équation ne sera donc pas utilisée.

<sup>16</sup>. Des données pour la traction simple existent, où l'on a un coefficient d'érouissage  $K \approx 455 \cdot 10^6$  et un exposant d'érouissage  $n \approx 0.032$ , que l'on peut comparer à **FRANÇOIS [2017]** où  $K = E/85 \approx 859 \cdot 10^6$  et  $n \approx 0.09$

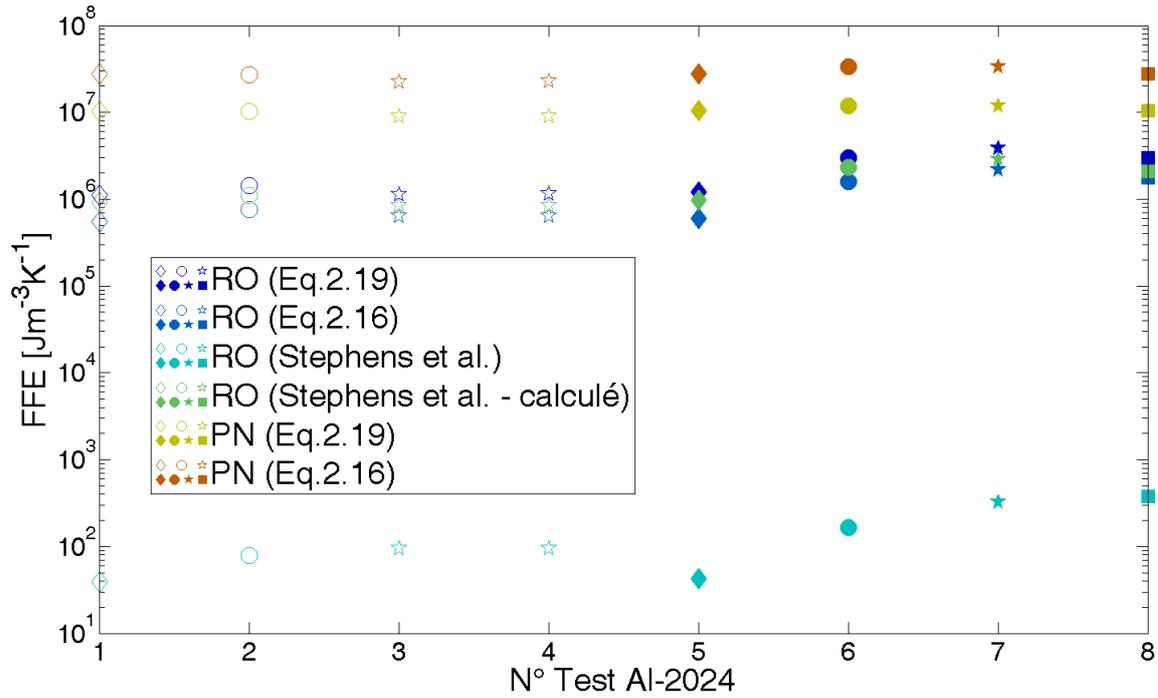


FIGURE 2.30 – Entropie de rupture à partir des modèles empiriques en fonction des tests réalisés pour l'aluminium Al-2024 : Sollicitations -  $\diamond$  : 10.5 kN -  $\circ$  : 11 kN -  $\star$  : 11.5 kN -  $\square$  : 12 kN ; Fréquences -  $\star$  : 5 Hz -  $\blackstar$  : 10 Hz

### Estimations expérimentales

L'estimation expérimentale de l'entropie de rupture est ici basée uniquement sur la chaleur émise par le matériau. De fait, la quantité importante mesurée lors d'un test est la température. Le relevé de température en fonction du temps est possible avec la caméra FLIR A325sc. Ceci nous permet d'accéder à l'accumulation d'énergie en début de test (que l'on appellera aussi terme instationnaire  $\rho C \frac{dT}{dt}$ ) et à la diffusion de chaleur dans l'espace (que l'on appellera aussi terme de conduction  $div \vec{q}$ ). Un exemple de test présentant un profil de température (pour le S-235) est donné en figure 2.32.

Dans un premier temps, le terme instationnaire sera évalué à partir de la variation de la température moyenne spatiale ( $T_m$ ) de l'échantillon en fonction du temps (figure 2.33) en utilisant plusieurs régressions linéaires dans les différentes phases de la durée de vie de l'échantillon. On va ainsi caractériser simplement la variation en température par l'utilisation de comportements linéaires par morceaux :

$$T_m(t) = a_i t + b_i \quad \left( \frac{dT}{dt} \right)_i = a_i \quad t \in [t_n, t_{n+1}] \subset [0, t_f] \quad (2.92)$$

Avec  $a_i$  : Coefficient représentant la variation temporelle de la température, obtenu par régression linéaire dans la gamme temporelle  $[t_n, t_{n+1}]$ , celle-ci appartenant à la gamme temporelle entière  $[0, t_f]$ . Et  $b_i$  étant un coefficient obtenu par régression permettant la continuité.

La puissance accumulée dans l'échantillon (ou encore puissance instationnaire) et l'entropie accumulée associée sont données par :

$$P_{insta} = \rho C \frac{dT_m}{dt} \approx \rho C \sum_i \left( \frac{dT_m}{dt} \right)_i \frac{(t_{n+1} - t_n)}{t_f} \quad (2.93)$$

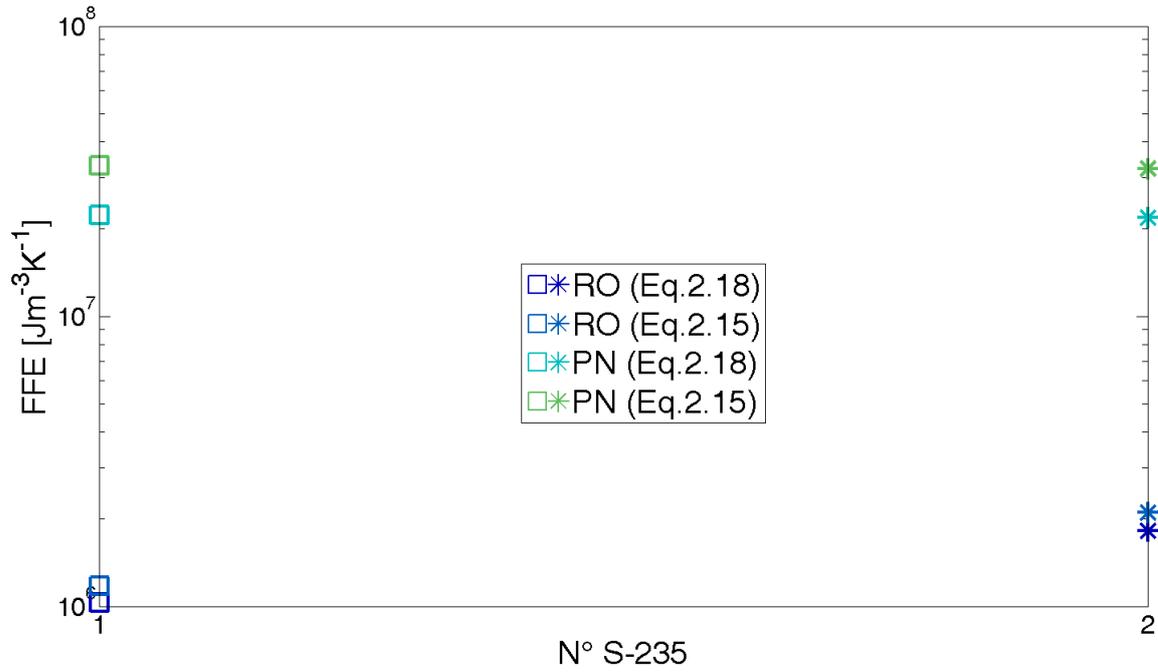


FIGURE 2.31 – Entropie de rupture à partir des modèles empiriques en fonction des tests réalisés pour l'aluminium S-235 : Sollicitations - □ : 12 kN - \* : 13 kN ; Fréquence - 5 Hz

$$FFE_{insta} = \int_0^{t_f} \frac{P_{insta}}{T} dt \approx \frac{\rho C \sum_i a_i (t_{n+1} - t_n)}{\bar{T}} \quad (2.94)$$

Où l'on a utilisé une température moyenne spatio-temporelle ( $\bar{T}$ ) car les variations de températures sont faibles (en Kelvin). On peut observer un pic de température présent entre la phase instationnaire et la phase stationnaire durant nos tests, ceci provient du fait que l'on utilise des contraintes de sollicitation élevées. En effet, ces pics apparaissent par exemple dans [Meneghetti \[2007\]](#) pour des éprouvettes entaillées d'acier inoxydable SS-304. Lorsque le chargement de sollicitation utilisé est plus faible, on tend plutôt à avoir une courbe de type sigmoïde (voir figure 2.6).

Il est utile de rappeler l'hypothèse faite précédemment consistant à considérer un terme de conduction de chaleur constant dans la phase stationnaire, et entièrement égal à la puissance de déformation plastique. Par conséquent, nous utiliserons une régression polynomiale de type parabolique pour le profil de température le long de l'échantillon (uniquement dépendant de l'espace et indépendant du temps à l'instar de [\[Blanche et al., 2015\]](#) qui utilisent en plus, dans le cadre de la fatigue gigacyclique, un polynôme local de degré deux en temps et espace). L'estimation des trois paramètres de la régression parabolique de la température permet naturellement l'obtention de la puissance conduite à partir de la dérivée seconde suivant la longueur de l'échantillon :

$$T(x) = a_j x^2 + b_j x + c_j \quad P_{cond} = k \frac{d^2 T}{dx^2} = 2k a_j \quad (2.95)$$

Pour prendre en compte la variabilité du régime, on détermine plusieurs profils en début de test caractérisant la phase instationnaire puis un profil en phase stationnaire aboutissant ainsi à une moyenne temporelle :

$$\left( \frac{1}{t_f} \right) \int_0^{t_f} \Delta T(t) dt \approx \left( \frac{1}{t_f} \right) \sum_{k=0}^{t_f} \Delta T(t) (t_{k+1} - t_k) = \overline{\Delta T(t)} \quad (2.96)$$

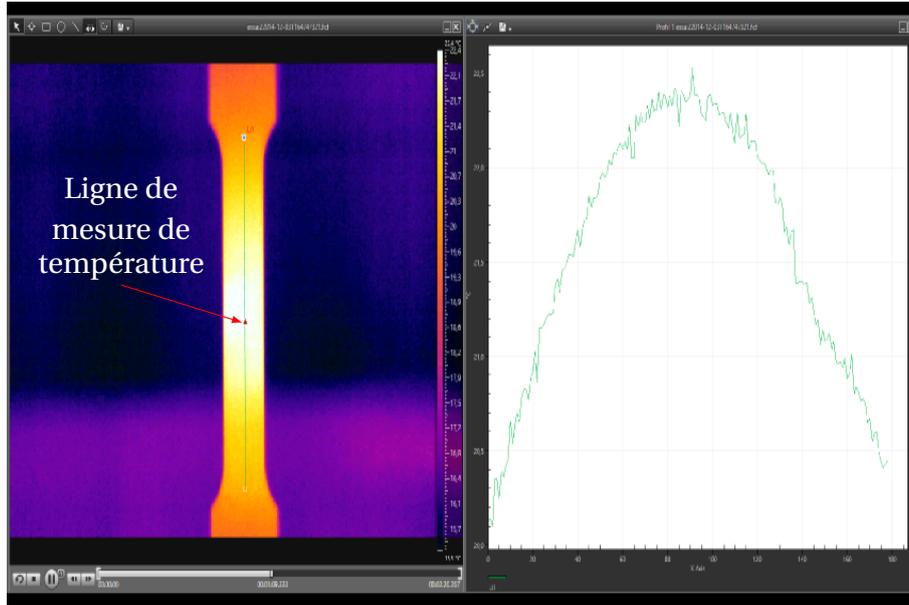


FIGURE 2.32 – Évolution du profil de température mesuré suivant la longueur de l'éprouvette (pris à mi-largeur) durant un test de traction pour le S-235 (Logiciel : FLIR R&D)

Il en découle la puissance conduite et son entropie accumulée associée :

$$P_{cond} = 2k\overline{a_j(t)} \quad FFE_{cond} = \int_0^{t_f} \frac{P_{cond}}{T} dt \approx \frac{2k\overline{a_j(t)}t_f}{\overline{T}} \quad (2.97)$$

Attention cependant, dans le cas de l'acier S-235, on prendra en compte la variabilité du régime tout au long du test impliquant l'estimation de plusieurs profils de température tout au long de la durée de vie du matériau, car l'évolution de la température de l'échantillon ne fait pas apparaître de phase stationnaire (figure 2.34). On pourrait de plus rajouter que les propriétés de diffusion de chaleur de l'acier sont très inférieures à celles de l'aluminium et paraissent appuyer la nécessité de suivre plus en détail le profil de température dans le temps.

On peut finalement obtenir l'entropie de rupture en fatigue au cours d'un test expérimentalement par la somme des deux composantes précédentes :

$$FFE_{LCF} = FFE_{cond} + FFE_{insta} = \frac{2k\overline{a_j(t)}t_f}{\overline{T}} + \frac{\rho C \sum_i a_i (t_{n+1} - t_n)}{\overline{T}} \quad (2.98)$$

Pour prendre en compte les autres modes de transfert de chaleur, on utilisera les équations données en sous-section 2.3.3. En effet dans un premier temps, les nombres adimensionnels caractérisant le transfert convectif ( $Gr$ ,  $Ra$ ,  $Pr$ ) sont calculés et permettent de déterminer un régime d'écoulement laminaire, c'est-à-dire un nombre de Rayleigh ( $Ra$ ) inférieur à  $10^9$  (voir figure 2.35 et figure 2.36).

Les corrélations utilisées en convection naturelle pour des écoulements laminaires permettent d'obtenir des nombres de Nusselt, celui-ci représentant le rapport entre flux de chaleur convectif et le flux de chaleur conductif dans le fluide. C'est à partir du nombre de Nusselt que l'on peut ensuite déterminer le coefficient d'échange convectif. Les résultats obtenus en figure 2.37 et figure 2.38 sont en accord avec ceux obtenus par Meneghetti [2007] (en fatigue oligocyclique et à grand nombre de cycles) soit environ  $h_m \in [4, 5] Wm^{-2}K^{-1}$ .

En considérant une température moyenne de l'échantillon, les résultats précédents permettent d'accéder à la densité de puissance volumique échangée sous forme de transfert

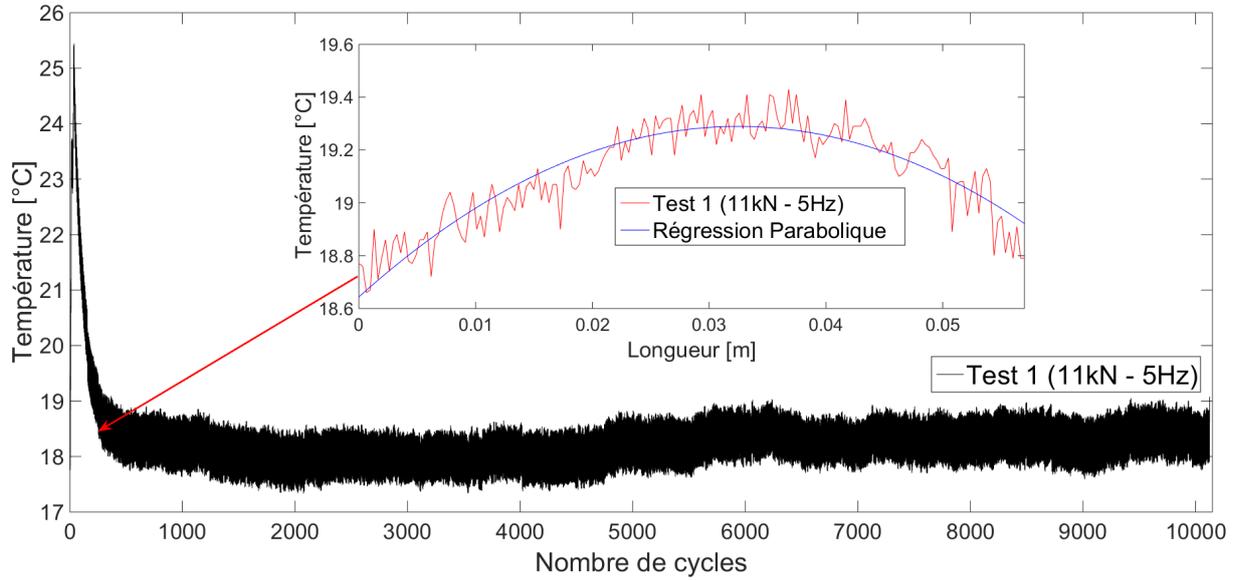


FIGURE 2.33 – Évolution de la température (moyenne spatiale) en fonction du temps et profil de température le long de l'échantillon à  $N \sim 280$  pour l'Al 2024 sollicité à 11kN et 5Hz

convectif à partir de l'équation de Newton. Pour ce qui est de la densité de puissance rayonnée par l'échantillon, elle est estimée par la loi de Stefan-Boltzmann, en rappelant l'émissivité utilisée,  $\epsilon = 0.95$  et la constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma_{SB}$ ) :

$$P_{conv} = h \frac{S_{conv}}{V_{ép}} (\bar{T} - T_0) \quad P_{ray} = \epsilon \sigma_{SB} \frac{S_{ray}}{V_{ép}} (\bar{T}^4 - T_0^4) \quad (2.99)$$

Il en résulte en sachant que les puissances estimées sont des puissances moyennes :

$$FFE_{conv} = \frac{\left[ h \frac{S_{conv}}{V_{ép}} (\bar{T} - T_0) \right]}{\bar{T}} t_f \quad FFE_{ray} = \frac{\left[ \epsilon \sigma_{SB} \frac{S_{ray}}{V_{ép}} (\bar{T}^4 - T_0^4) \right]}{\bar{T}} t_f \quad (2.100)$$

On peut après avoir obtenu ces diverses expressions, comparer chacune des contributions de l'entropie de rupture en fatigue. On peut ainsi voir que les contributions à la  $FFE_{tot}$  de la convection et du rayonnement ne sont pas toujours négligeables. Néanmoins, les résultats obtenus dans figure 2.39 et figure 2.40 montrent la composante majoritaire de la  $FFE_{tot}$ , en l'occurrence, le terme de conduction, qui apparaît supérieur aux autres composantes.

Pour finir, on peut comparer les différentes relations pour l'entropie de rupture en fatigue ( $FFE_{LCF}$  et  $FFE_{tot}$ ) à la littérature ( $FFE_{expo}$ ) reposant sur l'estimation de la dissipation. La méthode est identique à l'estimation de la puissance conduite cependant les profils de températures sont ajustés par des fonctions exponentielles sous contrainte. En effet, la contrainte connue est la constante de temps  $\tau$  (équation 2.61), celle-ci dépendant de paramètres matériau connus, mais aussi d'un coefficient d'échange global regroupant convection et rayonnement. Le coefficient de transfert convectif moyen a été estimé précédemment  $h_m \in [4, 5] Wm^{-2}K^{-1}$ . Le coefficient équivalent d'échange par rayonnement est obtenu par linéarisation en utilisant un développement de Taylor de la température autour de la température de l'environnement :

$$\bar{T}^4 = T_0^4 + 4T_0^3(\bar{T} - T_0) \quad h_{ray} = 4\epsilon\sigma T_0^3 \quad h_{ray} \approx 5 Wm^{-2}K^{-1} \quad (2.101)$$

On obtient ainsi en moyenne un coefficient d'échange global  $h_G \approx 10 Wm^{-2}K^{-1}$ , et une constante de temps autour de  $\tau \approx 270s$  soit environ 4min30. On considère ensuite la puis-

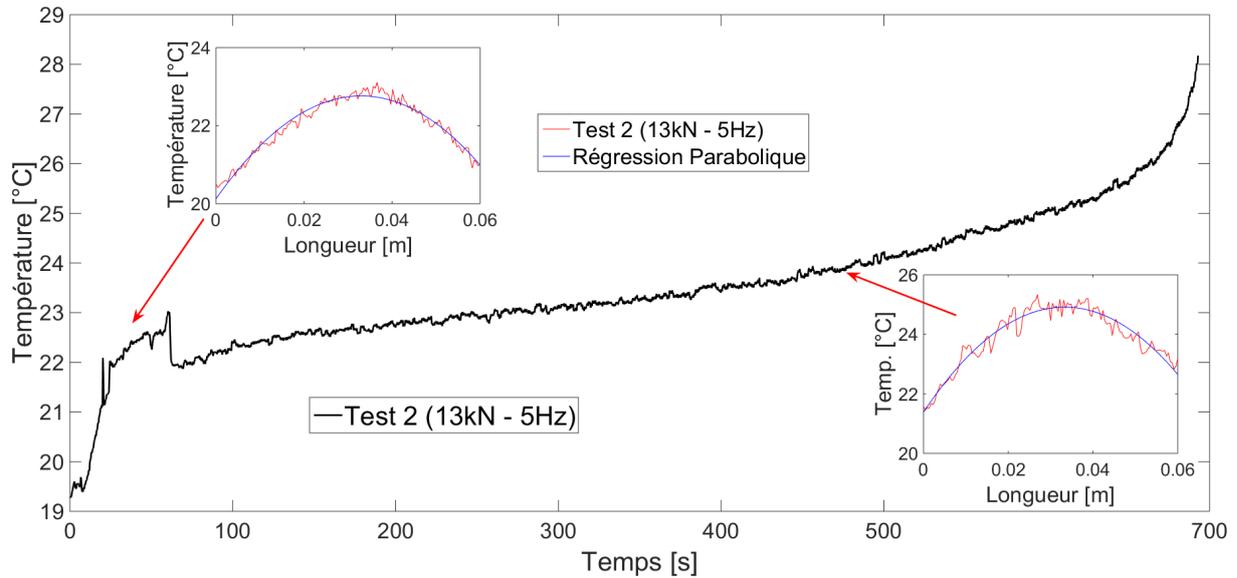


FIGURE 2.34 – Évolution de la température (moyenne spatiale) en fonction du temps et profils de température le long de l'échantillon à  $t \sim 30s$  et  $t \sim 480s$  pour le S-235 sollicité à 13kN et 5Hz

sance dissipée comme la dissipation  $d_1$  pondérée par le temps :

$$P_{expo} = \sum_i \frac{d_1(t)(t_{n+1} - t_n)}{t_f} = \overline{d_1} \quad t \in [t_n, t_{n+1}] \subset [0, t_f] \quad (2.102)$$

On pourra finalement estimer une  $FFE_{expo}$  à partir de la dissipation intrinsèque moyenne :

$$FFE_{expo} = \int_0^{t_f} \frac{d_1}{T} dt = \frac{\overline{d_1}}{T} t_f \quad (2.103)$$

À ce stade, il est possible de comparer les différentes relations utilisées. On observe ainsi que la simplification parabolique  $FFE_{LCF}$  et que la prise en compte des autres modes de transferts  $FFE_{tot}$  conservent le même ordre de grandeur que l'entropie de rupture estimée à partir de la dissipation  $FFE_{expo}$  (figure 2.41 et figure 2.42).

### Comparaison des entropies expérimentales et empiriques de rupture en fatigue

L'ensemble des résultats ont été jusqu'ici traités séparément, dès lors, il est maintenant possible de se concentrer sur la comparaison entre modèles empiriques et résultats expérimentaux. On prendra ainsi :

— Du côté expérimental (sous section 2.3.3) :

1.  $FFE_{expo}$  - utilisant une régression exponentielle pour estimer la conduction
2.  $FFE_{tot}$  - utilisant une régression parabolique pour la conduction, en prenant en compte l'énergie accumulée, la convection et le rayonnement
3.  $FFE_{LCF}$  - utilisant une régression parabolique pour la conduction et prenant en compte uniquement l'énergie accumulée

— Du côté empirique :

1.  $FFE_{PN}$  - Moyenne des entropies de rupture utilisant l'équation 2.81 et l'équation 2.82 pour l'aluminium, et l'équation 2.83 et l'équation 2.84 pour l'acier

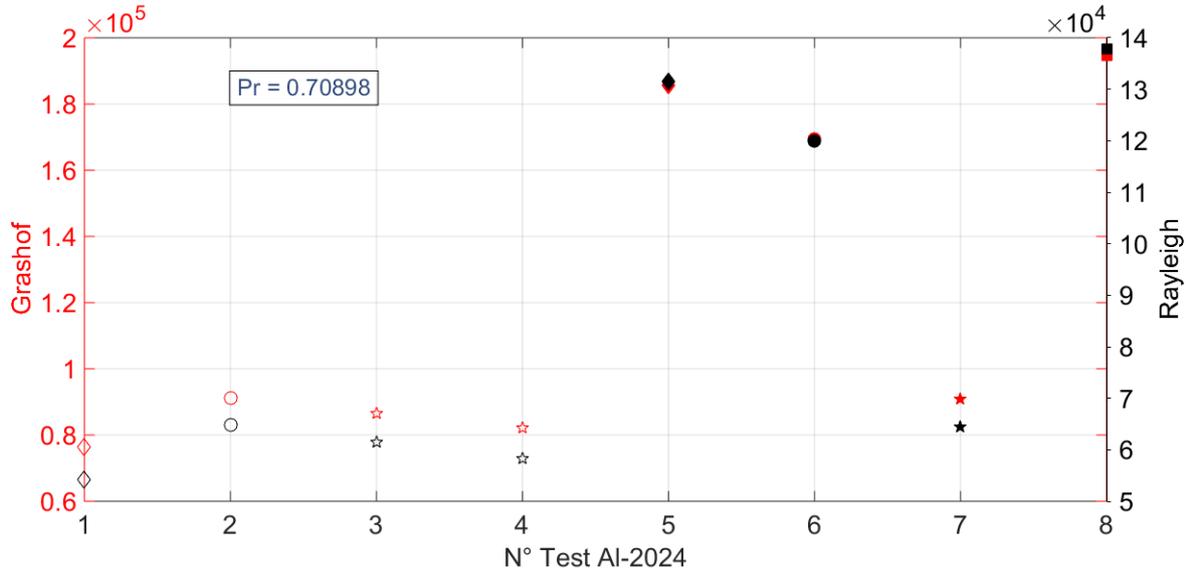


FIGURE 2.35 – Nombre de Grashof et nombre de Rayleigh moyens en fonction des tests réalisés pour l'aluminium Al-2024 : Sollicitations -  $\diamond$  : 10.5 kN -  $\circ$  : 11 kN -  $\star$  : 11.5 kN -  $\square$  : 12 kN ; Fréquences -  $\star$  : 5 Hz -  $\blackstar$  : 10 Hz

## 2. FFE<sub>RO</sub> - Moyenne des entropies de rupture utilisant les équations 2.86 et 2.87 pour l'aluminium<sup>17</sup>, et les équations 2.90 et 2.91 pour l'acier.

On introduit maintenant la FFE<sub>th</sub>, l'entropie de rupture en fatigue associée au terme lié à l'irréversibilité de la conduction de chaleur :

$$FFE_{th} = \int_0^{t_f} \left[ \frac{\vec{q}}{T^2} \cdot \overrightarrow{grad}(T) \right] dt \quad FFE_{th} \approx k \left( \frac{\overline{\nabla T}}{\overline{T}} \right)^2 t_f \quad (2.104)$$

Avec  $\overline{\nabla T}$ , le gradient de température moyen.

On peut ainsi vérifier la contribution négligeable du terme lié à l'irréversibilité de la conduction de chaleur dans le bilan entropique pour l'entropie de rupture en fatigue. Les résultats sont présentés en figure 2.43 pour l'aluminium 2024 et figure 2.44 pour l'acier 235. L'observation montre simplement une approximation meilleure du comportement expérimental par le modèle de Ramberg-Osgood en fatigue comparé au modèle de Park et Nelson. Cela vient du fait que le type de sollicitation (traction-traction) est pris en compte dans le modèle de Ramberg-Osgood mais pas dans le modèle de Park et Nelson. En effet, dans le modèle de Park et Nelson, la contrainte moyenne est affectée à la partie élastique de la déformation ne contribuant pas ici à l'estimation de l'entropie de rupture.

On peut de plus définir un écart au modèle utilisé dans la littérature (FFE<sub>expo</sub>) en définissant un facteur :

$$\eta_{PN,RO,tot,LCF} = \frac{|FFE_{expo} - FFE_{PN,RO,tot,LCF}|}{FFE_{expo}} \quad (2.105)$$

On observe généralement une estimation proche de la FFE<sub>expo</sub> sauf pour le modèle de Park et Nelson (voir figure 2.45).

Les résultats expérimentaux et ceux tirés du modèle de Park et Nelson présentent une différence d'ordre de grandeur qui peut s'expliquer (mis à part la contrainte moyenne) de par le fait que la méthode des médianes pour la détermination des propriétés en fatigue surestime l'amplitude de déformation pour un nombre de cycles donné [Lipski et Mroziński,

<sup>17</sup>. Les résultats expérimentaux de Stephens et al. [2001] ne sont pas pris en compte, ainsi l'équation 2.89 et l'équation 2.88 ne sont pas utilisées.

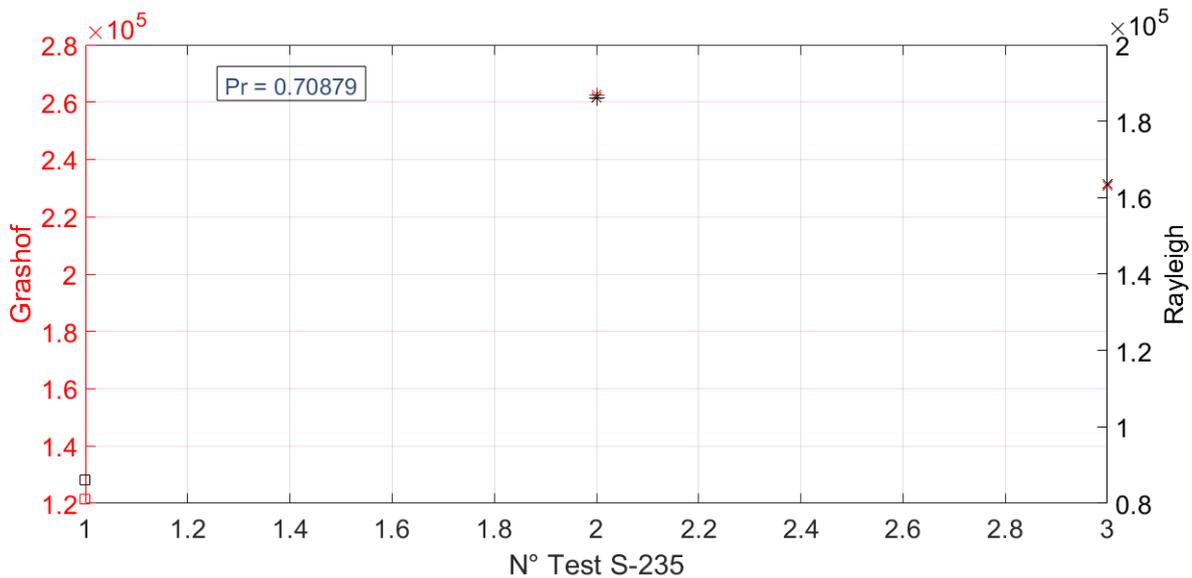


FIGURE 2.36 – Nombre de Grashof et nombre de Rayleigh moyens en fonction des tests réalisés pour l’acier S-235 : Sollicitations - □ : 12 kN - \* : 13 kN - x : Traction pure ; Fréquence en fatigue : 5 Hz

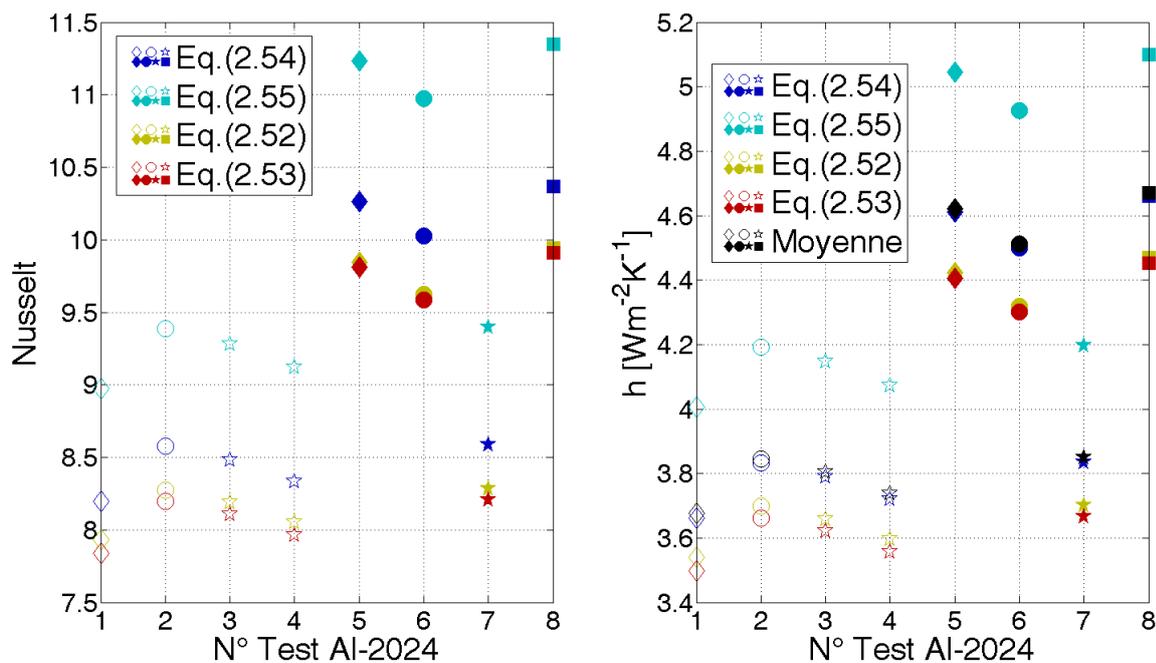


FIGURE 2.37 – Nombre de Nusselt et coefficients de convection moyens en fonction des tests réalisés pour l’aluminium Al-2024 et à partir des différentes corrélations trouvées dans la littérature. Sollicitations - ◇ : 10.5 kN - ○ : 11 kN - ☆ : 11.5 kN - □ : 12 kN ; Fréquences - ☆ : 5 Hz - ★ : 10 Hz

2012]. Il en résulte lorsque l’on estime l’énergie de déformation, une valeur supérieure à la valeur expérimentale. Pour ce qui est des différentes relations permettant l’estimation de l’entropie de rupture, les composantes convectives et radiatives des échanges de chaleur ne sont pas toujours négligeables. Il est ainsi nécessaire de bien prendre en compte toutes les composantes pour estimer correctement l’entropie de rupture en fatigue. L’énergie dissipée par convection et rayonnement étant très sensible à la température de l’environnement, le rapport entre l’entropie de rupture  $FFE_{tot}$  et  $FFE_{LCF}$  nous montre l’influence importante de la température de l’environnement  $T_0$  et donc de la convection et du rayonnement sur

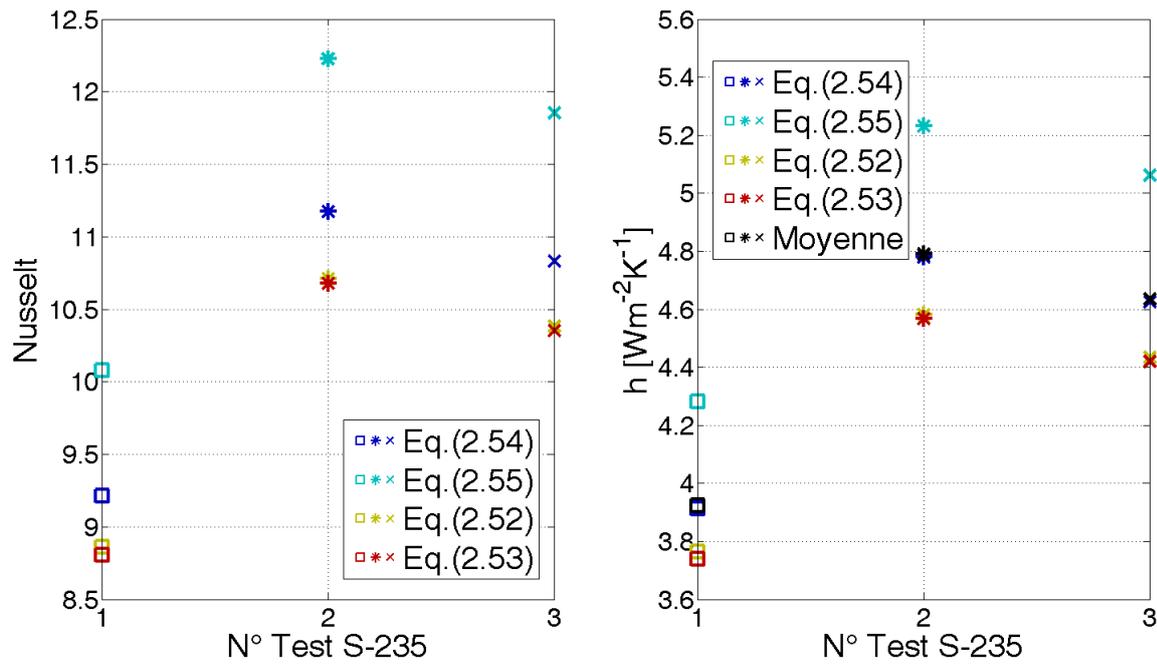


FIGURE 2.38 – Nombre de Nusselt et coefficients de convection moyens en fonction des tests réalisés pour l'acier S-235 et à partir des différentes corrélations trouvées dans la littérature. Sollicitations - □ : 12 kN - \* : 13 kN - x : Traction pure ; Fréquence en fatigue : 5 Hz

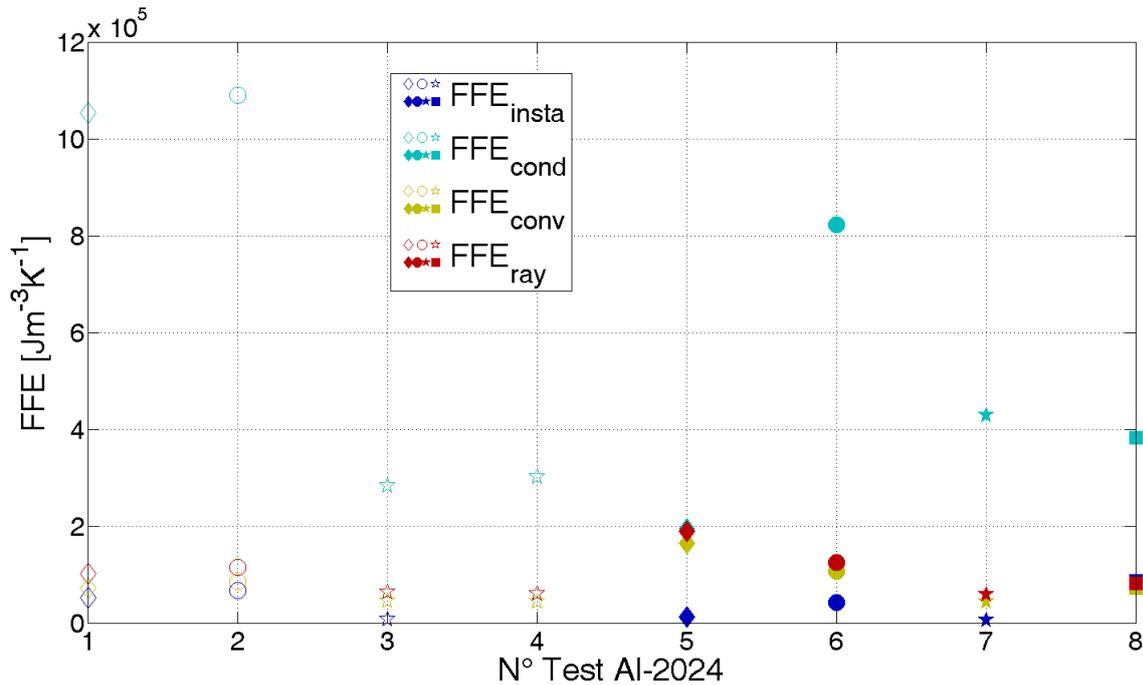


FIGURE 2.39 – Les différentes composantes de  $FFE_{tot}$  pour chacun des tests sur l'Al-2024. Sollicitations - ◇ : 10.5 kN - ○ : 11 kN - ☆ : 11.5 kN - □ : 12 kN ; Fréquences - ☆ : 5 Hz - ★ : 10 Hz

l'entropie de rupture totale ( $FFE_{tot}$ ) :

$$\eta_F = \frac{FFE_{tot} - FFE_{LCF}}{FFE_{tot}} \quad (2.106)$$

Les résultats en figure 2.46 montrent que quinze degrés d'écart entre l'échantillon et l'environnement impliquent une contribution de 50% de la convection et du rayonnement dans

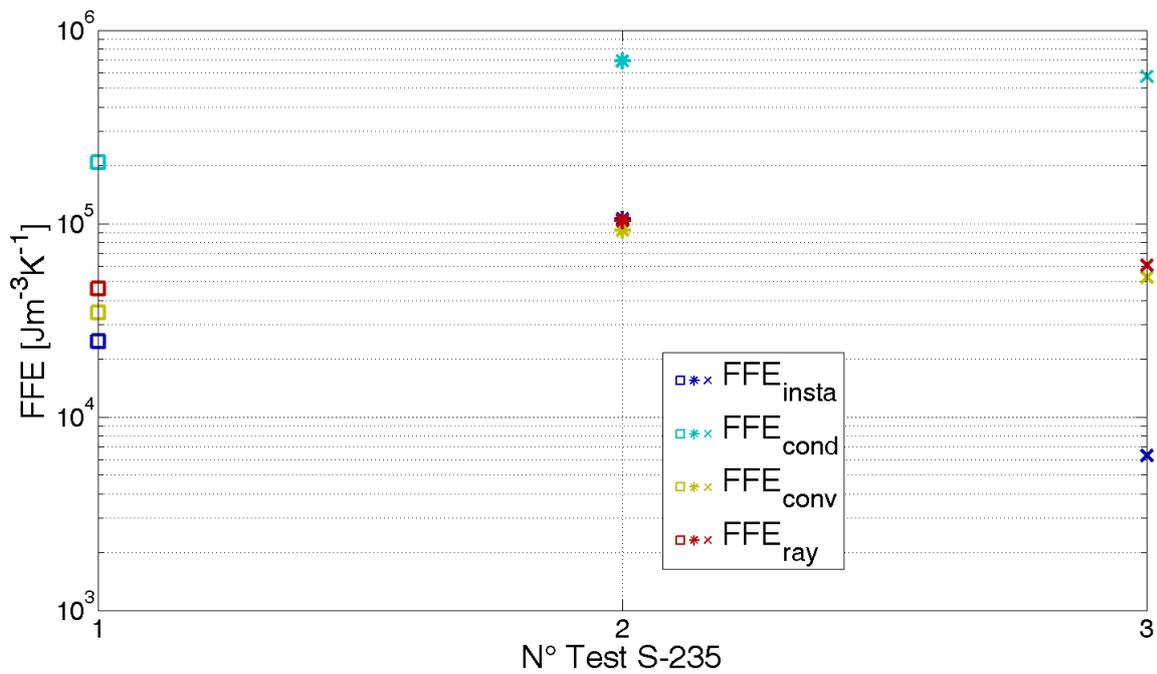


FIGURE 2.40 – Les différentes composantes de  $FFE_{tot}$  pour chacun des tests sur le S-235. Sollicitations -  $\diamond$  : 12 kN -  $\circ$  : 13 kN -  $\star$  : Traction pure ; Fréquence : 5 Hz

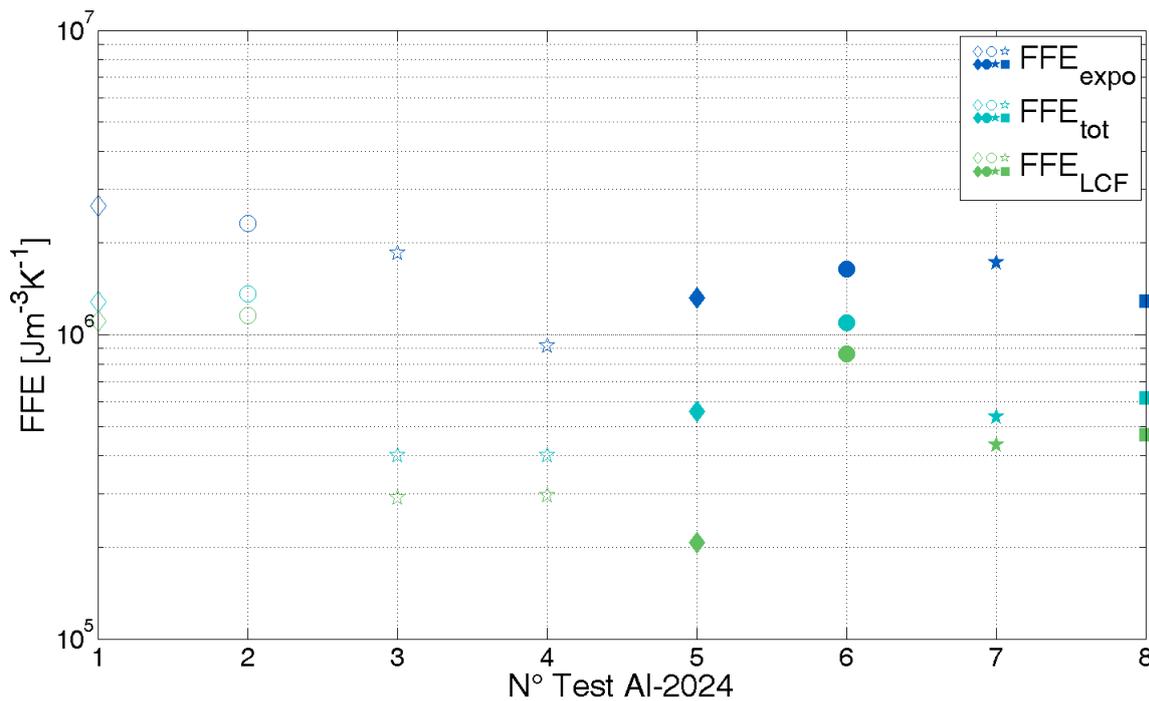


FIGURE 2.41 – Comparaison des différentes relations permettant l'estimation de l'entropie de rupture pour chacun des tests de l'Al-2024. Sollicitations -  $\diamond$  : 10.5 kN -  $\circ$  : 11 kN -  $\star$  : 11.5 kN -  $\square$  : 12 kN ; Fréquences -  $\star$  : 5 Hz -  $\star$  : 10 Hz

l'estimation de l'entropie de rupture totale (les autres 50% étant associés au travail de déformation plastique estimé par conduction), montrant ainsi l'importance de l'environnement dans la caractérisation thermodynamique des matériaux (en considérant bien sûr que la variation de la température de l'environnement n'ait pas d'effet sur le coefficient d'échange global et la température de l'échantillon).

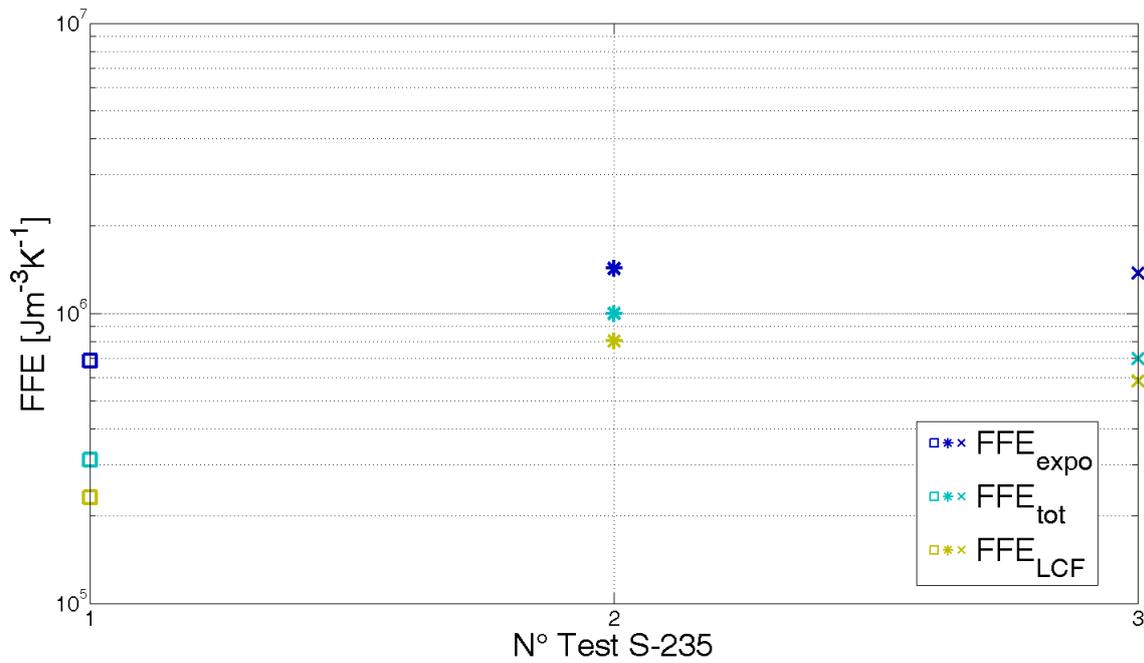


FIGURE 2.42 – Comparaison des différentes relations permettant l'estimation de l'entropie de rupture pour chacun des tests du S-235. Sollicitations -  $\diamond$  : 12 kN -  $\circ$  : 13 kN -  $\star$  : Traction pure ; Fréquence en fatigue : 5 Hz

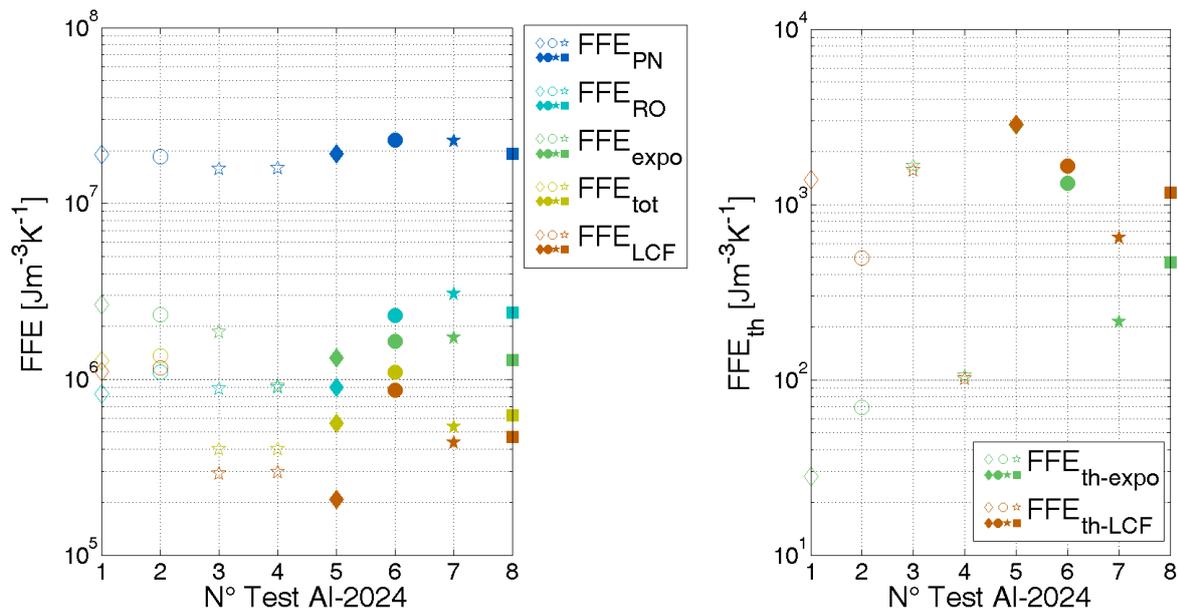


FIGURE 2.43 – Ensemble des résultats d'entropie de rupture en fatigue (FFE), et composante liée à l'irréversibilité thermique ( $FFE_{th}$ ) pour chacun des tests de l'Al-2024. Sollicitations -  $\diamond$  : 10.5 kN -  $\circ$  : 11 kN -  $\star$  : 11.5 kN -  $\square$  : 12 kN ; Fréquences -  $\star$  : 5 Hz -  $\star$  : 10 Hz

Le résultat important obtenu est l'existence physique d'une entropie de rupture en fatigue, constante, et indépendante de la fréquence de sollicitation et de la contrainte maximale, vérifiée par l'expérimentation (voir figure 2.43 et figure 2.44). On peut de plus vérifier la contribution minoritaire à la FFE de la  $FFE_{th}$ , provenant de l'irréversibilité de la conduction de chaleur. Du point de vue expérimental, on pourra souligner la plus grande variabilité de la régression parabolique devant la régression exponentielle, impliquant une estimation plus robuste par la régression exponentielle.

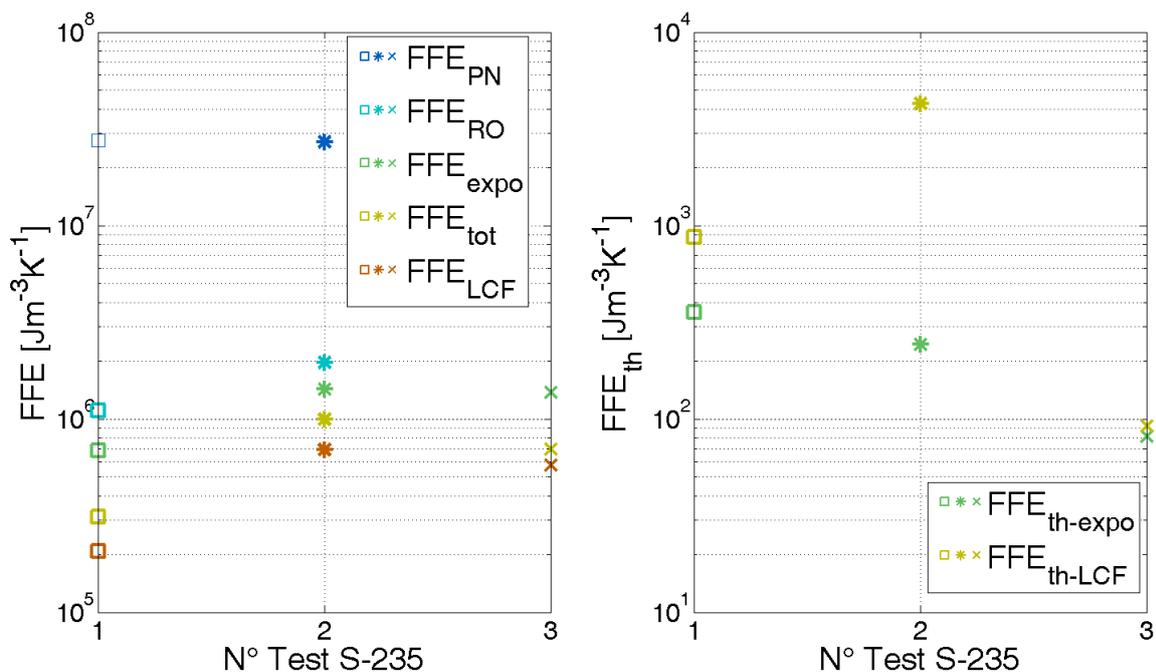


FIGURE 2.44 – Ensemble des résultats d’entropie de rupture en fatigue (FFE), et composante liée à l’irréversibilité thermique ( $FFE_{th}$ ) pour chacun des tests du S-235. Sollicitations -  $\diamond$  : 12 kN -  $\circ$  : 13 kN -  $\star$  : Traction pure ; Fréquence en fatigue : 5 Hz

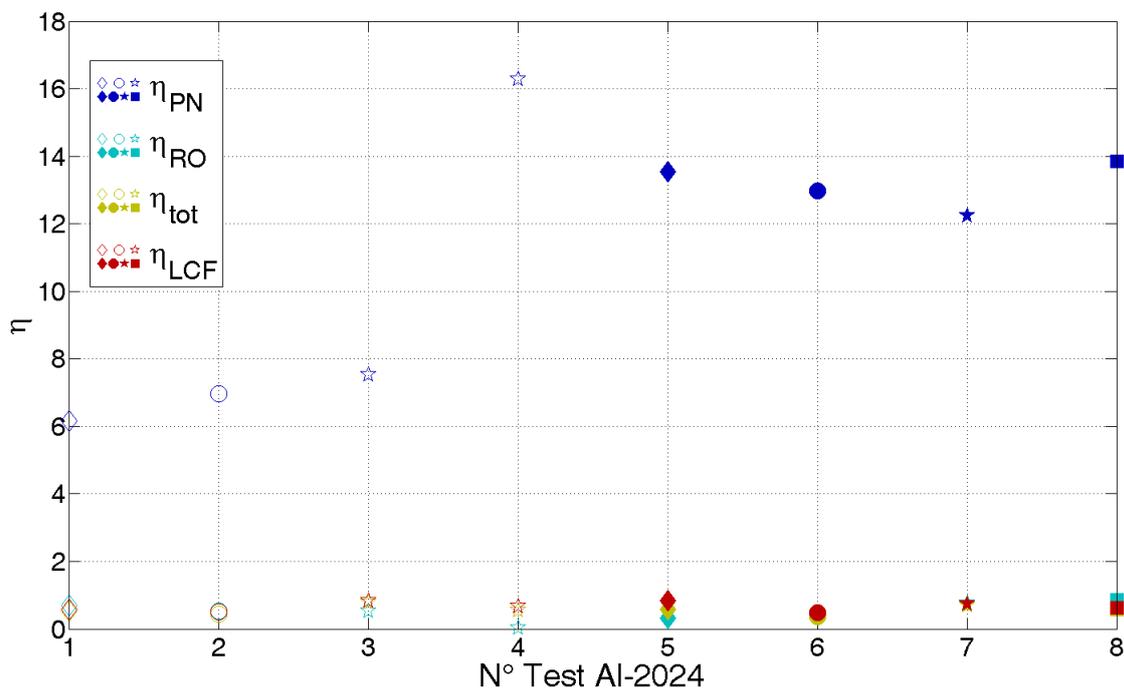


FIGURE 2.45 – Écart relatif des différents modèles comparés à la  $FFE_{expo}$  pour l’Al-2024. Sollicitations -  $\diamond$  : 10.5 kN -  $\circ$  : 11 kN -  $\star$  : 11.5 kN -  $\square$  : 12 kN ; Fréquences -  $\star$  : 5 Hz -  $\star$  : 10 Hz

**Note sur l’incertitude de mesure**

Dans le travail précédent, les mesures ont été effectuées en considérant une émissivité de 0.95 dans la gamme de longueur d’onde d’étude [7.5-13] $\mu\text{m}$ . Il est possible d’étudier l’influence de l’émissivité sur les résultats d’entropie de rupture (pour l’al-2024). En utili-

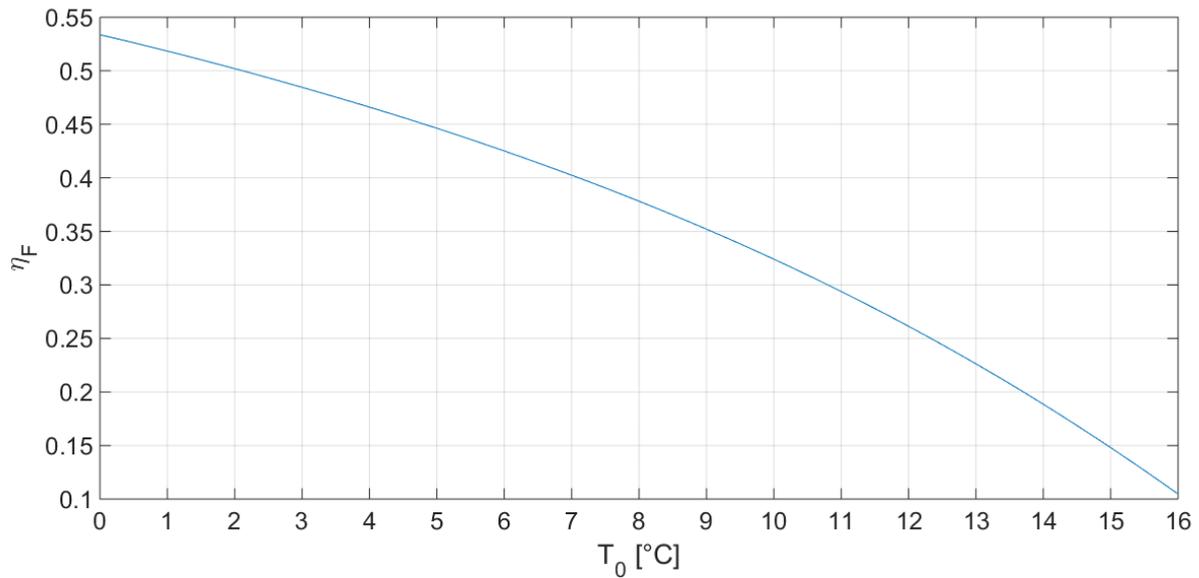


FIGURE 2.46 – Variation de  $\eta_F$  en fonction de la température de l'environnement  $T_0$  pour le premier test sur l'Al-2024

sant l'équation 2.69 et l'équation 2.75, on peut aboutir à la température que l'on aurait si l'émissivité était différente. En considérant une émissivité constante indépendante de la longueur d'onde égale à 0.9 on obtient une erreur de 3K sur la température. Pour une émissivité de 0.85, une erreur de 6K. Une émissivité plus faible implique une température plus élevée et se répercute sur la convection et le rayonnement (en considérant  $T_0$  inchangée dans chaque test car mesurée par thermocouple). A émissivité 0.9, on obtient un facteur 2.03 sur la  $FFE_{conv}$  et un facteur 1.71 sur la  $FFE_{ray}$ . Pour une émissivité de 0.85, on obtient un facteur 3.15 sur la  $FFE_{conv}$  et un facteur 2.37 sur la  $FFE_{ray}$ .

### 2.5.3 De l'entropie à l'endommagement

#### Modèles d'endommagement existant à partir de la FFE

La fatigue est étroitement liée au concept d'endommagement, c'est Miner [1945] qui a le premier introduit le concept d'endommagement cumulé, considéré comme linéaire et dépendant des amplitudes de chargement :

$$\sum_i \frac{n_i}{N_i} = 1 \quad (2.107)$$

$i$  : Nombre d'amplitudes de chargement

$n_i$  : Nombre de cycles effectués sous l'amplitude de chargement  $i$

$N_i$  : Nombre de cycles à rupture pour l'amplitude de sollicitation  $i$

D'autres critères d'endommagement existent dans la littérature utilisant diverses propriétés de l'échantillon étudié tel que la variation du module de Young ou encore la variation de densité du matériau [Duyi et Zhenlin, 2001c, Lemaitre et Dufailly, 1987, Yuan-Sheng et Yungbin, 1988]. Cette diversité apporte des comportements différents de la linéarité utilisée par l'initiateur de l'étude de l'endommagement Miner [1945], et permet de comparer les différents modèles entre eux [Hambli, 2001]. Duyi et Zhenlin [2001a,b] étudièrent par exemple l'endommagement d'un matériau à partir d'une loi logarithmique liant le concept de résistance statique du matériau et le nombre de cycles à rupture. Comme l'accumulation

d'endommagement est un phénomène dissipatif obéissant aux principes de la thermodynamique, la dégradation d'un matériau correspond à un processus irréversible et implique ainsi l'entropie comme paramètre fondamental pour sa mesure. C'est ainsi que **Basaran et Nie [2004]**, **Basaran et al. [2003]** appliquèrent l'entropie (dans le cadre de thermodynamique classique) afin d'obtenir un endommagement des matériaux fonction de l'entropie de Boltzmann (cadre de l'entropie statistique). **Naderi et Khonsari [2010a]** appliquèrent l'entropie et la FFE à l'endommagement, en considérant l'hypothèse d'un lien linéaire entre entropie et nombre de cycles à rupture [**Naderi et Khonsari, 2010a**], une loi logarithmique de l'endommagement et la définition d'un endommagement critique caractérisé par une évaluation de la variation de la température en fonction du temps après le stade stationnaire (à l'initiation de la phase 3 de la figure 2.6) :

$$D_e = A_d + B_d \left[ \ln \left( 1 - \frac{II}{FFE} \right) \right] \quad \forall II = FFE \quad D_e = 1 \quad (2.108)$$

$A_d, B_d$  : Paramètres variants avec le matériau

$II$  : Représente la création d'entropie accumulée durant le test de fatigue

**FFE** : Création d'entropie en fatigue accumulée qui amène à la rupture du matériau

On peut identifier des cas particuliers d'endommagement :

— Paramètre d'endommagement pour un matériau non vierge :

$$D_0 = A_d + B_d \left[ \ln \left( 1 - \frac{II_0}{FFE} \right) \right] \quad (2.109)$$

$II_0$  : Représente l'entropie initialement accumulée par matériau avant le test

— Paramètre d'endommagement critique pour un matériau à l'initiation de la troisième phase (montée brusque en température avant la rupture, voir figure 2.6)

$$D_c = A_d + B_d \left[ \ln \left( 1 - \frac{II_c}{FFE} \right) \right] \quad (2.110)$$

$II_c$  : Représente l'entropie accumulée "critique", c'est-à-dire au commencement de la troisième phase impliquant l'apparition de microfissures

Un matériau vierge avant un test de fatigue répond au critère d'endommagement  $II_0 = 0$  et  $D_0 = 0$ , ce qui permet d'écrire dans ce cas particulier :

$$A_d = 0 \quad \text{et} \quad B_d = \frac{D_c}{\ln \left( 1 - \frac{II_c}{FFE} \right)} \Rightarrow D_e = \left[ \frac{D_c}{\ln \left( 1 - \frac{II_c}{FFE} \right)} \right] \ln \left( 1 - \frac{II}{FFE} \right) \quad (2.111)$$

Cependant, un matériau possédant un endommagement nul est impossible, car il prend en compte à la fois l'effet mémoire de l'endommagement du matériau mais aussi ses défauts initiaux. Dès lors, pour déterminer les paramètres  $A_d$  et  $B_d$ , on utilise :

$$A_d = D_0 - B_d \left[ \ln \left( 1 - \frac{II_0}{FFE} \right) \right] = D_c - B_d \left[ \ln \left( 1 - \frac{II_c}{FFE} \right) \right] \quad (2.112)$$

$$B_d = \frac{D_0 - D_c}{\ln \left( 1 - \frac{II_0}{FFE} \right) - \ln \left( 1 - \frac{II_c}{FFE} \right)} \quad (2.113)$$

$$A_d = D_0 - \left[ \frac{D_0 - D_c}{\ln\left(1 - \frac{\Pi_0}{\text{FFE}}\right) - \ln\left(1 - \frac{\Pi_c}{\text{FFE}}\right)} \right] \ln\left(1 - \frac{\Pi_0}{\text{FFE}}\right) \quad (2.114)$$

$$D_e = D_0 - \underbrace{\frac{D_0 - D_c}{\ln\left[\frac{\left(1 - \frac{\Pi_0}{\text{FFE}}\right)}{\left(1 - \frac{\Pi_c}{\text{FFE}}\right)}\right]}}_{A_d} \ln\left(1 - \frac{\Pi_0}{\text{FFE}}\right) + \underbrace{\frac{D_0 - D_c}{\ln\left[\frac{\left(1 - \frac{\Pi_0}{\text{FFE}}\right)}{\left(1 - \frac{\Pi_c}{\text{FFE}}\right)}\right]}}_{B_d} \ln\left(1 - \frac{\Pi}{\text{FFE}}\right) \quad (2.115)$$

$$D_e = D_0 + \frac{D_c - D_0}{\ln\left[\frac{\left(1 - \frac{\Pi_c}{\text{FFE}}\right)}{\left(1 - \frac{\Pi_0}{\text{FFE}}\right)}\right]} \ln\left[\frac{\left(1 - \frac{\Pi}{\text{FFE}}\right)}{\left(1 - \frac{\Pi_0}{\text{FFE}}\right)}\right] \quad (2.116)$$

On peut d'ailleurs aboutir à une relation de l'endommagement à la  $i$ ème sollicitation :

$$\frac{D_i - D_0}{\ln\left[\frac{\left(1 - \frac{\Pi_i}{\text{FFE}}\right)}{\left(1 - \frac{\Pi_0}{\text{FFE}}\right)}\right]} = \frac{D_c - D_0}{\ln\left[\frac{\left(1 - \frac{\Pi_c}{\text{FFE}}\right)}{\left(1 - \frac{\Pi_0}{\text{FFE}}\right)}\right]} = \frac{D_{i+1} - D_0}{\ln\left[\frac{\left(1 - \frac{\Pi_{i+1}}{\text{FFE}}\right)}{\left(1 - \frac{\Pi_0}{\text{FFE}}\right)}\right]} \quad (2.117)$$

$$D_{i+1} = D_0 + \frac{D_i - D_0}{\ln\left[\frac{\left(1 - \frac{\Pi_i}{\text{FFE}}\right)}{\left(1 - \frac{\Pi_0}{\text{FFE}}\right)}\right]} \ln\left[\frac{\left(1 - \frac{\Pi_{i+1}}{\text{FFE}}\right)}{\left(1 - \frac{\Pi_0}{\text{FFE}}\right)}\right] \quad (2.118)$$

La loi logarithmique de l'endommagement considérée par [Naderi et Khonsari \[2010a\]](#) provient de critères de convexité sur l'entropie accumulée :

$$\frac{dD_e}{d\Pi} > 0 \quad \frac{d^2D_e}{d\Pi^2} > 0 \quad (2.119)$$

Ce qui implique une fonction particulière pour l'endommagement critique [[Naderi et Khonsari, 2010a](#)] :

$$D_c = \frac{-1}{\ln(\text{FFE})} \ln\left(1 - \frac{\Pi_c}{\text{FFE}}\right) \quad (2.120)$$

### Endommagement à deux seuils critiques

La littérature présente habituellement un endommagement critique qui caractérise la fin de la phase 2 et le début de la phase 3 menant à la ruine de l'échantillon (voir figure [2.6](#)). Néanmoins, il est possible de caractériser la transition entre phase 1 et phase 2, en plus de celle entre phase 2 et 3. En effet, il est observé expérimentalement, suivant l'amplitude de

sollicitation, des comportements différents proportionnels à un écrouissage plus ou moins important lors de la transition de phase 1 à 2 (un pic d'écrouissage peut avoir lieu ou non). Ainsi, un endommagement critique en première phase paraît avoir un intérêt puisqu'il marque l'effet de l'écrouissage, le deuxième endommagement critique étant quant à lui plutôt lié à la dynamique des dislocations et au travail de déformation plastique dissipé durant la phase stationnaire. Il est par conséquent possible d'introduire un paramètre d'endommagement respectant les critères de convexités imposés pour la croissance de l'endommagement et dépendant des différentes phases en fatigue avec deux endommagements critiques  $D_{c1}; D_{c2}$ .

En introduisant la variable  $x_j = \left(1 - \frac{\Pi_j}{\text{FFE}}\right)$  pour alléger l'écriture, l'endommagement peut-être donné par :

$$D_e = D_0 \frac{\ln(x)}{\ln(x_0)} \forall x \in (x_0, x_1) \quad D_e = D_{c1} \frac{\ln(x)}{\ln(x_1)} \forall x \in (x_1, x_2) \quad D_e = D_{c2} \frac{\ln(x)}{\ln(x_2)} \forall x \in (x_2, x_f) \quad (2.121)$$

$$D_{c1} = D_0 \frac{\ln(x_1)}{\ln(x_0)} \quad D_{c2} = D_{c1} \frac{\ln(x_2)}{\ln(x_1)} = D_f \frac{\ln x_2}{\ln x_f} \quad (2.122)$$

On pourra estimer le paramètre d'endommagement initial  $D_0$ , en considérant des entropies très proches (très légèrement au-dessus ou en dessous de la valeur de  $x_i : x_{i\pm\epsilon}$ ) des entropies d'un matériau sain très légèrement dégradé, et en sachant que  $D_f = 1$  par définition, on a :

$$D_0 = D_f \left( \frac{\ln x_2}{\ln x_f} \right) \left( \frac{\ln x_0}{\ln x_2} \right) = \frac{\ln x_{0+\epsilon}}{\ln x_{f-\epsilon}} \quad (2.123)$$

Pour différencier les deux endommagements critiques, on pourra appeler  $D_{c1}$  l'endommagement d'écrouissage, étant donné que ce qui apparaît en début de test est un phénomène d'écrouissage impliquant une augmentation de la densité de dislocations (avec ou sans pic).  $D_{c2}$  par contre, sera associé à l'ensemble de la déformation plastique et pourra de fait être dénommé endommagement irréversible.

En considérant le lien entre entropie générée et le nombre de cycles à rupture [Naderi et al., 2009], les expressions deviennent :

$$D_0 = D_f \frac{\ln\left(1 - \frac{N_{0+\epsilon}}{N_f}\right)}{\ln\left(1 - \frac{N_{f-\epsilon}}{N_f}\right)} \quad D_{c1} = D_f \frac{\ln\left(1 - \frac{N_{c1}}{N_f}\right)}{\ln\left(1 - \frac{N_{f-\epsilon}}{N_f}\right)} \quad D_{c2} = D_f \frac{\ln\left(1 - \frac{N_{c2}}{N_f}\right)}{\ln\left(1 - \frac{N_{f-\epsilon}}{N_f}\right)} \quad (2.124)$$

Les changements de régimes sont évalués par l'évolution de la dérivée temporelle (lisée par méthode des moindres carrés pondérés) de la température en fonction du temps. Les deux phases sont ainsi déterminées par le début et la fin d'une phase stabilisée (voir figure 2.47). Pour estimer l'endommagement initial (dans le cas de matériau non vierge), on raisonne à partir de l'énergie d'une ligne de dislocation dépendant du module de cisaillement  $\mu_c$  et du module de Burgers du matériau  $b_u$ . En général, un matériau possède une densité de dislocation entre  $10^5$  et  $10^{12} \text{ cm}^{-2}$ , ainsi en utilisant la section du matériau (en  $\text{cm}^2$ ), on obtient une approximation de l'énergie totale des dislocations et ainsi une entropie initiale dans nos cas qui est d'environ :

$$E_d \sim \mu_c b_u^2 \Rightarrow E_{dtot} \sim \rho_d \mu_c b_u^2 \Rightarrow \Pi_0 = \frac{E_{dtot}}{T} \sim \sqrt{10} \text{ [J/m}^{-3}\text{K]} \quad (2.125)$$

En effectuant un développement limité ( $\text{FFE} \gg \sqrt{10}$ ), l'endommagement initial ressemble fortement à l'équation utilisée par Naderi et Khonsari [2010a], ce qui permet à partir des

relations précédentes d'estimer le paramètre d'endommagement initial avec  $x_0$  connu et non plus l'approximation  $x_0 \approx x_{0+\varepsilon}$  :

$$D_0 = \frac{-\Pi_0}{\text{FFE}} \left( \frac{1}{\ln x_{f-\varepsilon}} \right) \quad (2.126)$$

En résumé, l'endommagement initial peut être estimé à partir d'une bonne connaissance de l'entropie initiale équation **2.125** puis une loi logarithmique équation **2.126**. Sinon, il est possible d'utiliser un nombre de sollicitation très proche de 0 et de considérer un endommagement identique à  $N_0$  et à  $N_{0+\varepsilon}$ .

Plusieurs endommagements sont calculés à partir des relations précédentes.

*Cas 1* :  $D_0$  utilisant l'équation **2.120** (en remplaçant  $\Pi_c$  par  $\Pi_0$ )

– a)  $\Pi_0$  donné par l'équation **2.125**

– b) Avec  $\ln \left( 1 - \frac{\Pi_0}{\text{FFE}} \right) = \ln x_{0+\varepsilon}$

*Cas 2* :  $D_0$  utilisant l'équation **2.126**, avec  $\Pi_0$  donné par l'équation **2.125**

*Cas 3* :  $D_0$  utilisant l'équation **2.124**

*Cas 4* :  $D_{c1}$  et  $D_{c2}$  utilisant l'équation **2.120** avec  $\ln \left( 1 - \frac{\Pi_{c1}}{\text{FFE}} \right) = \ln x_1$  et  $\ln \left( 1 - \frac{\Pi_{c2}}{\text{FFE}} \right) = \ln x_2$

*Cas 5* :  $D_{c1}$  et  $D_{c2}$  utilisant l'équation **2.124**

Finalement, les endommagements critiques sont estimés à partir de l'équation **2.124**, les résultats pouvant ainsi être comparés avec les valeurs obtenues par l'équation **2.120** provenant de la littérature. Les résultats présentés de la figure **2.49** jusque figure **2.51** montrent une surestimation de notre modèle en comparaison avec celui de **Naderi et Khonsari [2010a]**.

Mais, la théorie mise en œuvre précédemment permet de suivre les différentes phases de fatigue dans lequel se trouve le matériau. Cependant, l'endommagement critique en première phase (phase de montée en température) est très faible  $D_{c1} \approx 10^{-2}$ , par conséquent, lorsque l'on ne cherche pas à étudier cette transition de phase, le modèle de **Naderi et Khonsari [2010a]** utilisant un seul endommagement critique ( $D_{c2}$ ) reste suffisant (à noter, qu'un endommagement critique se basant sur des critères de localisation d'endommagement et de microendommagement est trouvé proche de cette valeur par **Bai et al. [2000]**, **Yilong et al. [2002]**, pour des phénomènes rapides, ce qui pourrait peut être indiquer une fusion des deux phases).

L'observation des résultats de l'endommagement dégage une tendance globale d'évolution. En effet, l'évolution logarithmique de l'endommagement permet la prédiction de la rupture en fatigue pour les deux matériaux étudiés pour des sollicitations variées en fréquence et amplitude de chargement impliquant une faible variabilité de comportement de l'endommagement.

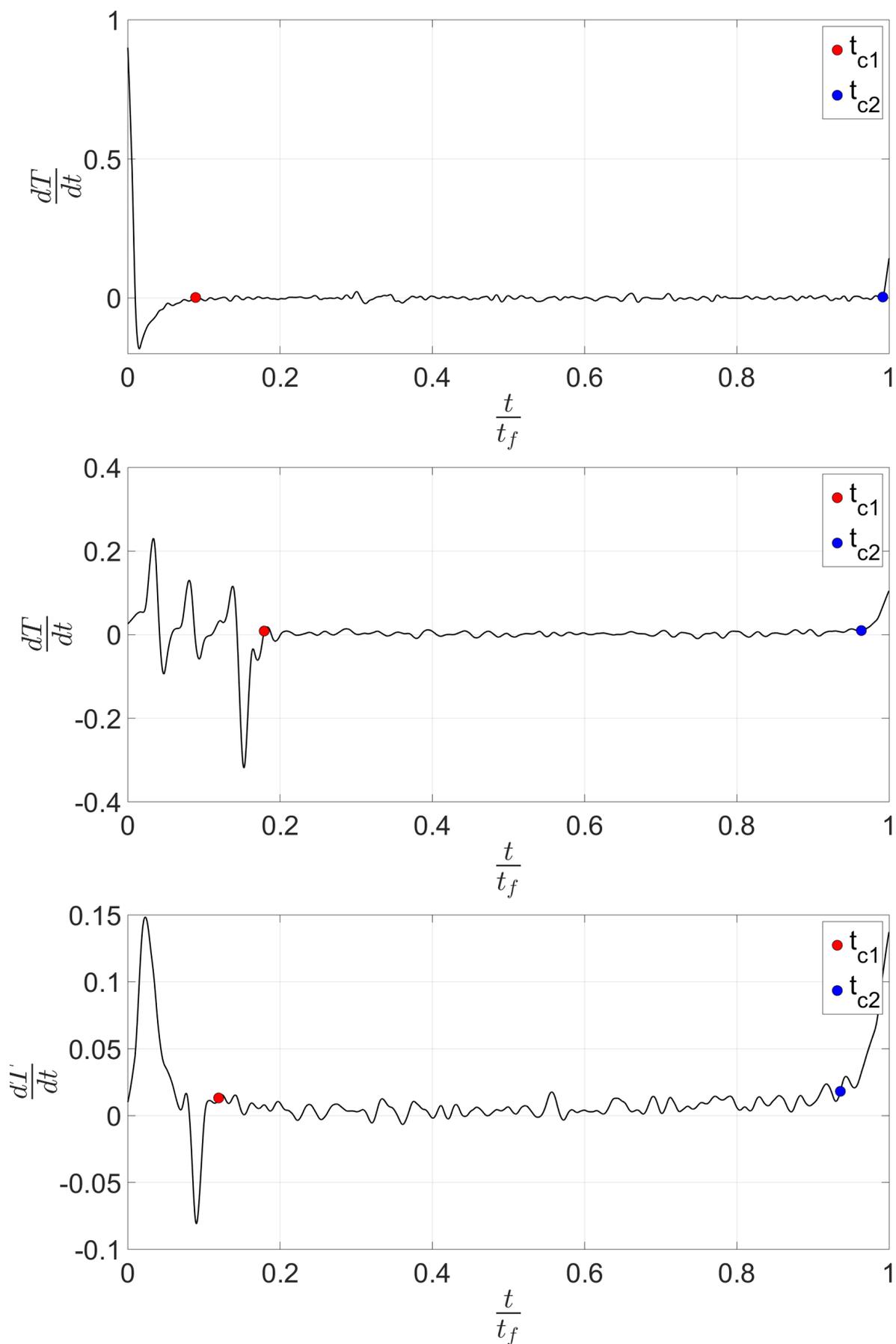


FIGURE 2.47 – Détermination des temps critiques d'endommagement pour l'Al 2024 à 11.5 kN et pour le S-235 à 12 et 13 kN (5 Hz)

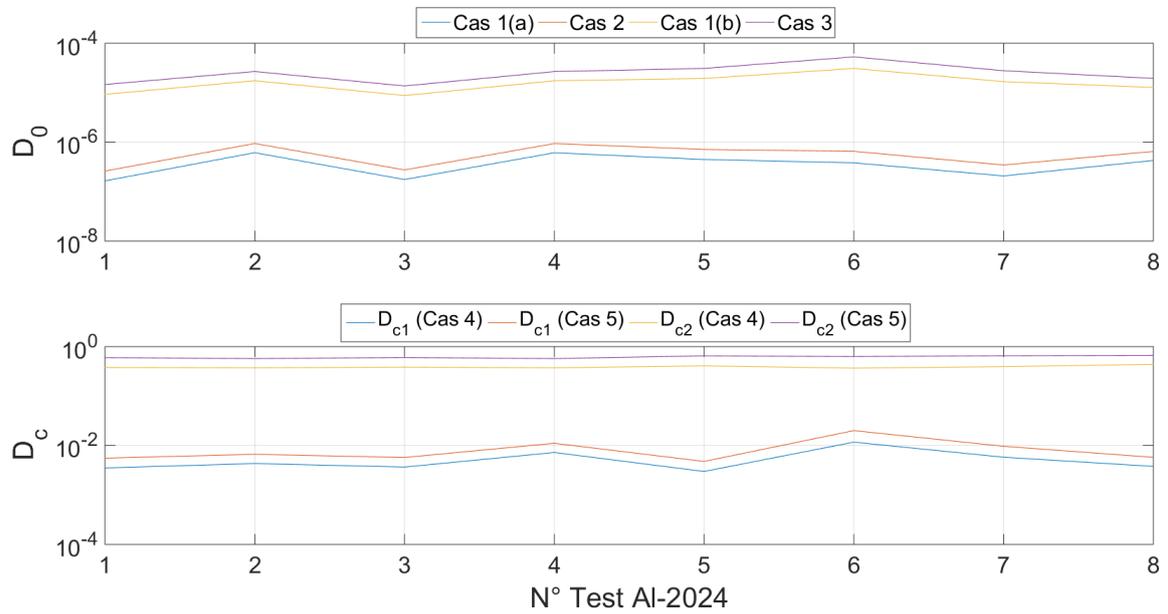


FIGURE 2.48 – Évolution des endommagements critiques en fonction des tests de l'AI-2024

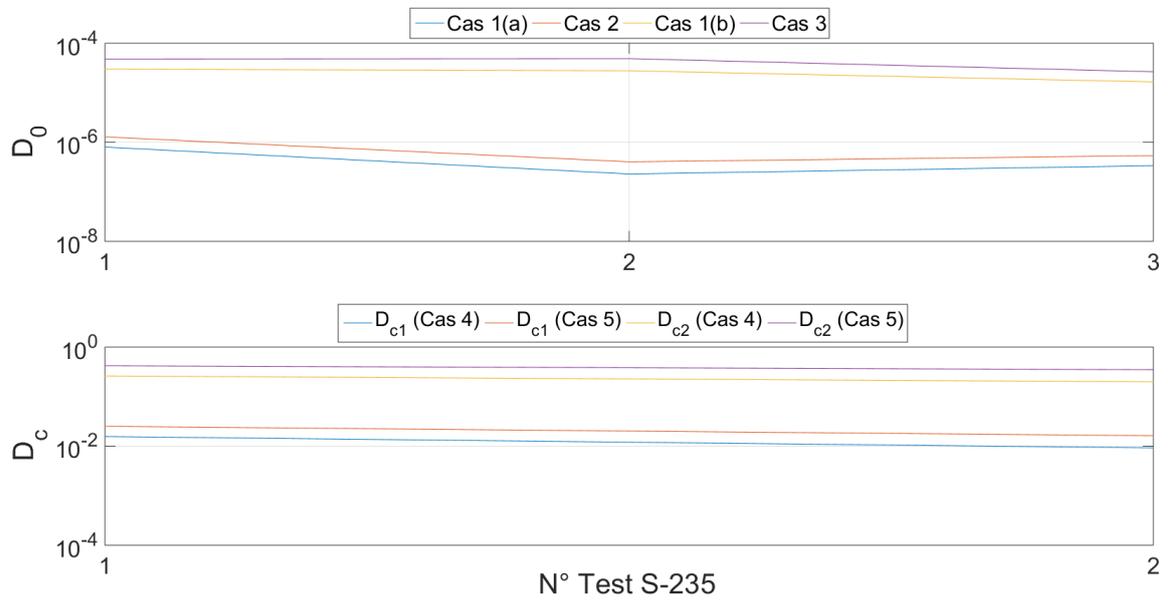


FIGURE 2.49 – Évolution des endommagements critiques en fonction des tests du S-235

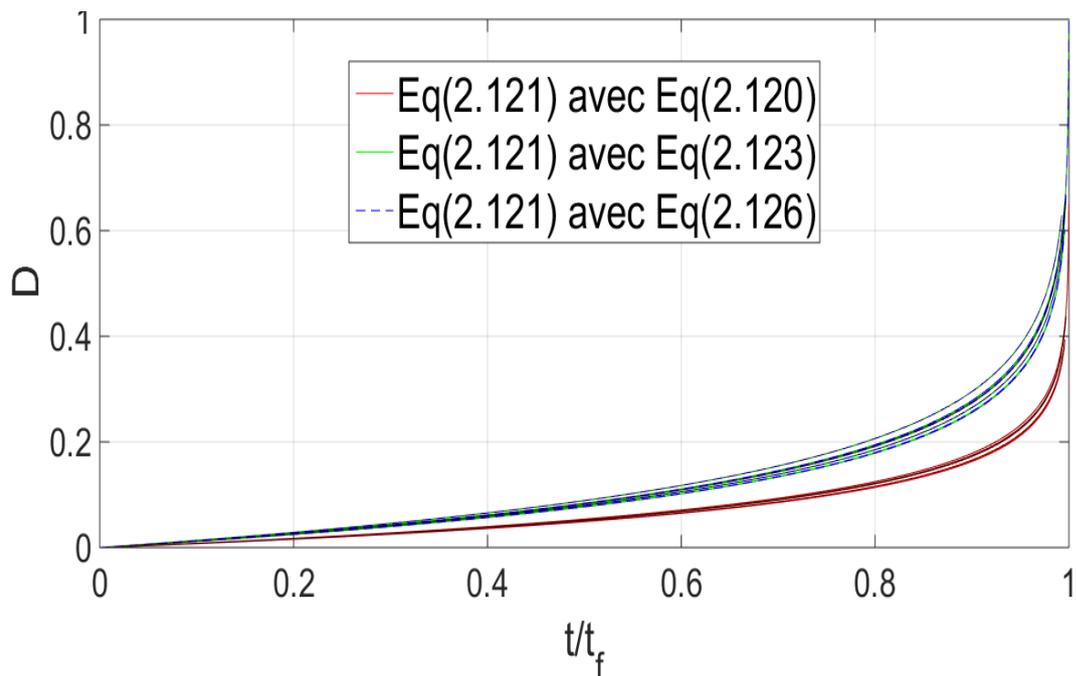


FIGURE 2.50 – Variation de l'endommagement en fonction de la durée de vie pour chaque test de l'Al-2024

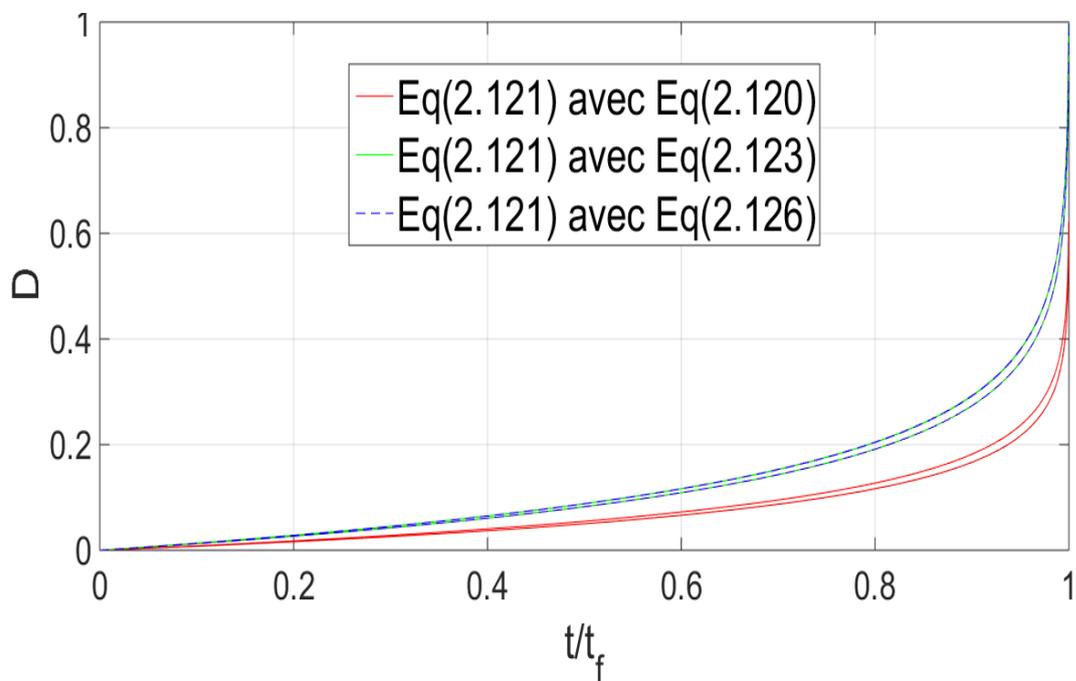


FIGURE 2.51 – Variation de l'endommagement en fonction de la durée de vie pour chaque test du S-235

## 2.6 Étude des modèles d'estimation empiriques

Après l'obtention des résultats expérimentaux, on décide de se concentrer sur les deux modèles empiriques, plus précisément sur l'imprécision du modèle de Park et Nelson puis sur la possibilité du modèle de Ramberg Osgood cyclique à estimer l'entropie de rupture et être utilisé comme modèle numérique.

### 2.6.1 Sur l'imprécision du modèle de Park et Nelson

L'origine de l'imprécision du modèle vient dans un premier temps du fait que le modèle est habituellement utilisé pour remonter à un nombre de cycles à rupture, et que l'influence de la contrainte moyenne est prise en compte uniquement dans l'énergie de déformation élastique cyclique. D'autre part au vu des résultats expérimentaux, l'imprécision peut aussi venir du fait que l'estimation des propriétés en fatigue n'est pas très fiable [Fatemi et al., 2005, Lipski et Mroziński, 2012]. En effet, Meggiolaro et Castro [2004] observent pour un ensemble de matériaux une grande variabilité des propriétés en fatigue pour une même famille de matériaux. De fait, pour les alliages d'aluminium, un coefficient de variation C (rapport de l'écart type sur la moyenne) est calculé et montre la forte dispersion du coefficient de ductilité en fatigue ( $C_{\epsilon'_f} = 179\%$ ), puis des dispersions plus légères pour les autres propriétés en fatigue ( $C_{\sigma'_f} = 24\%$ ,  $C_b = 28\%$  et  $C_c = 33\%$ ). L'observation est identique dans le cas des aciers ( $C_{\epsilon'_f} = 157\%$ ,  $C_{\sigma'_f} = 43\%$ ,  $C_b = 40\%$  et  $C_c = 28\%$ ).

En reprenant les équations de base de la fatigue oligocyclique, on peut remonter au modèle énergétique de Park et Nelson :

$$\sigma_a = \frac{\Delta\sigma}{2} = \sigma'_f N_f^b \quad \epsilon_a = \frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} N_f^b + \epsilon'_f N_f^c \quad \sigma_a \epsilon_a = \frac{\sigma'^2_f}{E} N_f^{2b} + \sigma'_f \epsilon'_f N_f^{b+c} \quad (2.127)$$

L'erreur commise en déterminant les propriétés en fatigue (on associe une erreur multiplicative à chaque coefficient  $\xi_{\sigma'_f}$ ,  $\xi_{\epsilon'_f}$ , et additive à chaque exposant  $\xi_b$  et  $\xi_c$ ) agit directement sur les énergies de déformation cyclique calculées par le modèle :

$$(\sigma_a \epsilon_a)_{err} = \frac{(\xi_{\sigma'_f} \sigma'_f)^2}{E} N_f^{2(b+\xi_b)} + (\xi_{\sigma'_f} \sigma'_f) (\xi_{\epsilon'_f} \epsilon'_f) N_f^{(b+\xi_b)+(c+\xi_c)} \quad (2.128)$$

$$(\sigma_a \epsilon_a) - (\sigma_a \epsilon_a)_{err} = \underbrace{\frac{\sigma'^2_f}{E} N_f^{2b} (1 - \xi_{\sigma'_f}^2 N_f^{2\xi_b})}_{\text{Partie élastique}} + \underbrace{\sigma'_f \epsilon'_f N_f^{b+c} (1 - \xi_{\sigma'_f} \xi_{\epsilon'_f} N_f^{\xi_b + \xi_c})}_{\text{Partie plastique}} \quad (2.129)$$

Dans notre cas, restreint à la fatigue oligocyclique, on peut considérer comme négligeable la partie élastique de la puissance de déformation devant la puissance de déformation plastique si bien que l'on peut exprimer une erreur relative :

$$\frac{(\sigma_a \epsilon_a) - (\sigma_a \epsilon_a)_{err}}{(\sigma_a \epsilon_a)} = (1 - \xi_{\sigma'_f} \xi_{\epsilon'_f} N_f^{\xi_b + \xi_c}) \quad (2.130)$$

De fait, dans le contexte du modèle de Park et Nelson [2000], on peut écrire finalement l'erreur relative sur le travail de déformation plastique cyclique :

$$W_p = 2^{2+b+c} \sigma'_f \epsilon'_f \left( \frac{c-b}{c+b} \right) N_f^{b+c} \quad (2.131)$$

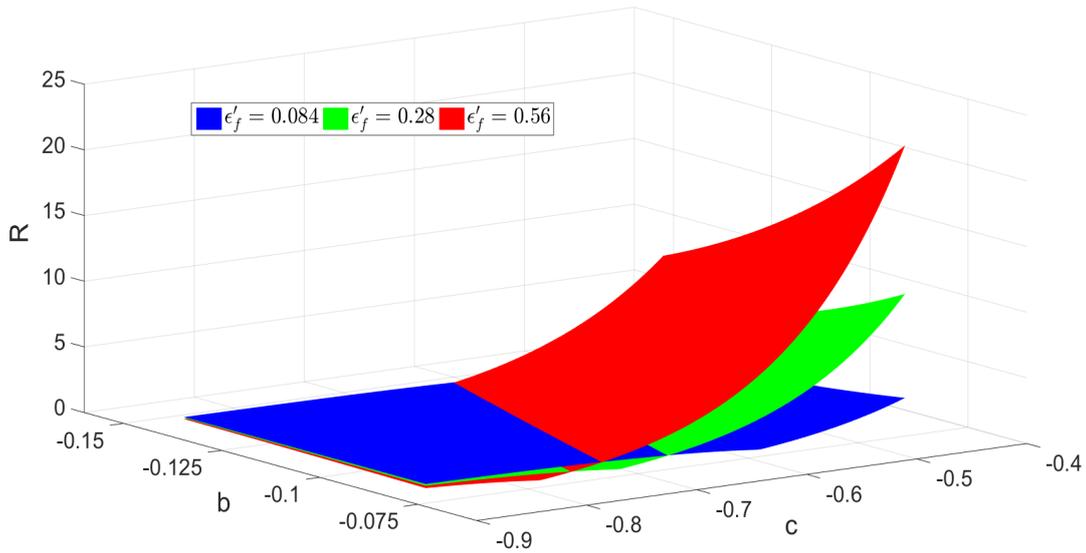


FIGURE 2.52 – Évolution de l'erreur relative  $R$  (équation 2.133) commise sur l'estimation du travail de déformation plastique en fonction des incertitudes sur les paramètres en fatigue (en utilisant équation 2.19 avec  $\epsilon'_f \pm 100\%$ ,  $b \pm 28\%$  et  $c \pm 33\%$ ) pour l'aluminium Al-2024 en considérant un nombre de cycles à rupture de  $\approx 10000$

$$W_{p_{err}} = 2^{2+(b+\xi_b)+(c+\xi_c)} (\xi_{\sigma'_f} \sigma'_f) (\xi_{\epsilon'_f} \epsilon'_f) \left( \frac{(c + \xi_c) - (b + \xi_b)}{(c + \xi_c) + (b + \xi_b)} \right) N_f^{(b+\xi_b)+(c+\xi_c)} \quad (2.132)$$

$$R = \frac{W_p - W_{p_{err}}}{W_p} = \left( 1 - 2^{\xi_b + \xi_c} \xi_{\sigma'_f} \xi_{\epsilon'_f} \left( \frac{c^2 - b^2 + (\xi_c - \xi_b)(b + c)}{c^2 - b^2 + (c - b)(\xi_b + \xi_c)} \right) N_f^{\xi_b + \xi_c} \right) \quad (2.133)$$

Le coefficient de résistance à la fatigue est généralement assez bien estimé par les modèles existants des coefficients en fatigue, par contre le coefficient de ductilité d'une part et les deux exposants en fatigue d'autre part peuvent être assez mal estimés. On peut ainsi observer une forte croissance de l'erreur lorsque l'on estime le travail plastique (exemples en figure 2.52 et figure 2.53), pouvant donner un travail plastique supérieur à celui attendu d'un à plusieurs ordres de grandeur. Ainsi en plus d'une différence certaine entre la prédiction annoncée par le modèle de Park et Nelson et la physique du phénomène, une erreur peut se superposer à travers une mauvaise estimation des paramètres en fatigue du matériau étudié.

## 2.6.2 Sur le modèle de Ramberg-Osgood cyclique

Suite aux résultats sur la FFE, il est possible d'estimer numériquement l'évolution de la température à partir de l'équation de la chaleur. En effet, en considérant le terme de puissance de déformation plastique comme un terme source lié au modèle de Ramberg Osgood cyclique (on multiplier le terme source ( $\Gamma$ ) par la fréquence de sollicitation ( $f$ ) pour convertir une énergie cyclique en puissance), le problème physique est donné par l'équation :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\Gamma}{\rho C} \quad \Gamma = \left[ \frac{2f \sigma^{1+(1/n')}}{(2K')^{1/n'}} \right] \quad (2.134)$$

Avec  $\chi$ , la diffusivité thermique du matériau et,  $\rho$  et  $C$  masse volumique et capacité calorifique respectivement. Ce problème que l'on appellera problème général peut être résolu par séparation de variables <sup>18</sup>. On résout ainsi dans un premier temps le problème stationnaire

<sup>18</sup>. Lorsque le problème présente des singularités, le problème est plus difficile à résoudre et nécessite certaines transformations [Laraqi et Monier-Vinard, 2013]

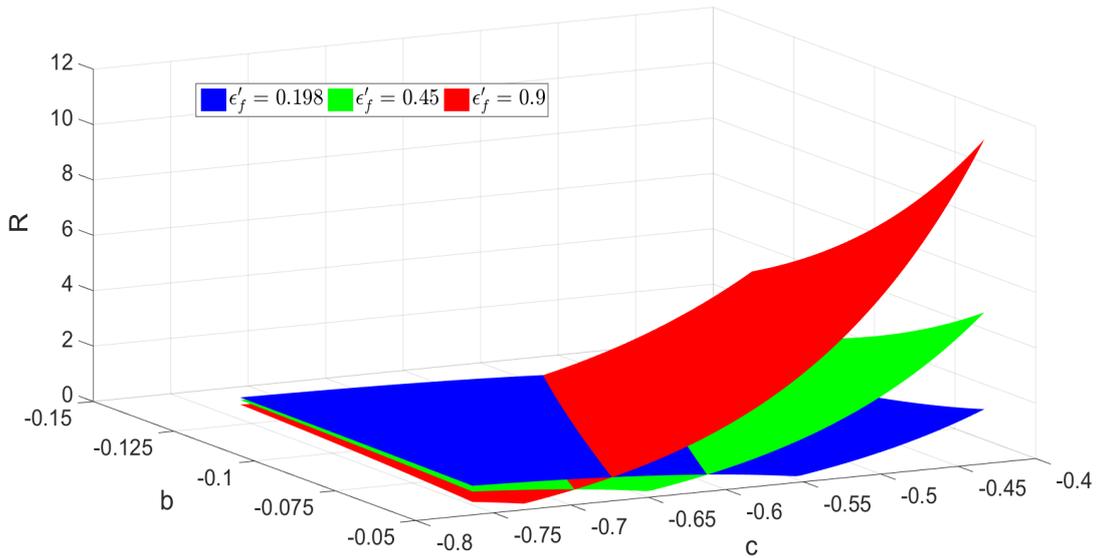


FIGURE 2.53 – Évolution de l'erreur relative  $R$  (équation 2.133) commise sur l'estimation du travail de déformation plastique en fonction des incertitudes sur les paramètres en fatigue (en utilisant équation 2.18 avec  $\epsilon'_f \pm 100\%$ ,  $b \pm 40\%$  et  $c \pm 28\%$ ) pour l'acier S235 en considérant un nombre de cycles à rupture de  $\approx 3500$

avec le terme source (la source est homogène et indépendante du temps, les conditions aux limites sont de première espèce car les mors agissent comme des puits de chaleur) puis on résout le problème instationnaire (avec des conditions aux limites homogènes et une condition initiale étant la condition initiale du problème original diminué du profil de température obtenu en régime stationnaire). Les fonctions propres  $X(\beta_m, x)$ , valeurs propres  $\beta_m$  et la normalisation intégrale  $N(\beta_m)$  provenant du problème aux valeurs propres associé au problème instationnaire sont données par :

$$X(\beta_m, x) = \sin(\beta_m x) \quad \beta_m = \frac{m\pi}{L} \quad (\sin(\beta_m L) = 0) \quad N(\beta_m) = L/2 \quad (2.135)$$

Avec  $L$  la longueur de l'échantillon. La solution du problème général s'écrit comme la somme des deux solutions précédentes [Özişik, 1993] :

$$T(x, t) = T_0 + \frac{\Gamma}{2k} (Lx - x^2) + \left( \frac{\Gamma}{kL} \right) \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\chi \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 t} \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \left[ \frac{2 \cos(m\pi) - 2}{\left( \frac{m\pi}{L} \right)^3} \right] \quad (2.136)$$

Cette solution analytique permet une convergence rapide de la somme infinie. Une autre méthode est de calculer la solution par des méthodes numériques. De fait, en utilisant un schéma aux différences finies, on peut obtenir une solution du problème en fonction du temps. Très simplement, un schéma d'ordre 2 centré est utilisé pour l'espace, un schéma d'Euler explicite est utilisé pour le temps :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T^{i+1,n} - T^{i,n}}{\Delta t} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T^{i,n+1} - 2T^{i,n} + T^{i,n-1}}{(\Delta x)^2} \quad (2.137)$$

$\Delta t$  et  $\Delta x$  correspondent aux discrétisations temporelles et spatiales. Pour la température,  $i$  représente la discrétisation en temps et  $n$  la discrétisation en espace. En introduisant le nombre de Fourier numérique  $Fo = \chi \Delta t / (\Delta x)^2$ , on obtient :

$$T^{i+1,n} = T^{i,n} + Fo \left( T^{i,n+1} - 2T^{i,n} + T^{i,n-1} \right) + \frac{\Delta t}{\rho C} \left[ \frac{2f\sigma^{1+(1/n')}}{(2K')^{1/n'}} \right] \quad (2.138)$$

La condition de stabilité du schéma explicite en temps nécessite un nombre de Fourier respectant la condition CFL (Courant, Friedrichs, Lewy) qui est  $Fo \leq 0,5$ . La condition initiale en température et les conditions aux limites en température (sur la longueur de l'éprouvette) sont prises égales à  $18,5^{\circ}\text{C}$ . Les propriétés en fatigue sont prises en moyennant l'équation 2.15 et l'équation 2.18 pour le S-235 et l'équation 2.16 et l'équation 2.19 pour l'Al 2024. Le modèle paraît prédire de façon assez proche l'élévation de température obtenue expérimentalement pour les deux matériaux (voir figure 2.54 et figure 2.55). Pour affiner la précision, on peut utiliser un modèle bidimensionnel. Le modèle unidimensionnel correspondant à un modèle bidimensionnel où le matériau est isolé thermiquement suivant la largeur.

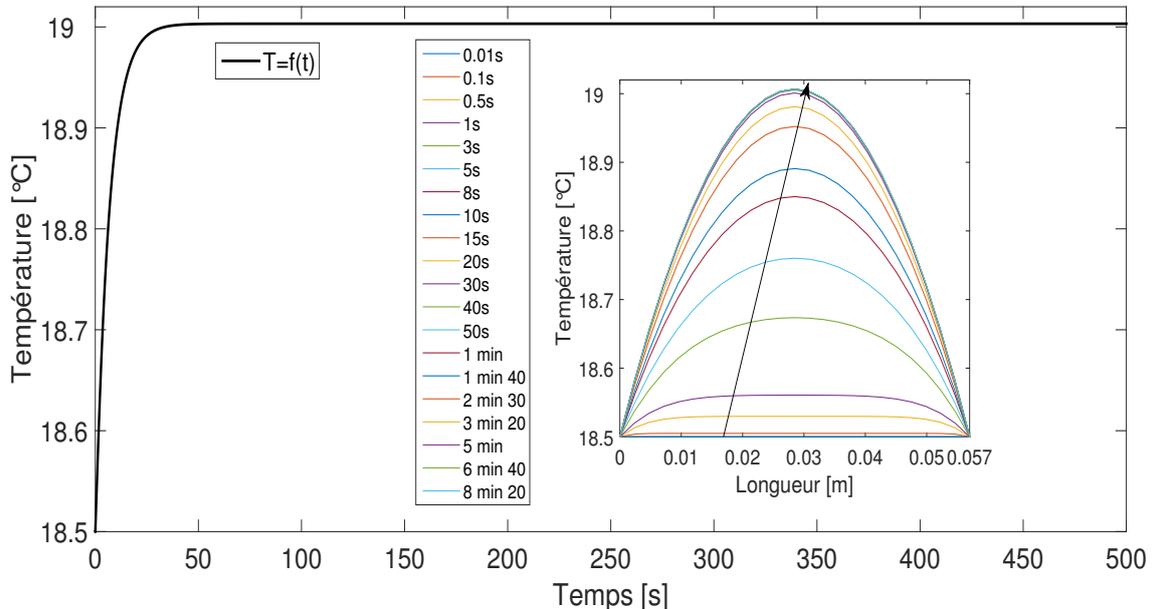


FIGURE 2.54 – Modèle 1D de l'évolution de la température en fonction du temps et profils de température en considérant le modèle R-O comme terme source pour l'AL-2024

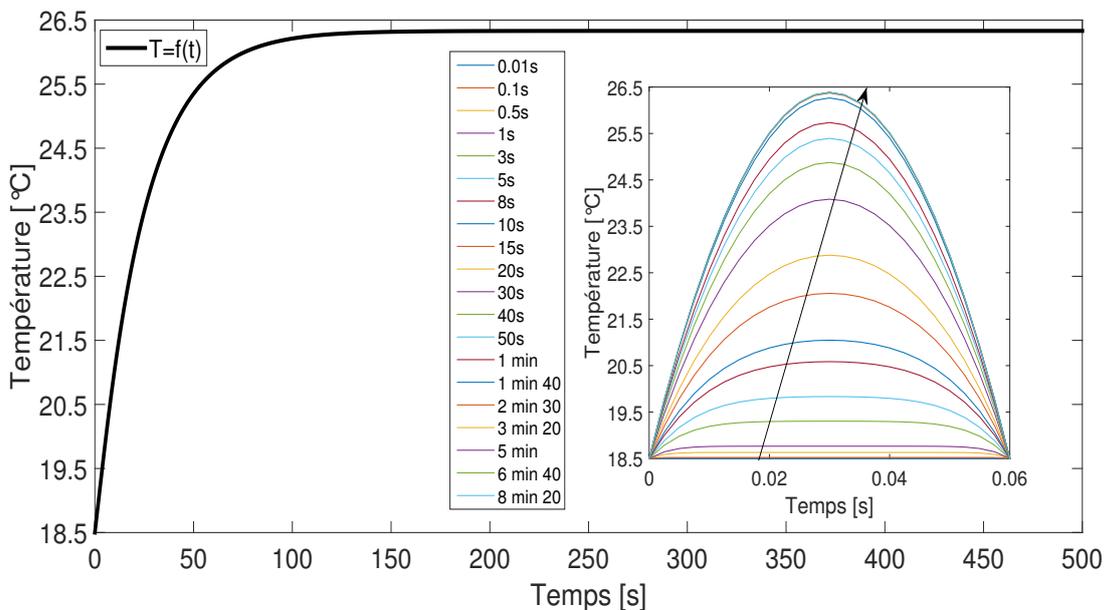


FIGURE 2.55 – Modèle 1D de l'évolution de la température en fonction du temps et profils de température en considérant le modèle R-O comme terme source pour le S-235

Dans le cas bidimensionnel, on ajoute une discrétisation en espace ( $\Delta t$ ,  $\Delta x$  et  $\Delta y$ ). Pour la température,  $i$  représente la discrétisation en temps,  $n$  la discrétisation suivant la longueur de l'éprouvette et  $k$  la discrétisation suivant la largeur de l'éprouvette. Dans le cas

d'un maillage homogène ( $\Delta x = \Delta y$ ), la condition CFL implique une stabilité pour  $Fo \leq 1/4$ . Dans notre cas, on utilisera un maillage non homogène, ce qui impliquera deux nombres de Fourier numérique différents :  $Fo_x = \chi \Delta t / (\Delta x)^2$  pour la longueur et  $Fo_y = \chi \Delta t / (\Delta y)^2$  pour la largeur (la condition CFL dans notre cas étant  $Fo_x \leq 1/2$  et  $Fo_y \leq 1/2$ ). On ajoute par conséquent une différence centrée suivant la longueur :

$$T^{i+1,n,k} = T^{i,n,k} + Fo_x (T^{i,n+1,k} - 2T^{i,n,k} + T^{i,n-1,k}) + Fo_y (T^{i,n,k+1} - 2T^{i,n,k} + T^{i,n,k-1}) + \frac{\Delta t}{\rho C} \left[ \frac{2f\sigma^{1+(1/n')}}{(2K')^{1/n'}} \right] \quad (2.139)$$

De plus, on utilisera des conditions aux limites de type Neumann suivant la largeur de l'éprouvette avec un coefficient de convection  $h_G = 10 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$  (voir figure 2.56 et figure 2.57) :

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} = h_G (T - T_0) \quad \text{en } y=0 \text{ et en } y=l \quad (2.140)$$

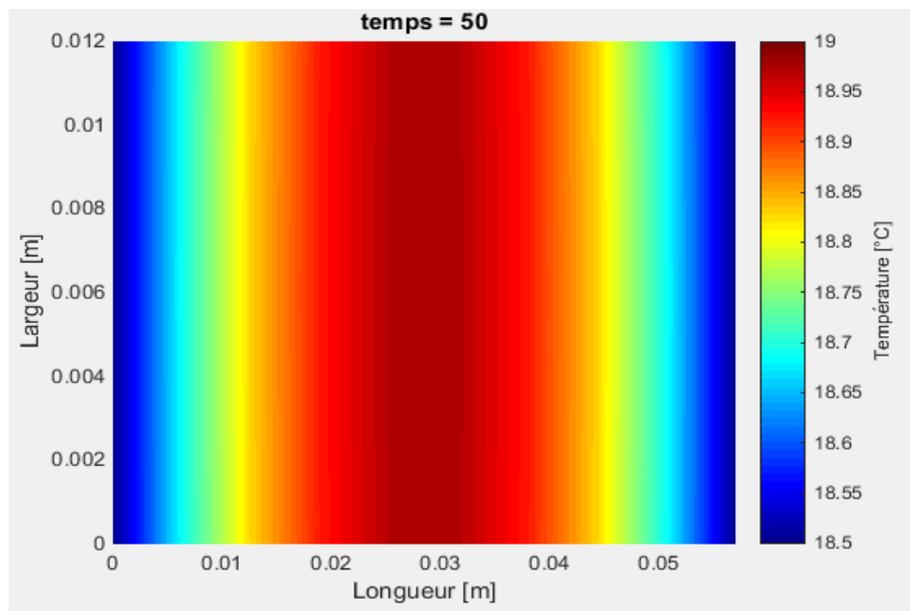


FIGURE 2.56 – Modèle 2D de l'évolution de la température en fonction du temps, le modèle R-O étant pris comme terme source. Cas de l'Al-2024 avec condition aux limites de type Dirichlet suivant la longueur ( $T = 18,5^\circ \text{C}$ ) et de type Neumann suivant la largeur ( $h_G = 10 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$  et  $T_0 = 15^\circ \text{C}$ ). Données :  $Fo_x = 0,062007$ ,  $Fo_y = 0,27635$ ,  $t = 50 \text{ s}$ .

Le modèle de Ramberg-Osgood cyclique utilisé jusqu'ici se base uniquement sur l'amplitude de contrainte pour remonter à la déformation plastique cyclique. On souhaite maintenant prendre en compte les oscillations du chargement en fatigue, en conséquence, on utilisera un modèle de plasticité cyclique tel que :

$$\frac{\Delta \epsilon_p}{2} = \left( \frac{\left( \frac{\Delta \sigma}{2} \right) \sin(2\pi f t)}{K'} \right)^{1/n'} \quad (2.141)$$

Dans notre cas, le rapport de contrainte utilisé dans nos expériences est  $R_\sigma = 0$  (traction-traction) ainsi :

$$\sigma = \sigma_{max} |\sin(2\pi f t)| \quad \epsilon_p = 2 \left( \frac{\sigma_{max} |\sin(2\pi f t)|}{2K'} \right)^{1/n'} \quad (2.142)$$

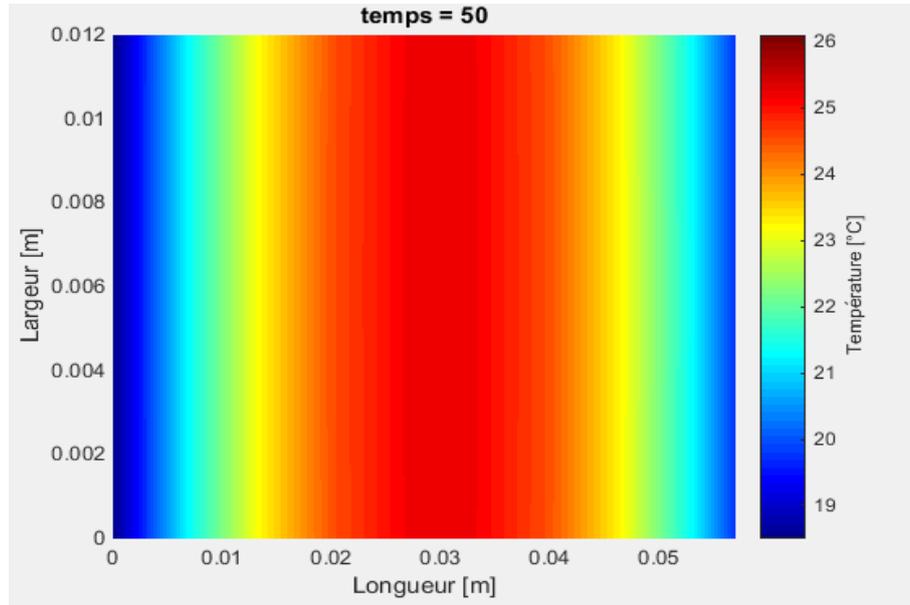


FIGURE 2.57 – Modèle 2D de l'évolution de la température en fonction du temps, le modèle R-O étant pris comme terme source. Cas du S-235 avec condition aux limites de type Dirichlet suivant la longueur ( $T = 18,5^{\circ}\text{C}$ ) et de type Neumann suivant la largeur ( $h_G = 10 \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-1}$  et  $T_0 = 15^{\circ}\text{C}$ ). Données :  $Fo_x = 0,086538$ ,  $Fo_y = 0,42735$ ,  $t = 50 \text{ s}$ .

Puisque l'on utilise la fonction valeur absolue pour simuler les contraintes répétées de traction, on veillera à diviser la fréquence utilisée dans ce modèle par deux pour pouvoir comparer les résultats à l'expérience (car la fréquence de sollicitation est artificiellement doublée).

$$\dot{\varepsilon}_p = 2^{1-(1/n')} \left( \frac{\sigma_{max}}{K'} \right)^{1/n'} (2\pi f) \cos(2\pi f t) \text{sign}(\sin(2\pi f t)) \frac{1}{n'} |\sin(2\pi f t)|^{(1/n')-1} \quad (2.143)$$

$$\sigma : \dot{\varepsilon}_p = 2^{1-(1/n')} \sigma_{max} \left( \frac{\sigma_{max}}{K'} \right)^{1/n'} (2\pi f) \cos(2\pi f t) \text{sign}(\sin(2\pi f t)) \frac{1}{n'} |\sin(2\pi f t)|^{(1/n')} \quad (2.144)$$

Dans le cas où  $\sigma = \sigma_{max} |\cos(2\pi f t)|$ , on a :

$$\sigma : \dot{\varepsilon}_p = 2^{1-(1/n')} \sigma_{max} \left( \frac{\sigma_{max}}{K'} \right)^{1/n'} (-2\pi f) \sin(2\pi f t) \text{sign}(\cos(2\pi f t)) \frac{1}{n'} |\cos(2\pi f t)|^{(1/n')} \quad (2.145)$$

Dans le cadre des différences finies présentées précédemment, on utilisera un modèle 1D où le terme source devient :

$$T^{i+1,n} = T^{i,n} + Fo \left( T^{i,n+1} - 2T^{i,n} + T^{i,n-1} \right) + \frac{\Delta t}{\rho C} \sigma : \dot{\varepsilon}_p \quad (2.146)$$

L'entropie de rupture étant estimée par :

$$\text{FFE} = \int_t \frac{\sigma : \dot{\varepsilon}_p}{T} dt = \frac{1}{T} \left[ 2^{1-(1/n')} \left( \frac{\sigma_{max}}{K'} \right)^{1/n'} \frac{2\pi f \sigma_{max}}{n'} \right] \int_t \cos(2\pi f t) \text{sign}(\sin(2\pi f t)) |\sin(2\pi f t)|^{1/n'} dt \quad (2.147)$$

Les résultats obtenus sont de très mauvaise qualité, en effet, la température obtenue n'augmente que de quelques centièmes de degrés (voir figure 2.58) et la FFE obtenue est proche de 0.

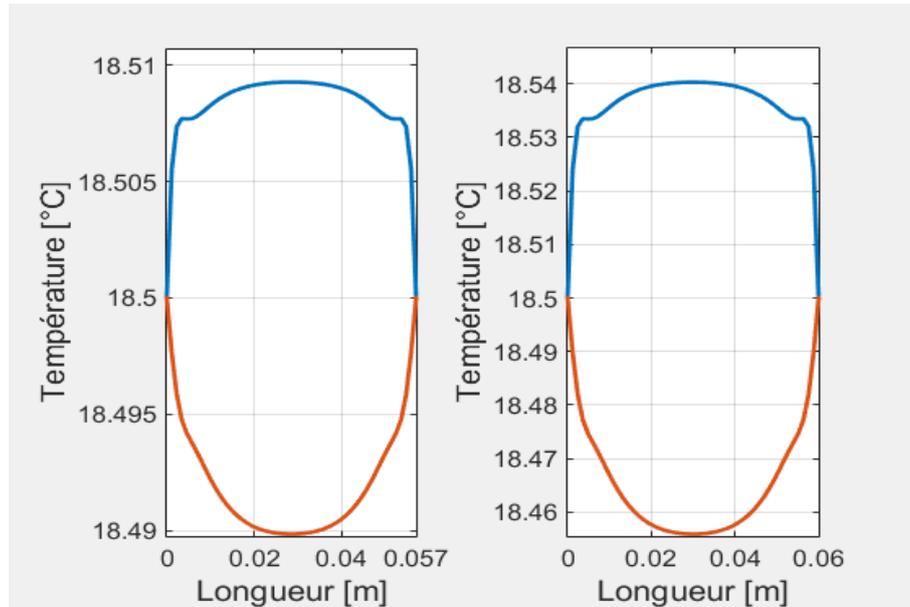


FIGURE 2.58 – Profil de température à un instant  $t$  avec le modèle R-O sinusoïdal comme terme source pour l'AL-2024(gauche) et le S-235(droite), en rouge : équation 2.144 et bleu : équation 2.145

Dans le modèle précédent, on ne considère pas à priori que la puissance de déformation plastique soit toujours dissipative. Pour ce faire, il est nécessaire d'utiliser  $|\sigma : \dot{\epsilon}_p|$  étant strictement positif, un terme source uniquement produisant de la chaleur (et de l'entropie). Par conséquent, on a :

$$|\sigma : \dot{\epsilon}_p| = \sigma |\dot{\epsilon}_p| = 2^{1-(1/n')} \left( \frac{(2\pi f)\sigma_{max}}{n'} \right) \left( \frac{\sigma_{max}}{K'} \right)^{1/n'} |\cos(2\pi f t)| |\sin(2\pi f t)|^{(1/n')} \quad (2.148)$$

$$FFE = \int_t \frac{\sigma |\dot{\epsilon}_p|}{T} dt = \frac{1}{T} \left[ 2^{1-(1/n')} \left( \frac{\sigma_{max}}{K'} \right)^{1/n'} \frac{2\pi f \sigma_{max}}{n'} \right] \int_t |\cos(2\pi f t)| |\sin(2\pi f t)|^{1/n'} dt \quad (2.149)$$

Les résultats de ce modèle (figure 2.59 et figure 2.60) montrent une estimation raisonnable de la température obtenue expérimentalement (figure 2.33 et figure 2.34). Les FFE moyennes calculées à partir de ce modèle étant de  $1,86 \cdot 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$  pour l'Al-2024 et  $2,65 \cdot 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$  pour le S-235 (l'intégrale est estimée numériquement par méthode quadratique adaptative ; la température moyenne, la contrainte maximale et le temps à rupture sont tirés des résultats expérimentaux).

On peut vérifier ces résultats en utilisant le logiciel commercial Comsol utilisant la méthode BDF (méthode implicite) nécessitant peu d'éléments finis et un pas de temps de  $dt = 8 \cdot 10^{-4}$  secondes pour un modèle 1D. On peut simuler ensuite un modèle Comsol 3D, le coefficient d'échange global moyen étant fixé à  $h_G = 10 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$  (voir figure 2.61) traduisant les échanges globaux. L'utilisation d'un terme source dynamique est donc possible pour pouvoir estimer plus précisément l'entropie de rupture en fatigue et avoir l'évolution de la température en fonction du temps, néanmoins ce modèle ne permet pas de retranscrire le pic d'érouissage qui a lieu en début de test.

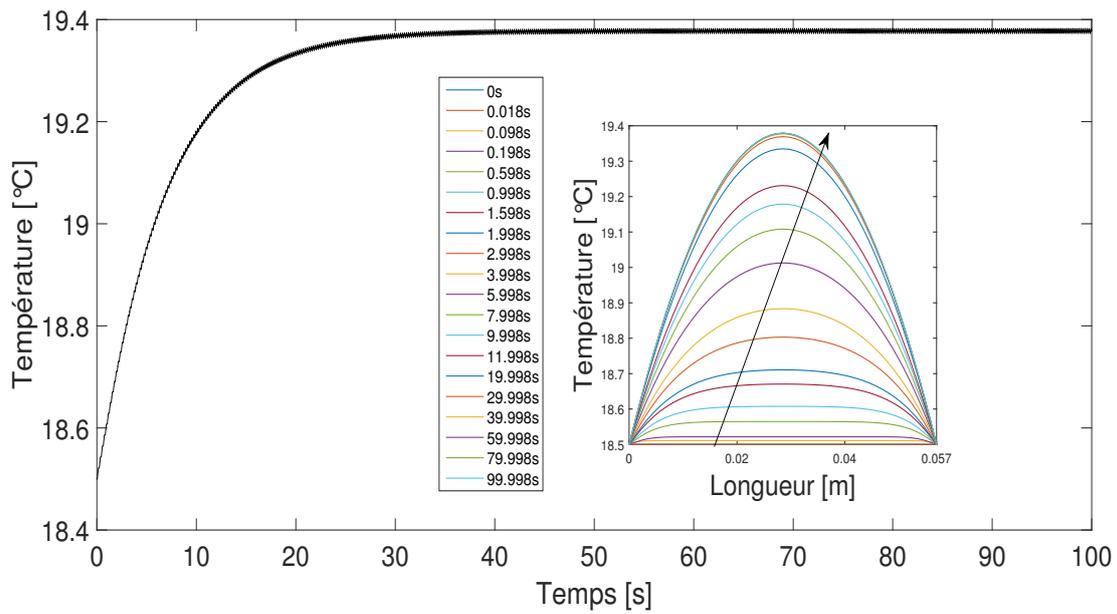


FIGURE 2.59 – Modèle 1D de l'évolution de la température en fonction du temps et profils de température en considérant le modèle R-O sinusoïdal absolument dissipatif (équation 2.148) comme terme source pour l'Al-2024

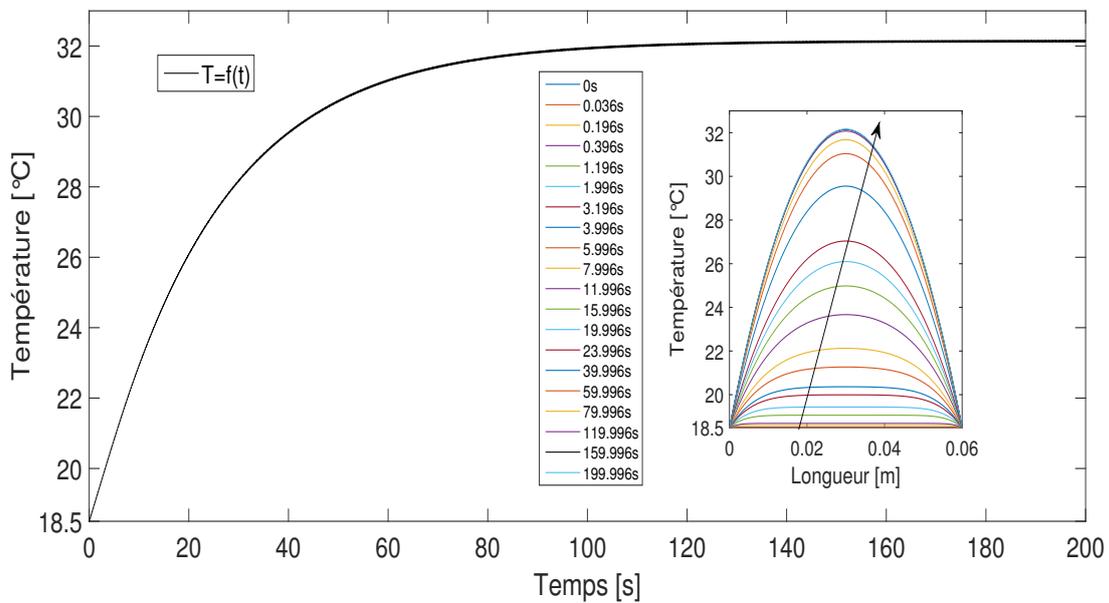


FIGURE 2.60 – Modèle 1D de l'évolution de la température en fonction du temps et profils de température en considérant un modèle R-O sinusoïdal absolument dissipatif (équation 2.148) comme terme source pour le S-235

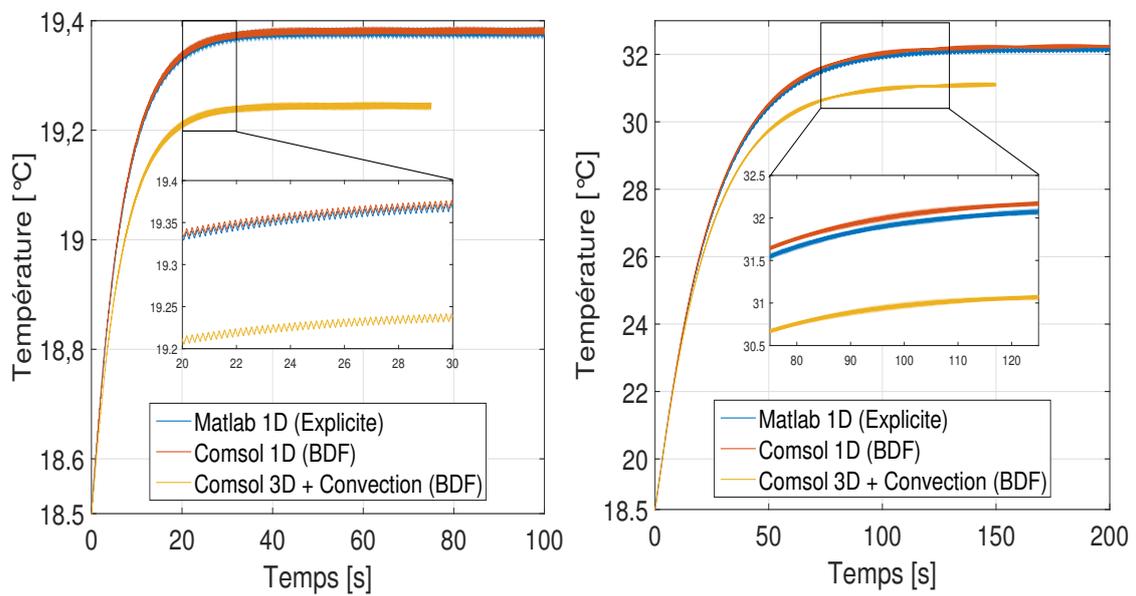


FIGURE 2.61 – Comparaison du modèle explicite précédent et des modèles implicites de Comsol pour l'Al-2024 (gauche) et le S-235 (droite) utilisant l'équation 2.148 comme terme source

## 2.7 Exergie en fatigue

L'étude thermodynamique de la fatigue était basée jusqu'ici uniquement sur les deux principes de la thermodynamique sans prendre en compte les effets de l'environnement sur le système. Une quantité thermodynamique est ainsi nécessaire si l'on souhaite étendre l'étude thermodynamique des systèmes soumis à la fatigue.

### 2.7.1 Exergie et notion de qualité

La notion de qualité est essentielle dans le domaine de la thermodynamique, en effet, du point de vue de la thermodynamique du premier principe, il est impossible de hiérarchiser les différentes énergies existantes. Le second principe permet lui de différencier les différentes énergies et notamment de rompre avec l'équivalence chaleur-travail. De ce fait, il est possible de créer un potentiel thermodynamique prenant en compte les effets de l'environnement, et permettant la traduction de toutes les énergies en une seule et même quantité équivalente mécanique, l'exergie. À l'origine, c'est l'équivalent chaleur (appelé désagrégation) qui était utilisé avec d'autres quantités maintenant inexistantes dans la thermodynamique classique moderne, mais qui tout de même menèrent au second principe [Pellegrino et al., 2015].

L'exergie naquit avec Gouy [1889] et son concept d'énergie utilisable qui fut ensuite repris par Stodola [1903] et Keenan [1951], puis dénommé finalement exergie par Rant [1956]. Cette notion thermodynamique regroupe en fait les deux principes, permettant de translater la création d'entropie, concept additif au bilan d'entropie, en destruction d'exergie, devenant ainsi une fraction de l'exergie totale. Cette notion étant définie comme la fraction mécanisable d'une énergie (les différentes énergies sont converties en équivalent mécanique) apparaît parfois comme une distance à l'équilibre d'un système, car elle prend en compte les effets de l'environnement sur le système. Cette notion montre un grand intérêt sociétal [Rosen, 2002a,b,c,d,e,f], et se répand, de par son efficacité, à de nombreux domaines à commencer par l'ingénierie dans l'étude du moteur Stirling [Li et al., 2016a,b, Popescu et al., 1996] (voir figure 2.63), dans l'analyse des systèmes énergétiques par exemple l'étude des machines trithermes, et dans les procédés de fabrication [Bilgen et Takahashi, 2002, Feidt, 2013, Feidt et Costea, 2012, Feidt, 2008, Grosu, 2014, Grosu et al., 2004, Hoque et al., 2015, Yumrutaş et al., 2002, Zheng et al., 2002].

On retrouve cette quantité physique dans divers domaines différents de sciences exactes [Delgado, 2008, Dincer et Cengel, 2001, Pishbin et al., 2015, Queiros-Condé et Feidt, 2008, Queiros-Condé et Feidt, 2010, Sorgüven et Özilgen, 2015, Wechsatoł et al., 2004] (figure 2.62 et figure 2.65) allant jusqu'aux sciences humaines [Abusoglu et Kanoğlu, 2009, Ayres, 1998, Ayres et al., 1998, Konchou et al., 2015, Tsatsaronis, 2008], en passant notamment par le développement durable et les énergies renouvelables [Dincer et Rosen, 2013, Queiros-Condé et al., 2011] (figure 2.64). C'est à partir de sa nature concrète et de son histoire [Sciubba et Wall, 2007] que la notion d'exergie est à l'origine d'autres concepts proches.

L'essergie est considérée ainsi comme un potentiel mesurant la distance à l'équilibre basée sur la physique statistique, que l'on peut aussi appeler essergie attendue (de par son aspect statistique) ou encore fonction de Kullback. Il apparaît comme un symétrique de l'exergie en incorporant réaction chimique à partir de la physique statistique et qui peut être lié à l'énergie libre [Evans, 1980]. L'emergie quant à elle se concentre sur la composante des différents types d'énergies et la notion de qualité, très utilisé dans le contexte thermoéconomique [Baral et al., 2016, Iribarren et al., 2014], mais restant différente de l'analyse exergétique [Sciubba, 2010].

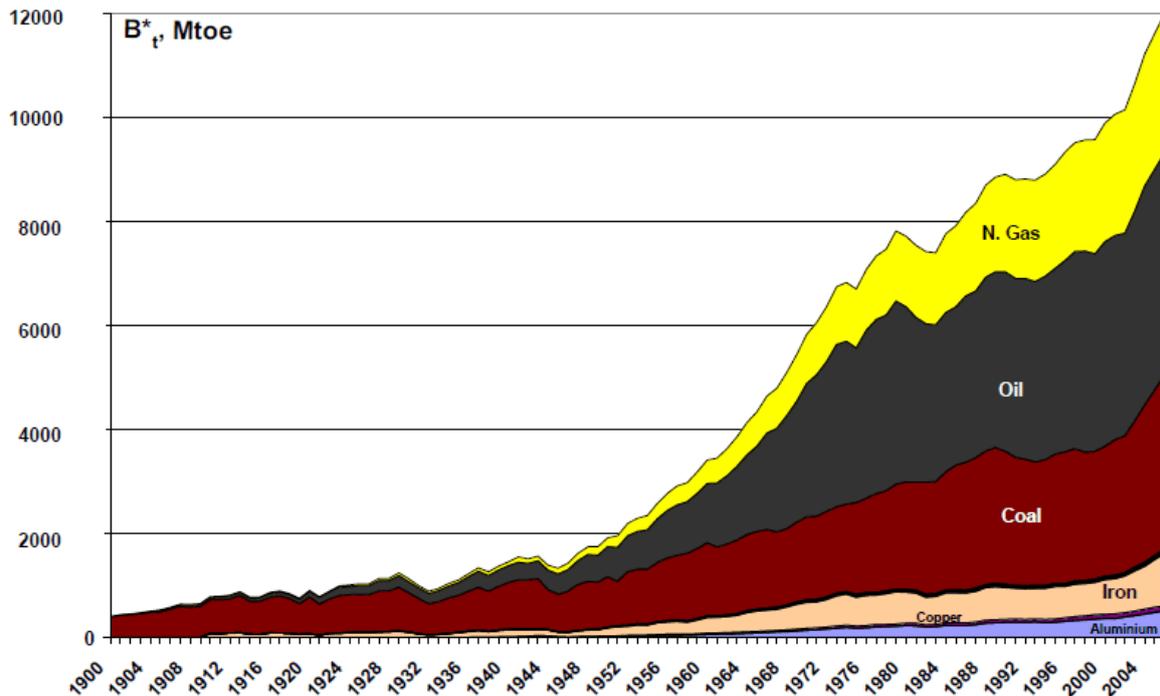


FIGURE 2.62 – Consommation d'exergie mondiale de carburant et minéraux à travers le 20<sup>e</sup> siècle [Delgado, 2008]

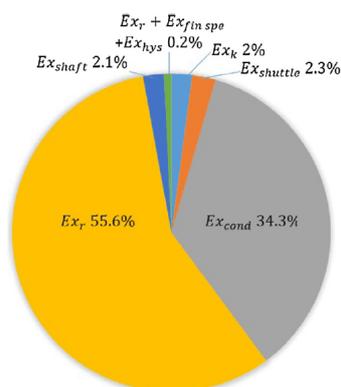


FIGURE 2.63 – Distributions des différentes exergies absorbées dans un moteur Stirling de type Gamma [Li et al., 2016b]

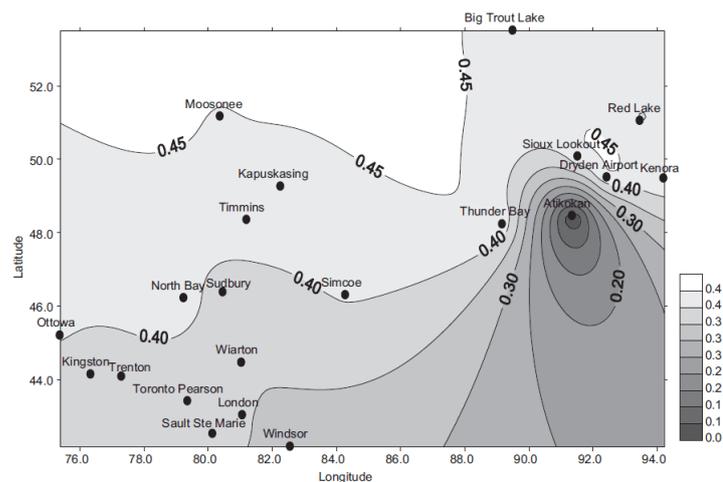


FIGURE 2.64 – Rendement exergetique du potentiel éolien dans la région d'Ontario en janvier [Dincer et Rosen, 2013]

## 2.7.2 Des deux principes à l'exergie

### Supersystème et exergie

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, on est généralement contraint de borner le domaine d'étude par un domaine matériel (Lagrangien) ou par un volume de contrôle (Eulérien), il en est de même en thermodynamique où il est nécessaire de définir un volume de contrôle et par conséquent les frontières par lesquelles s'opèrent les différents échanges d'énergie. Pour prendre en compte les effets de l'environnement, il est possible de prendre en compte ce que l'on appelle le supersystème [Benelmir et al., 2002] défini comme le système à l'origine de l'étude et son milieu ambiant (voir figure 2.66), milieu vaste englobant le système et étant dans un état d'équilibre thermodynamique parfait (que l'on pourra de cette manière considérer comme milieu de référence). Le système et le milieu ambiant ne

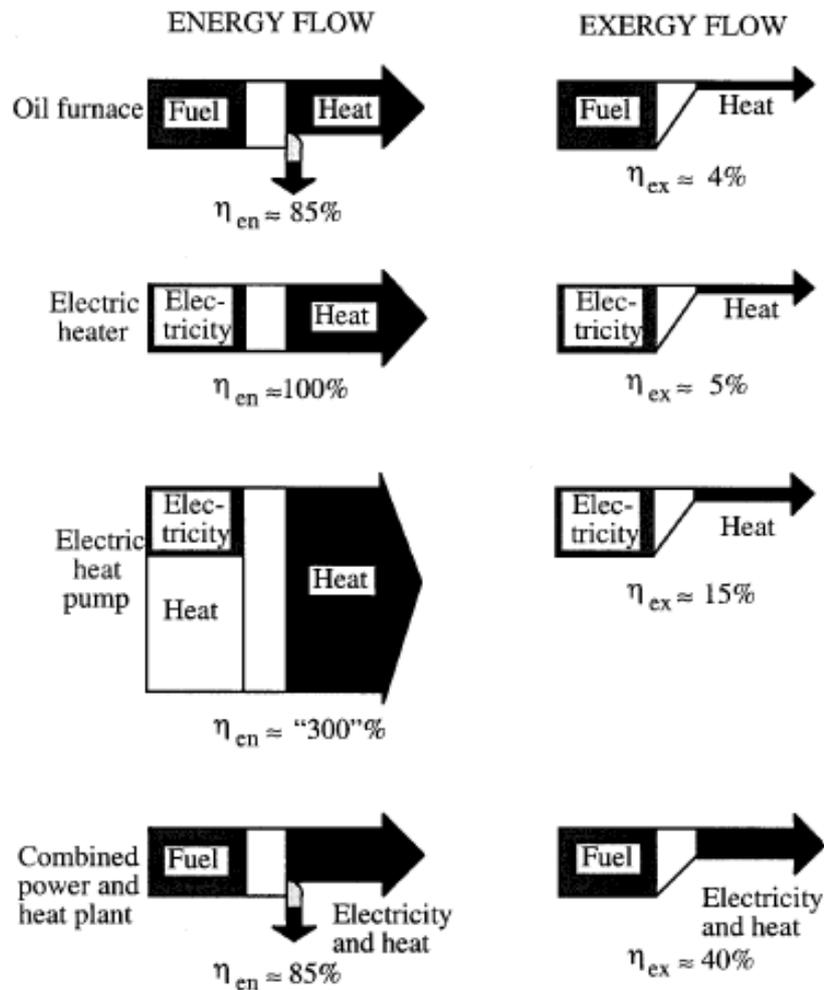


FIGURE 2.65 – Rendement énergétique et exergetique de plusieurs machines [Dincer et Cengel, 2001]

sont pas à l'équilibre, si bien que, le supersystème va produire un travail lorsque le système va passer d'un état initial à un état d'équilibre.

À partir du premier principe, le travail considéré comme fourni par le supersystème (donc négatif) est donné par :

$$W = \Delta E^{S+0} < 0 \Rightarrow |W| = -\Delta E^{S+0} \quad \Delta E^{S+0} = \Delta E^S + \Delta E^0 = U_0 - E + \Delta U^0 \quad (2.150)$$

Où  $\Delta E^{S+0}$  est la variation d'énergie de l'ensemble système + milieu ambiant, superposition de chacune des variations d'énergie associée à chaque sous-ensemble ( $\Delta E^S$  pour le système et  $\Delta E^0$  pour le milieu ambiant). Dans le cas du système, la variation d'énergie correspond à la différence entre l'énergie initiale  $E$  et l'énergie à l'état d'équilibre  $U_0$ , et pour le milieu ambiant, la variation d'énergie correspond à la variation de son énergie interne.

Le milieu ambiant par sa définition même est à température et pression constante, ce qui permet de déduire son énergie interne. De plus, comme le volume total du supersystème est constant, la variation de volume de chaque sous-ensemble est liée :

$$\Delta U^0 = Q^0 + W^0 = T_0 \Delta S^0 - p_0 \Delta V^0 \quad \Delta V^S + \Delta V^0 = 0 \Rightarrow \Delta V^0 = -\Delta V^S \quad (2.151)$$

La variation d'énergie totale devient ainsi :

$$\Delta E^{S+0} = U_0 - E + T_0 \Delta S^0 + p_0 \Delta V^S \quad (2.152)$$

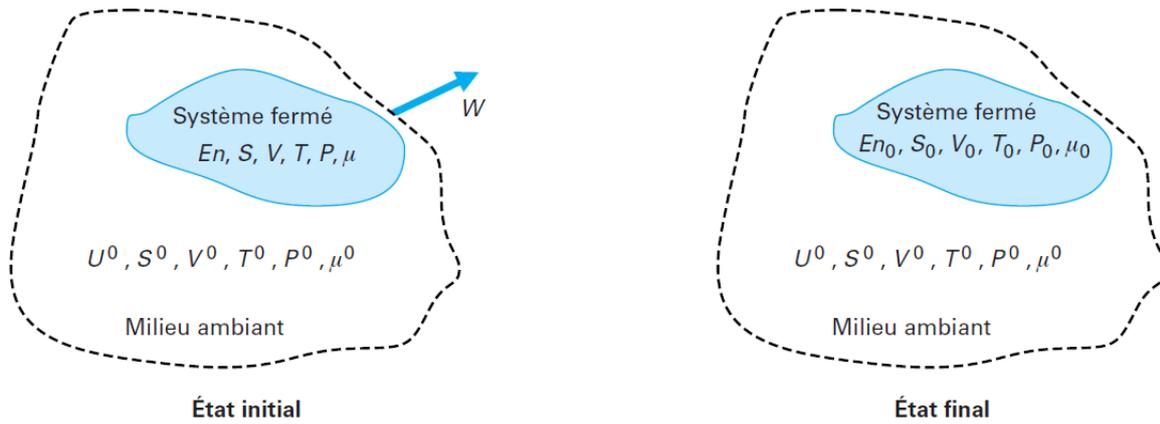


FIGURE 2.66 – Supersystème composé du système fermé et du milieu ambiant [Benelmir et al., 2002]

Le deuxième principe nous donne l'entropie des deux sous-ensembles et le lien avec la création d'entropie :

$$\Delta S^{S+0} = \Delta S^S + \Delta S^0 = \Pi_T \quad \Delta S^0 = \Pi_T - \Delta S^S \quad (2.153)$$

En couplant les deux principes, on obtient finalement le travail fourni par le supersystème pour atteindre l'équilibre :

$$\Delta E^{S+0} = U_0 - E + T_0 \Pi_T - T_0 \Delta S^S + p_0 \Delta V^S \quad |W| = (E - U_0) - T_0(S - S_0) + p_0(V - V_0) - T_0 \Pi_T \quad (2.154)$$

On fait apparaître ainsi le travail maximal récupérable du supersystème  $W_{max}$ , lié intrinsèquement au cas réversible où la génération d'entropie est nulle. C'est précisément cette quantité qui représente ce que l'on appelle l'exergie (X), néanmoins, la transformation réversible idéale est une transformation n'apparaissant pas dans les cas réels. Le travail fourni est alors toujours inférieur au cas réversible, et une destruction d'exergie apparaît ( $T_0 \Pi_T$ ).

$$|W| = W_{max} - T_0 \Pi_T \quad W_{max} = (E - U_0) - T_0(S - S_0) + p_0(V - V_0) \quad (2.155)$$

$$dX = dE + p_0 dV - T_0 dS \quad (2.156)$$

### Théorème de Gouy-Stodola

Le raisonnement précédent peut être obtenu plus simplement par ce que l'on appelle le théorème de Gouy-Stodola (apparaissant comme un principe variationnel pour un système ouvert selon Lucia [2012]). Dans un premier temps, on ajoute  $p_0 dV$  au premier principe :

$$dE = \delta Q + \delta W + p_0 dV \quad ; \quad E = U + E_k + E_p \quad (2.157)$$

Dans un deuxième temps, on multiplie le second principe par la température de l'environnement  $T_0$  :

$$T_0 dS = T_0 \left( \frac{\delta Q}{T} + \delta \Pi_T \right) \quad (2.158)$$

Finalement en soustrayant l'équation 2.157 à l'équation 2.158 et en négligeant les variations d'énergies potentielle et cinétique, l'exergie (équation 2.156) apparaît :

$$dX = \delta Q \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right) + \delta W + p_0 dV - T_0 \delta \Pi_T \quad (2.159)$$

L'avantage de cette dernière équation repose sur le contraste entre les différentes énergies. En effet, les différentes énergies n'interviennent plus directement comme dans le premier principe, mais c'est leurs qualités qui apparaissent dans ce bilan. En réalité, le deuxième principe est à l'origine de la notion "dégradée" de l'énergie chaleur par opposition au travail mécanique considéré comme "noble". Néanmoins, la notion d'exergie permet la comparaison de toute forme d'énergie, de la sorte, on considère généralement comme "noble" l'énergie électrique ou encore l'énergie chimique tout comme le travail mécanique. À l'opposé, l'énergie chaleur étant plus "désordonnée", est qualifiée d'énergie "dégradée". En définitive, exergie et énergie sont identiques lorsque l'on parle d'énergie "noble", alors que pour des énergies "dégradées" des facteurs modélisant la qualité de l'énergie interviennent, c'est le cas du facteur de Carnot pour l'énergie chaleur.

$$\delta X_q = \delta Q \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right) = \theta_c \delta Q \quad (2.160)$$

$X_q$  : Exergie chaleur [J]

$T_0$  : Température de référence (température ambiante) [K]

$T$  : Température absolue [K]

$\theta_c$  : Facteur de Carnot

L'équation précédente fait apparaître une différenciation de l'énergie en une somme de deux parties, une partie exergetique ( $\theta_c \delta Q$ ) et une partie que l'on appelle anergétique ( $(1 - \theta_c) \delta Q$ ). L'anergie correspond à l'impossibilité d'une énergie "dégradée" à produire de l'exergie, mais elle peut être vue comme une énergie nécessaire à la construction d'un réseau de transfert permettant ensuite l'échange d'énergie restante, celle-ci étant l'exergie. Une représentation simple est de différencier les deux parties de l'énergie, l'énergie se concentre soit dans des zones anergétiques (pour des facteurs de Carnot faibles) soit dans des zones exergetiques (pour des facteurs de Carnot élevés) comme nous le représentons en figure 2.67, en sachant que seules les zones exergetiques peuvent produire du travail.

Une autre illustration provenant du monde animal est possible à travers l'Oecophylla spp, un type de fourmi tisserande. Pour aller d'un point A à un point B, ces fourmis créent un pont (voir figure 2.68) pour que les autres puissent passer. On peut assimiler les fourmis contribuant à la construction du pont à l'anergie et celles qui passent, à l'exergie. Il est donc nécessaire de perdre de l'énergie par anergie pour pouvoir transférer une quantité d'exergie. Si maintenant, lors de son passage, une fourmi tombe du pont, on peut voir cette malheureuse tragédie comme une perte d'exergie pure. Une des conséquences directes du second principe est donc la destruction d'exergie ( $T_0 \delta I_T$ ) qui accompagne l'irréversibilité d'une transformation. Cette notion intervenant au niveau du rendement exergetique, la rend plus simple à utiliser puisqu'elle représente une fraction de l'exergie totale et non plus une entropie ajoutée.

### Rendement exergetique

Le rendement exergetique rend compte de la qualité d'un système et est donc plus complet que le simple rendement énergétique :

$$\eta_{en} = \frac{E_f(Q_i, W_i)}{E_r(Q_i, W_i)} = 1 - \frac{E_p(Q_i, W_i)}{E_r(Q_i, W_i)} \neq \frac{X_f(Q_i, \theta_{ci}, W_i)}{X_r(Q_i, \theta_{ci}, W_i)} = 1 - \frac{X_p(Q_i, \theta_{ci}, W_i)}{X_r(Q_i, \theta_{ci}, W_i)} \quad (2.161)$$

E représente une énergie fonction :

D'énergies "dégradées"  $Q_i$  et d'énergies "nobles"  $W_i$  ; fournies, reçues ou perdues ( $f, r, p$ ).

X représente une exergie fonction :

D'énergies "dégradées"  $Q_i$ , de leur facteur de qualité  $\theta_{ci}$ , et d'énergies "nobles"  $W_i$  ; fournies, reçues ou perdues ( $f, r, p$ ).

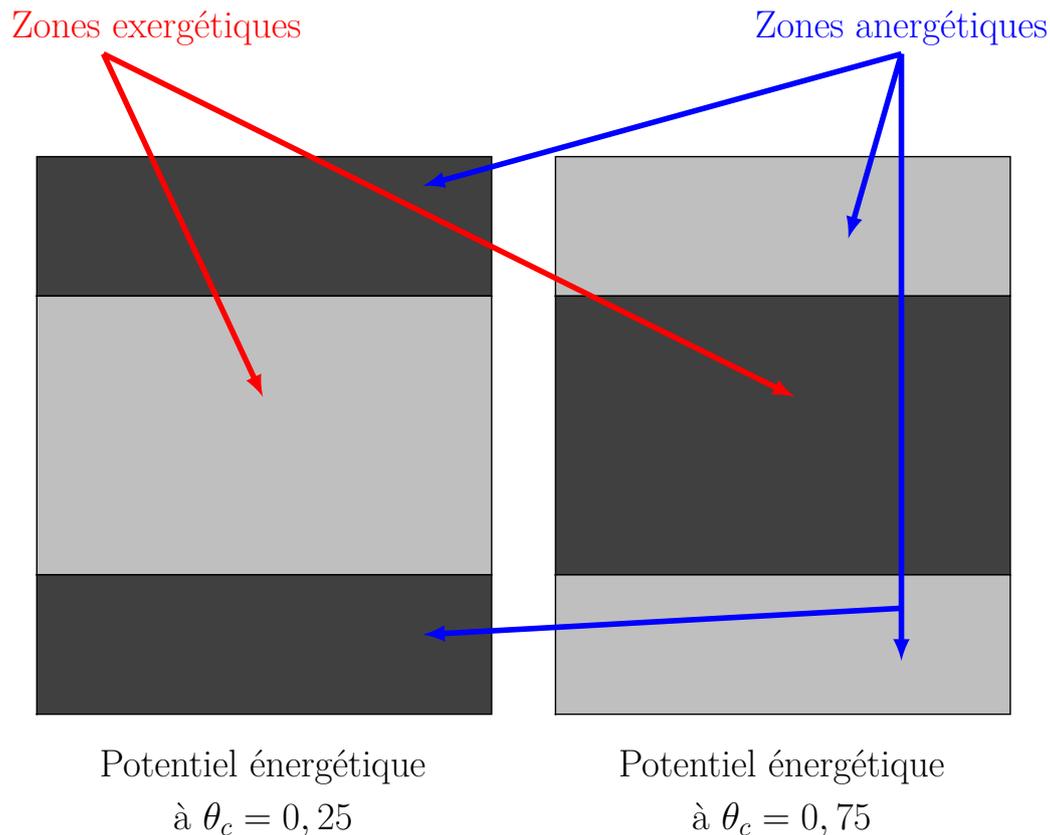


FIGURE 2.67 – Exemple de représentation d'une énergie à différent facteur de Carnot, l'intensité de couleur noire étant associée à une intensité de concentration énergétique.

### Exemple d'application simple : la turbine à gaz

Un exemple simple, est la modélisation d'une TAG, composée d'un compresseur, d'une chambre de combustion et une turbine (voir figure 2.69). Le cycle thermodynamique idéal associé à celle-ci est composé de :

- 1-2 Compression isentropique de l'air. Passage d'une basse pression à une haute pression
- 2-3 Combustion isobarique dans la chambre de combustion ouverte (sans soupape)
- 3-4 Détente isentropique des gaz brûlés dans la turbine. Passage d'une haute à une basse pression
- 4-1 Échappement et admission

Pour une température d'entrée d'air identique à celle de l'environnement ( $T_0 = 288\text{K}$ ), un compresseur et une turbine ayant un rendement isentropique de 0,85, fonctionnant entre 1 et 16 bars, et une combustion air - Gaz de Montoir s'effectuant à  $T_c = 1423\text{K}$  et ayant un rendement de 1.

- Compression :  $W_{comp} = 410\text{kW}$
- Combustion :  $Q_{comb} = 925\text{kW}$
- Détente :  $W_{turb} = -728\text{kW}$
- Facteur de Carnot :  $\theta_c = 1 - (T_0/T_c) = 0,8$
- Flux d'exergie de combustion :  $X_Q = Q_{comb}\theta_c = 740\text{kW}$



FIGURE 2.68 – Construction du pont de fourmi [AntLABDK]

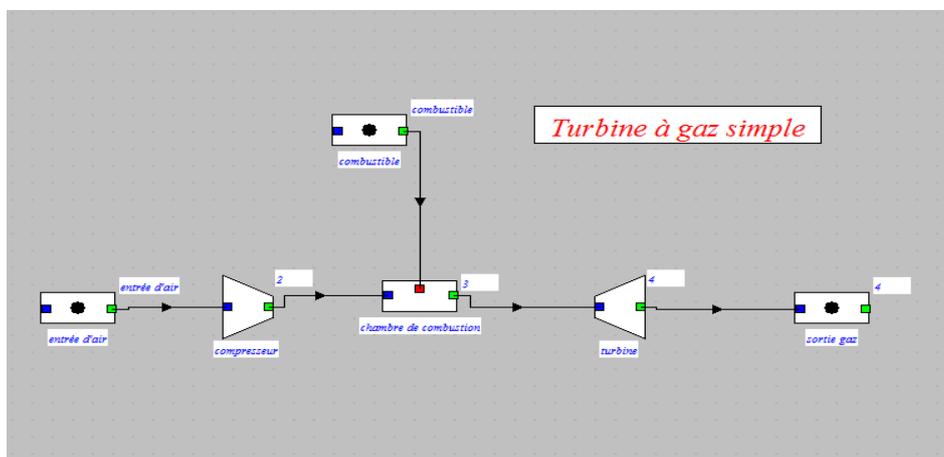


FIGURE 2.69 – Schéma thermodynamique d'une TAG

$$\eta = \frac{|W_{turb} + W_{comp}|}{Q_{comb}} = 0,34 \quad \eta_x = \frac{|W_{turb} + W_{comp}|}{X_Q} = 0,43 \quad (2.162)$$

On aperçoit ainsi un rendement exergetique plus éleve que le rendement énergetique, en effet, on observe que l'on exploite 43 % du potentiel exergetique contre 34 % du potentiel énergetique. Ceci vient du fait que l'on ne prend pas en compte l'anergie chaleur dans le rendement exergetique car elle ne produit pas de travail.

### 2.7.3 L'exergie de déformation

#### Analyse exergetique en fatigue

Les équations mises en jeu en mécanique se basent sur l'énergie libre de Helmholtz, combinaison linéaire du premier et du deuxième principe qui possède le désavantage de dépendre de la température du système (une température variable pouvant amener à l'utilisation d'une entropie inertielle [Kuang, 2011]). L'exergie quant à elle met en avant le supersystème par l'intermédiaire du théorème de Gouy-Stodola, ce qui implique un potentiel thermodynamique combinaison linéaire du premier et deuxième principe, mais avec une dépendance à la température de l'environnement (plus précisément des conditions environnementales lorsque l'on prend en compte en plus la pression exercée par l'environne-

ment). Ainsi, l'analyse exergetique de la fatigue est applicable à tout système soumis à des cycles de sollicitations. En considérant le travail de la pression ambiante sur l'échantillon négligeable devant la déformation, l'analyse exergetique peut être exprimée en utilisant les deux principes précédents (équation 2.23 et équation 2.24) :

$$\rho \dot{x} = -div \dot{Q} + \sigma : D + T_0 div \left( \frac{\dot{Q}}{T} \right) - \underbrace{T_0 \dot{Y}}_{\dot{x}_d} \quad (2.163)$$

Où  $\dot{x}$  représente le flux d'exergie spécifique fonction d'état et  $\dot{x}_d$  représente le flux de destruction d'exergie, symbolisant la déviation à la réversibilité. En remplaçant la création d'entropie obtenue par l'équation 2.39, le bilan exergetique devient :

$$\rho \dot{x} = \underbrace{-div \dot{Q} \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right)}_{\dot{x}_q} + \underbrace{\sigma : \epsilon_p \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right)}_{\dot{x}_p} + \underbrace{\sigma : \epsilon_e}_{\dot{x}_e} - \underbrace{\left( -\frac{T_0}{T} A_k \dot{V}_k \right)}_{\dot{a}n_k} \quad (2.164)$$

$\dot{x}_e$  : Flux d'exergie spécifique associé à la déformation élastique

$\dot{x}_q$  : Flux d'exergie spécifique associé à la chaleur

$\dot{x}_p$  : Flux d'exergie spécifique associé à la déformation plastique

$\dot{a}n_k$  : Flux d'anergie spécifique associé aux variables internes

L'équation obtenue montre que l'énergie de déformation plastique possède une qualité inférieure à celle d'un travail mécanique. Son exergie est représentée par le second terme du bilan exergetique où l'on peut voir un facteur de Carnot. Un autre terme intéressant est associé aux variables internes et révèle une anergie pure. Par conséquent, la dépendance de l'énergie de déformation plastique à la température est évidente à travers l'analyse exergetique. L'exergie associée au travail de déformation plastique peut être interprétée comme une qualité de déformation, en effet, une température élevée implique une déformation plus efficace et de fait, une durée de vie plus faible du matériau soumis à des cycles de sollicitations.

Des résultats expérimentaux obtenus par [Hong et al. \[2003\]](#) sur un acier inoxydable 316L confirment cette notion de qualité. En effet, il est observé, qu'à densité d'énergie de déformation plastique constante, pour des tests conservés à des températures différentes, que la durée de vie du matériau à haute température est inférieure à celle à basse température. En d'autres termes, pour une quantité identique de travail, l'exergie de déformation sera plus grande pour un test à température élevée et implique une meilleure qualité de la déformation.

D'un point de vue thermodynamique, si une machine pouvait recevoir l'énergie accumulée durant la fatigue du matériau, il recevrait plus d'exergie pour une rupture en fatigue à haute température qu'à basse température.

Puisque le travail de déformation plastique se comporte comme une quantité de chaleur, il est possible de représenter le travail de déformation plastique de façon analogue à la chaleur sur un cycle de Carnot (figure 2.70), où l'énergie fournie est le travail de déformation plastique et l'énergie récupérée l'exergie de déformation plastique.

L'énergie de déformation élastique quant à elle est vue comme un travail mécanique pur au sens énergie "noble" confirmant la définition mécanique d'une transformation élastique, c'est-à-dire réversible. En réalité, une déformation en général n'est pas réversible, de ce fait, pour être en accord avec la mécanique des milieux continus, les variables internes prennent en compte les phénomènes ayant lieu à petite échelle et permettent de concorder avec les

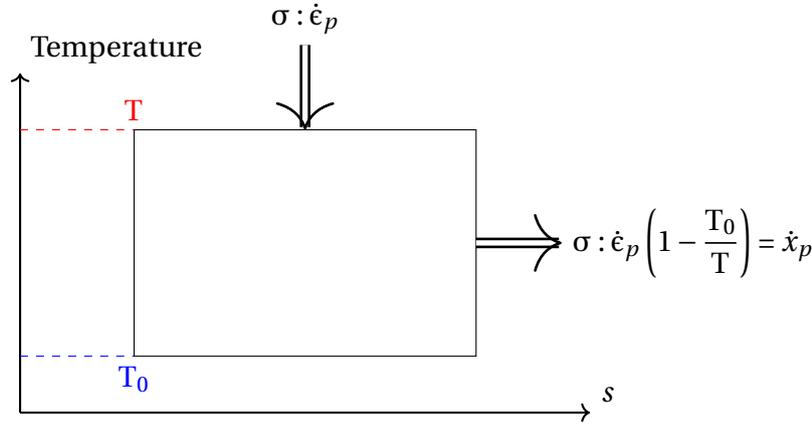


FIGURE 2.70 – Cycle température flux d'entropie montrant la transformation directe du flux de déformation plastique en son flux d'exergie associé

résultats en fatigue gigacyclique. Ainsi, pour des sollicitations sous la limite élastique, la déformation plastique apparaît localement à très petite échelle. C'est pourquoi, frottement interne, changement de phase et dynamique des dislocations . . . sont des phénomènes inclus dans les variables internes <sup>19</sup>.

Dans le cadre de l'analyse exergétique, on observe que le travail de déformation élastique est entièrement récupérable alors que pour la chaleur et le travail de déformation plastique, seul une partie l'est, dépendant de leur qualité. Il vient donc qu'une irréversibilité pure est produite par la transformation élastique, correspondant à l'anergie associée aux variables internes, et pouvant être traduite par une impossibilité à produire du travail.

Un autre avantage dans l'utilisation de la notion d'exergie provient de la destruction d'exergie qui s'avère évitable. En effet, puisque la destruction d'exergie se manifeste ici comme une anergie, contrôler la température rend compte du contrôle de l'irréversibilité. Bien sûr, il existe des limites où des phénomènes apparaissent dépendant de la température comme des changements de phases influençant le comportement du matériau.

Pour finir, plusieurs équations du bilan exergétique peuvent être obtenues par l'utilisation où non de l'énergie libre de Helmholtz, celles-ci présentées ci-après :

$$\rho(\dot{u} - T_0\dot{s}) = \sigma : \dot{\epsilon}_p \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) - \text{div} Q \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) - A_k \dot{V}_k \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) + T \left( \frac{d\sigma}{dT} : \dot{\epsilon}_e + \frac{dA_k}{dT} \dot{V}_k \right) \quad (2.165)$$

$$\rho(\dot{u} - T_0\dot{s}) = \sigma : D \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) - \text{div} Q \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) - T_0 \left( \frac{d\sigma}{dT} : \dot{\epsilon}_e + \frac{dA_k}{dT} \dot{V}_k \right) \quad (2.166)$$

$$\rho(\dot{u} - T_0\dot{s}) = \sigma : \dot{\epsilon}_p \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) - \text{div} Q \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) - A_k \dot{V}_k - \left( \frac{T_0}{T} \sigma : \dot{\epsilon}_e \right) + (T - T_0) \left( \frac{d\sigma}{dT} : \dot{\epsilon}_e + \frac{dA_k}{dT} \dot{V}_k \right) \quad (2.167)$$

On peut en conclusion observer que la déformation de façon générale, qu'elle soit plastique, élastique ou les deux réunies possèdent une qualité, et que d'autre part les composantes thermocouplées apparaissent comme destructrices d'exergie.

<sup>19</sup>. Les variables internes permettent aussi de prendre en compte d'autres comportements phénoménologiques comme l'apparition de l'écrouissage lorsque l'on est au-dessus de la limite élastique, en utilisant des variables d'écrouissages comme la déformation plastique cumulée  $R\dot{p}$  et le centre de déplacement de la limite élastique  $X : \dot{\epsilon}_p$  [Lemaitre et Chaboche, 1990].

### Résultats en fatigue oligocyclique pour l'aluminium Al-6061 T6 et l'acier SS 304

Ces résultats sont basés sur les expériences de [Amiri et Khonsari, 2012, Naderi et Khonsari, 2010a, Naderi et al., 2009] pour l'aluminium Al-6061 T6 et l'acier SS 304 en fatigue oligocyclique pour une sollicitation de type traction-compression (ratio  $R_\sigma = -1$ ) donc sans contrainte moyenne. Les propriétés de ces matériaux en fatigue sont recensées dans le tableau 2.5. Les profils de température et le nombre de cycles à rupture proviennent également d'expérimentations effectuées par Naderi et Khonsari [2010a]. De plus, la température de référence est considérée égale à :  $T_0 = 288\text{K}$ . Cette température représente la température ambiante et peut être fixée comme référence pour comparer divers systèmes thermodynamiques à travers un bilan exergetique, et permet dans notre cas d'obtenir le profil du facteur de Carnot durant le test. Concernant le travail de déformation élastique et plastique, l'utilisation des lois de Park et Nelson [2000] permettent d'évaluer le travail de chacune des contributions. En utilisant le nombre de cycles à rupture  $N_f$ , on obtient :

$$\sigma : \epsilon_p = AN_f^\alpha \quad \sigma : \epsilon_e = BN_f^\beta \quad (2.168)$$

$$A = 2^{2+b+c} \sigma'_f \epsilon'_f \left( \frac{c-b}{c+b} \right) \quad B = \frac{2^{2b+1}(1+\nu)(\sigma'_f)^2}{3E} \quad \alpha = b+c \quad \beta = 2b \quad (2.169)$$

	$\sigma'_f$ [MPa]	$\epsilon'_f$	$b$	$c$	E [GPa]	$\nu$
AL-6061 T6	535	1,34	-0,082	-0,83	70	0,33
SS 304	1000	0,171	-0,114	-0,402	185	0,29

TABLEAU 2.5 – Propriétés en fatigue de l'Al-6061 T6 et du SS 304

Pour simplifier, on peut considérer l'hypothèse de température constante ( $\bar{T}$ ) pour chaque test impliquant un facteur de Carnot  $\theta_c$  constant (les phases correspondant aux montées en température en début et fin de test représentent peu de cycle dans la durée de vie du matériau). On présente dans le tableau 2.6 les différentes propriétés expérimentales des deux matériaux provenant de [Amiri et Khonsari, 2012, Naderi et Khonsari, 2010a, Naderi et al., 2009]. À partir de l'utilisation de la fréquence de sollicitation, on obtient les différentes exergies associées aux différentes déformations (les exposants  $c$  pour cyclique et les exposants  $T$  pour total) et le flux de production d'entropie volumique :

$$x_d^T = \int_0^{N_f} x_d^c = \int_0^{N_f} \frac{T_0}{\bar{T}} AN_f^\alpha = \frac{T_0}{\bar{T}} AN_f^{\alpha+1} \quad (2.170)$$

$$x_p^T = \int_0^{N_f} x_p^c = \int_0^{N_f} \left(1 - \frac{T_0}{\bar{T}}\right) AN_f^\alpha = \left(1 - \frac{T_0}{\bar{T}}\right) AN_f^{\alpha+1} \quad (2.171)$$

$$\theta_c = 1 - \frac{T_0}{\bar{T}} \quad \dot{\gamma} = f \frac{AN_f^\alpha}{\bar{T}} \quad \dot{x}_d = f x_d^c \quad \dot{x}_p = f x_p^c \quad (2.172)$$

Les résultats obtenus pour le facteur de Carnot, le flux de production d'entropie volumique, le flux d'exergie de déformation plastique et le flux d'exergie détruite sont présentés en figure 2.71 pour l'Al-6061 T6 et figure 2.72 pour le SS 304. La FFE et les exergies totales dissipées durant la durée de vie du matériau sont présentées quant à elles dans le tableau 2.7 et le tableau 2.8.

AL-6061 T6			SS 304		
Test	Type	Amplitude de déplacement	Test	Type	Amplitude de déplacement
Test 1	Flexion	$\delta_1 = 49,53 \text{ mm}$	Test a	Torsion	$\delta_a = 35,56 \text{ mm}$
Test 2		$\delta_2 = 48,26 \text{ mm}$	Test b		$\delta_b = 33,02 \text{ mm}$
Test 3		$\delta_3 = 38,1 \text{ mm}$	Test 3	Flexion	$\delta_3 = 49,53 \text{ mm}$
Test 4		$\delta_4 = 35,56 \text{ mm}$	Test 4		$\delta_4 = 45,72 \text{ mm}$
Cycles à rupture		Température	Cycles à rupture		Température
$N_{f1} = 2833$		$T_1 = 311\text{K}$	$N_{fa} = 13000$		$T_a = 673\text{K}$
$N_{f2} = 5000$		$T_2 = 306\text{K}$	$N_{fb} = 16000$		$T_b = 533\text{K}$
$N_{f3} = 8500$		$T_3 = 303\text{K}$	$N_{f3} = 9450$		$T_3 = 415\text{K}$
$N_{f4} = 14000$		$T_4 = 301\text{K}$	$N_{f4} = 14150$		$T_4 = 411\text{K}$

TABEAU 2.6 – Propriétés expérimentales tirées de **Naderi et al. [2009]** pour l’Al-6061 T6 et **Naderi et Khonsari [2010a]** pour le SS 304, les deux étant à  $f = 10\text{Hz}$

$FFE_{PN} [MJ/K.m^3]$	$x_d^T [GJ/m^3]$	$x_p^T [GJ/m^3]$
8,09	2,33	0,186
8,64	2,49	0,156
9,14	2,63	0,139
9,62	2,77	0,125
<b>8,87</b>	<b>2,56</b>	<b>0,152</b>

TABEAU 2.7 –  $FFE_{PN}$  et exergies calculées sur l’ensemble de la durée de chaque test pour l’Al-6061 T6 ( $f=10\text{Hz}$ ), la couleur représentant la moyenne sur tous les tests

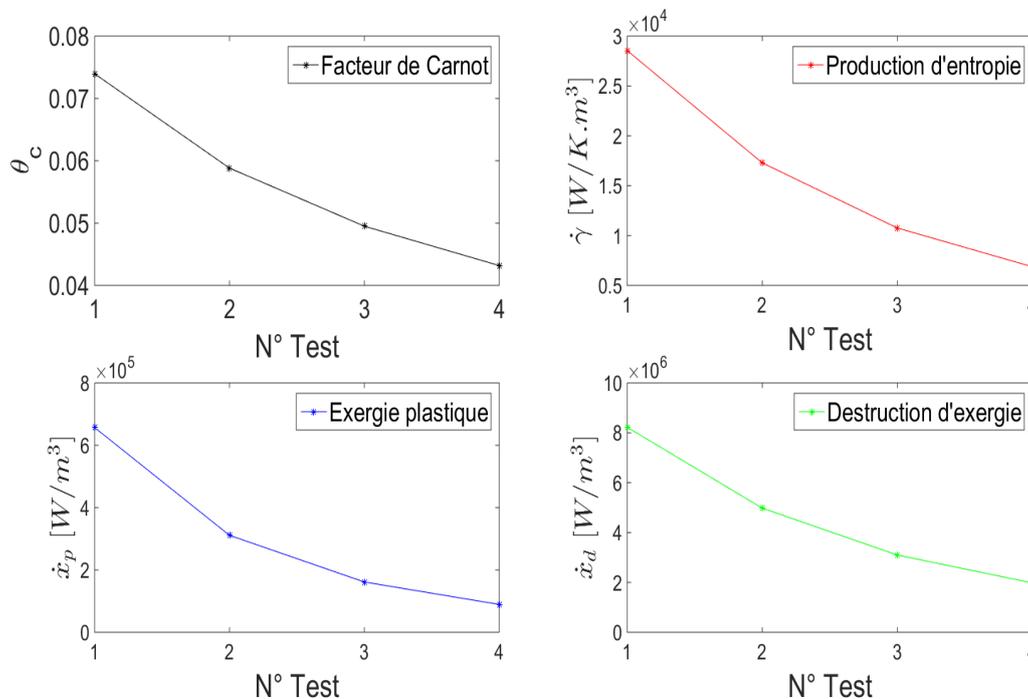


FIGURE 2.71 – Facteurs de Carnot, flux d’entropie créée, flux d’exergie plastique et flux d’exergie détruite pour les tests de l’Al-6061 T6

Des caractéristiques particulièrement intéressantes émergent des résultats, la première, concerne la FFE qui apparaît quasi-constante pour la fatigue oligocyclique pour les deux

FFE <sub>PN</sub> [MJ/K.m <sup>3</sup> ]	$x_d^T$ [GJ/m <sup>3</sup> ]	$x_p^T$ [GJ/m <sup>3</sup> ]
38,87	11,19	14,96
54,27	15,63	13,30
54,02	15,56	6,86
66,31	19,10	8,156
<b>53,37</b>	<b>15,37</b>	<b>10,82</b>

TABLEAU 2.8 – FFE<sub>PN</sub> et exergies calculées sur l'ensemble de la durée de chaque test pour le SS 304 (f=10Hz), la couleur représentant la moyenne sur tous les tests

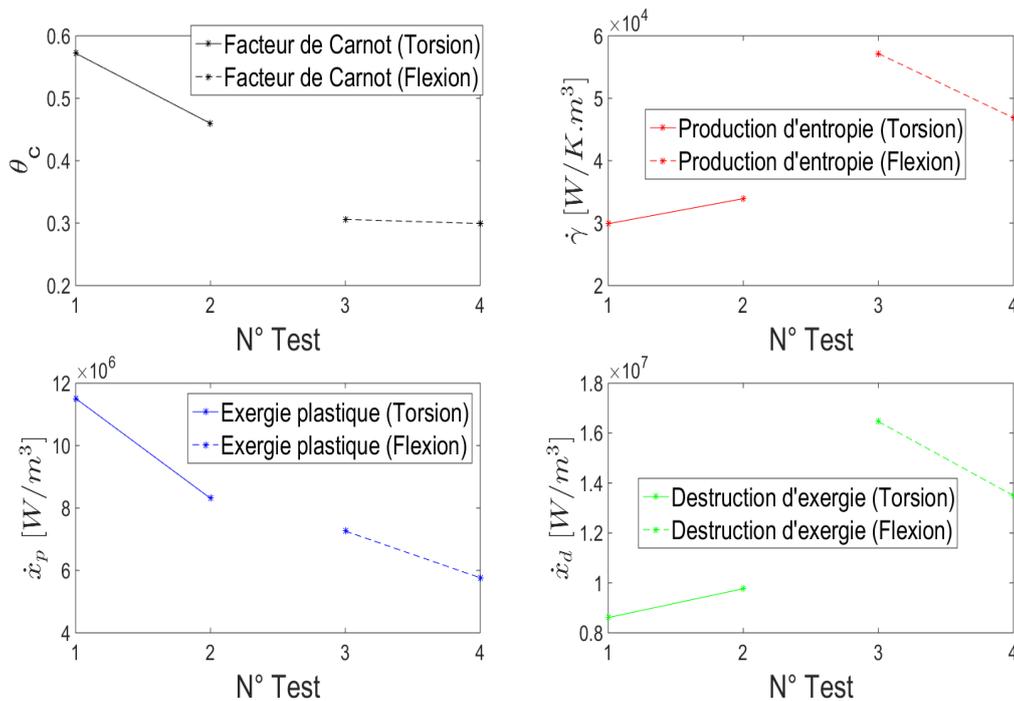


FIGURE 2.72 – Facteurs de Carnot, flux d'entropie créée, flux d'exergie plastique et flux d'exergie détruite pour les tests du SS 304

matériaux. De même, l'exergie totale détruite et l'exergie de déformation plastique totale semblent constantes, avec un léger avantage sur la stabilité et la constance vis-à-vis de la FFE. On peut observer de plus que pour chacun des matériaux soumis à une fatigue de type flexion, une diminution de l'amplitude de déplacement (liée au travail de déformation) implique une diminution, du facteur de Carnot, du flux d'entropie volumique produite, du flux d'exergie plastique et du flux d'exergie détruite. Puisqu'une transformation réversible nécessite un flux d'entropie volumique nul, diminuer l'amplitude de déplacement en fatigue de type flexion entraîne une transformation plus proche de la transformation idéale traduite par moins de flux d'exergie détruite et moins de flux d'exergie plastique, amenant logiquement à une durée de vie du matériau supérieure (en considérant une constance des exergies totales tout comme la FFE). En d'autres termes, la diminution de l'amplitude de déplacement permet de surmonter plus de cycles jusqu'à l'entropie maximale accumulable, la FFE (ou bien, le maximum d'exergie plastique ou détruite cumulable). Cependant, pour la fatigue en torsion, l'interprétation précédente n'est pas vérifiée, en effet, outre la diminution du facteur de Carnot et du flux d'exergie plastique, on observe une augmentation du flux d'entropie créée, et du flux d'exergie détruite lorsque le matériau est soumis à une amplitude de déplacement qui diminue (impliquant une plus grande durée de vie du matériau). Ce comportement provient d'une plus grande importance du facteur de Carnot devant le travail de

déformation plastique dans le flux d'entropie créée. En effet, dans le cas de la flexion, le facteur de Carnot varie très peu comparé au travail de déformation plastique. On peut ajouter qu'à haute température, le comportement du matériau devient de plus en plus visqueux et ductile ce qui peut mener à une impossibilité d'utiliser l'hypothèse des petites déformations et menant à une estimation incorrecte du travail de déformation par les lois de Park et Nelson (en rappelant que pour la torsion  $T/T_{fusion}$  est égale à 0.4 pour le test(a) et 0.32 pour le test(b)). Néanmoins, une propriété entre les différents matériaux et différents types de fatigue subsiste, c'est l'augmentation de la durée de vie (nombre de cycles à rupture) lorsque le flux d'exergie plastique diminue, ce qui indique un lien robuste entre la qualité de la déformation plastique et la durée de vie du matériau.

### Résultats en fatigue oligocyclique pour l'aluminium Al-2024 et l'acier S235

De même, on essaie de vérifier les résultats obtenus précédemment avec le modèle de Park et Nelson et des essais expérimentaux utilisant l'approximation parabolique utilisée en première partie de manuscrit. Le lien précédent entre flux d'exergie plastique et durée de vie (ou contrainte de sollicitation) paraît en accord avec le modèle de Park et Nelson, celui-ci montrant en plus, un léger effet de la fréquence impliquant un surplus de flux d'exergie plastique pour des fréquences plus élevées. Pour ce qui est des résultats expérimentaux, il est difficile de lier ces paramètres à la durée de vie, néanmoins, les différents flux exergétiques et entropiques expérimentaux semblent apparaître constants (voir figure 2.73 et tableau 2.9).

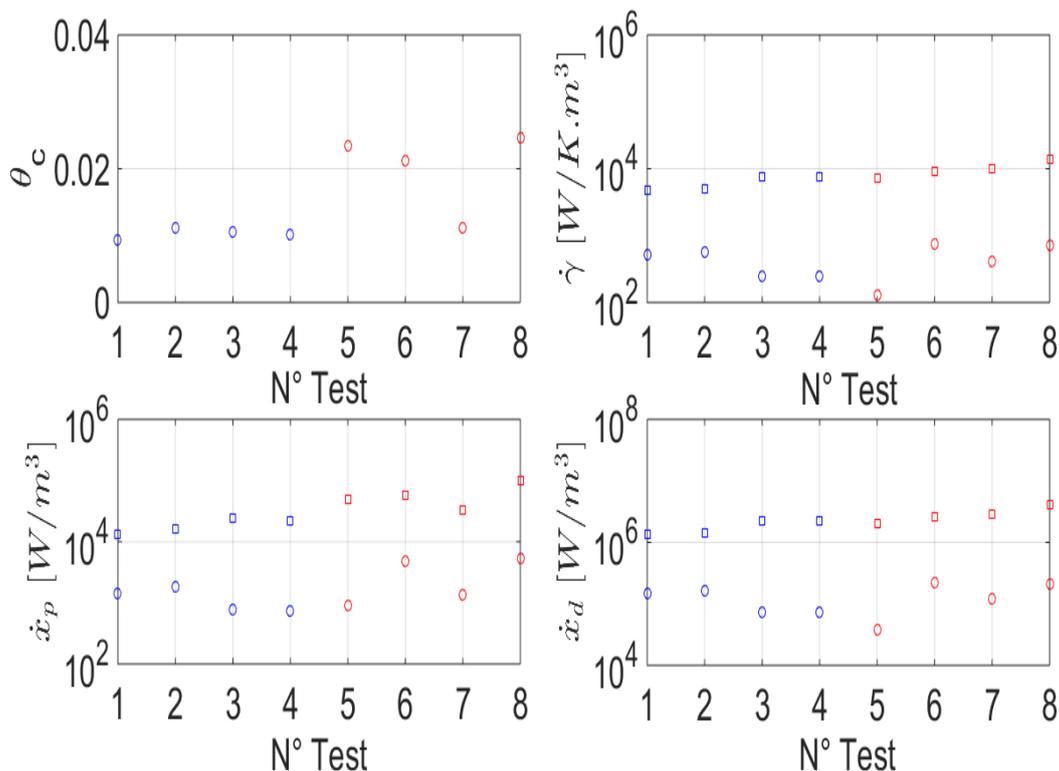


FIGURE 2.73 – Résultats expérimentaux des différentes exergies pour l'Al 2024 à partir du modèle simple parabolique (cercle) et du modèle de Park et Nelson (carré) triés dans l'ordre croissant des amplitudes de contraintes, en bleu pour  $f = 5\text{Hz}$  et rouge pour  $f = 10\text{Hz}$

Des résultats complémentaires semblent ainsi nécessaires pour la caractérisation d'une véritable dépendance entre flux d'exergie plastique et durée de vie du matériau, même si le modèle de Park et Nelson paraît confirmer ce comportement.

Modèle de Park et Nelson			Expérimental		
$FFE_{PN} [MJ/K.m^3]$	$x_d^T [GJ/m^3]$	$x_p^T [MJ/m^3]$	$FFE_{LCF} [MJ/K.m^3]$	$x_d^T [GJ/m^3]$	$x_p^T [MJ/m^3]$
10,18	2,93	33,36	1,16	0,33	3,80
8,98	2,59	27,83	0,29	0,08	0,90
10,34	2,98	28,17	1,11	0,32	3,01
9,01	2,60	26,50	0,30	0,09	0,87
10,23	2,95	33,30	0,43	0,13	1,41
9,04	2,60	65,61	0,47	0,13	3,40
10,35	2,98	64,70	0,86	0,25	5,40
11,12	3,20	76,59	0,21	0,60	1,42
<b>9,91</b>	<b>2,86</b>	<b>44,51</b>	<b>0,60</b>	<b>0,17</b>	<b>2,53</b>

TABLEAU 2.9 – FFE et exergies calculées sur l'ensemble de la durée de chaque test pour l'Al 2024 (quatre premiers tests  $f=5\text{Hz}$ , le reste étant à  $f=10\text{Hz}$ ), la couleur représentant la moyenne sur tous les tests

## 2.8 Conclusion

Après avoir présenté le phénomène de fatigue mécanique ainsi que quelques modèles de prédictions de la durée de vie d'un matériau, la thermodynamique de la fatigue (notamment la fatigue oligocyclique) puis le concept d'entropie de rupture ont été mis en avant.

Plusieurs méthodes sont ensuite illustrées pour estimer l'entropie de rupture en fatigue d'un matériau. Ces méthodes utilisent soit des modèles empiriques permettant une estimation du travail de déformation plastique, soit des relations basées sur la physique du transfert thermique avec des conditions et hypothèses diverses. Les méthodes expérimentales nécessitent l'estimation du profil de température des matériaux étudiés (aluminium Al-2024 et acier S-235) obtenus par thermographie infrarouge.

Les entropies de rupture ainsi évaluées montrent que l'hypothèse d'une entropie de rupture en fatigue constante est admissible pour les divers modèles et considérations utilisées (celles-ci étant toutes dans le même ordre de grandeur). Une étude des modèles empiriques utilisés dans l'estimation de l'entropie de rupture permet d'observer une sensibilité au coefficient en fatigue pouvant induire une estimation de la FFE surestimée (modèle de Park et Nelson). Dans le cas du deuxième modèle, le modèle de Ramberg-Osgood cyclique, une étude numérique rapide utilisant l'équation de la chaleur permet d'étendre ce modèle pour prendre en compte le comportement oscillant de la contrainte et de la déformation en utilisant l'hypothèse d'un terme source nécessairement source de chaleur (nécessairement positif), et permet une estimation de la FFE assez proche de l'expérience.

Par ailleurs, des endommagements basés sur l'entropie accumulée en fatigue permettent de relever des phases critiques durant un test. En effet, un modèle d'endommagement à deux seuils critiques basé sur des considérations simples sur l'endommagement initial d'un échantillon permet une différenciation des différentes phases en fatigue à partir des estimations d'endommagements critiques.

Finalement, on prolonge l'étude thermodynamique par l'utilisation du concept d'exergie. En l'introduisant, on observe que cette quantité représente la notion de qualité énergétique et permet la prise en compte de l'effet de l'environnement sur le système étudié. Ainsi, à travers le théorème de Gouy-Stodola et l'analyse exergetique, on obtient un résultat intéressant, que le travail de déformation plastique peut être considéré comme une énergie dégradée tout comme l'énergie chaleur. Ce que l'on appelle l'exergie plastique est une mesure de la qualité du travail de déformation plastique. Celle-ci mesure la dépendance de la durée de vie du matériau à la température et à son environnement par le facteur de Carnot, facteur de qualité. De fait, tout comme l'exergie chaleur, l'exergie plastique peut être assimilée au maximum de travail de déformation plastique disponible (ici le terme disponible est

plus adapté que le terme récupérable utilisé pour l'énergie chaleur), cependant, plus le travail de déformation plastique est efficace ou disponible, moins la durée de vie du matériau est élevée.

Puisque l'on peut voir l'exergie comme le support géométrique de l'énergie, et que, du point de vue mécanique une sollicitation fait émerger une géométrie particulière, l'analyse géométrique semble nécessaire et complémentaire à l'analyse thermodynamique (figure 2.74).

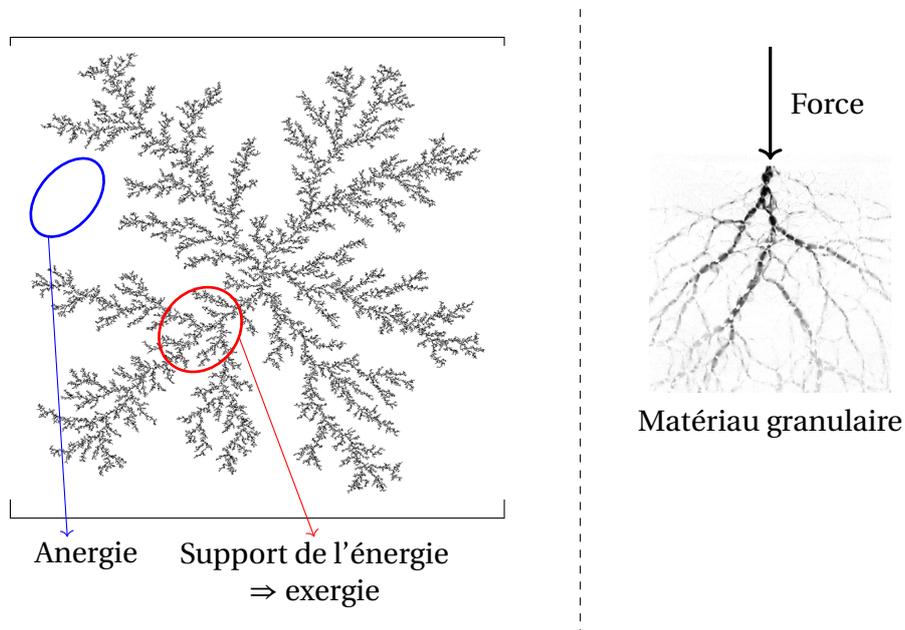


FIGURE 2.74 – Exergie vue comme support géométrique de l'énergie (gauche) et structure géométrique liée à une sollicitation de type choc sur un milieu granulaire [Geng et al., 2001] (droite)

Pour finir, l'exergie représente une qualité qui peut être rapprochée de la théorie constructive faisant intervenir une optimisation géométrique des transferts énergétiques, qui est liée à ce que l'on appelle un fractal parabolique (forme géométrique particulière). De plus, la loi logarithmique de l'entropie accumulée utilisée pour l'endommagement ressemble fortement à l'évolution de la dimension d'un fractal parabolique. Par conséquent, l'étude du lien entre géométrie et mécanique et plus particulièrement le lien entre fractal parabolique et mécanique est envisageable.

## Nomenclature - Fatigue et thermodynamique classique

### Acronymes

FFE	Fracture fatigue entropy - Entropie de rupture en fatigue	$\text{J m}^{-3} \text{K}^{-1}$
FFE <sub>cond</sub>	FFE estimée par une régression parabolique du profil de température	$\text{J m}^{-3} \text{K}^{-1}$
FFE <sub>conv</sub>	FFE basée uniquement sur la composante de convection	$\text{J m}^{-3} \text{K}^{-1}$
FFE <sub>expo</sub>	FFE basée sur une régression exponentielle prenant en compte convection et rayonnement	$\text{J m}^{-3} \text{K}^{-1}$
FFE <sub>insta</sub>	FFE basée sur une variation linéaire par morceaux de l'énergie accumulée	$\text{J m}^{-3} \text{K}^{-1}$
FFE <sub>LCF</sub>	FFE estimée par une régression parabolique du profil de température et variation linéaire par morceaux de l'énergie accumulée	$\text{J m}^{-3} \text{K}^{-1}$
FFE <sub>PN</sub>	FFE basée sur le modèle de Park et Nelson	$\text{J m}^{-3} \text{K}^{-1}$
FFE <sub>ray</sub>	FFE basée uniquement sur la composante de rayonnement	$\text{J m}^{-3} \text{K}^{-1}$
FFE <sub>RO</sub>	FFE basée sur le modèle de Ramberg Osgood cyclique	$\text{J m}^{-3} \text{K}^{-1}$
FFE <sub>th</sub>	FFE associée à l'irréversibilité du transfert de chaleur	$\text{J m}^{-3} \text{K}^{-1}$
FFE <sub>tot</sub>	FFE prenant en compte la FFE <sub>LCF</sub> ainsi que la convection et le rayonnement	$\text{J m}^{-3} \text{K}^{-1}$
HCF	High cycle fatigue - fatigue à grand nombre de cycles	–
LCF	Low cycle fatigue - fatigue oligocyclique	–
VHCF	Very high cycle fatigue - fatigue gigacyclique	–

### Autres

$\Delta X$	Opérateur Laplacien appliqué à X	$[\text{X}] \text{m}^{-2}$
$\delta$	Quantité thermodynamique élémentaire, fonction du chemin suivi	–
$\text{div } X$	Opérateur divergence appliqué à X	$[\text{X}] \text{m}^{-1}$
$dX$	Quantité infinitésimale de X	$[\text{X}]$
$\overrightarrow{\text{grad}}(X), \nabla_x$	Opérateur gradient appliqué à X	$[\text{X}] \text{m}^{-1}$
$\dot{X}, \frac{dX}{dt}$	Dérivée temporelle de la quantité X	$[\text{X}] \text{s}^{-1}$
$\bar{X}$	Moyenne temporelle de la quantité X	$[\text{X}]$

### Lettres Grecques

$\alpha$	Exposant lié au modèle de Park et Nelson	–
----------	--	---

## 2. FATIGUE ET THERMODYNAMIQUE CLASSIQUE

$\beta$	Exposant lié au modèle de Park et Nelson	–
$\beta_c$	Compressibilité thermique isochore	$K^{-1}$
$\chi$	Diffusivité thermique du matériau	$m^2 s^{-1}$
$d\Phi$	Élément infinitésimal de puissance émise	W
$\partial\Omega$	Frontière de contrôle	$m^2$
$d\Omega$	Élément infinitésimal d'angle solide	sr
$\Delta\epsilon, \epsilon_a$	Amplitude de déformation	–
$\Delta\epsilon_p$	Amplitude de déformation plastique	–
$\Delta\sigma, \sigma_a$	Amplitude de contrainte	Pa
$\Delta t$	Discrétisation temporelle (modèle numérique)	s
$\Delta x$	Discrétisation spatiale (modèle numérique)	m
$\Delta y$	Discrétisation spatiale (modèle numérique)	m
$\epsilon$	Emissivité (totale hémisphérique ou intégrée sur la gamme [7.5 – 13] $\mu m$ )	–
$\dot{\epsilon}$	Tenseur vitesse de déformation totale	$s^{-1}$
$\dot{\epsilon}_e$	Tenseur vitesse de déformation élastique	$s^{-1}$
$\epsilon_f$	Allongement à la rupture	–
$\epsilon'_f$	Coefficient de ductilité en fatigue	–
$\epsilon_\lambda$	Emissivité monochromatique directionnelle	–
$\dot{\epsilon}_p$	Tenseur vitesse de déformation plastique	$s^{-1}$
$\eta_F$	Portion de convection et rayonnement dans la $FFE_{tot}$	–
$\eta_X$	Erreur relative de la FFE basée sur le modèle X comparé à la $FFE_{expo}$	–
$\Gamma$	Terme source de chaleur (puissance de déformation plastique)	$W m^{-3}$
$\dot{\gamma}$	Flux volumique d'entropie créée	$W m^{-3} K^{-1}$
$\lambda$	Longueur d'onde	m
$\lambda_F$	Conductivité du fluide	$W m^{-1} K^{-1}$
$\mu_F$	Viscosité dynamique du fluide	Pa s
$\mu_c$	Module de cisaillement	Pa
$\nu$	Coefficient de Poisson	–
$\overline{\nabla T}$	Gradient moyen de température	$K m^{-1}$
$\nu_{Fh}$	Viscosité cinématique du fluide ou diffusivité de quantité de mouvement	$m^2 s^{-1}$
$\nu_{FT}$	Diffusivité thermique du fluide	$m^2 s^{-1}$
$\Omega$	Volume de contrôle	$m^3$
$\phi_{cond}$	Flux de chaleur conduite	W

$\Phi_{conv}$	Flux de chaleur convectée	W
$\Pi$	Création d'entropie accumulée jusqu'à N cycles	$\text{J m}^3 \text{K}^{-1}$
$\Pi_0$	Création d'entropie accumulée initialement avant le test de fatigue	$\text{J m}^3 \text{K}^{-1}$
$\Pi_c$	Création d'entropie accumulée jusqu'à un nombre de cycles critique	$\text{J m}^3 \text{K}^{-1}$
$\Pi_T$	Création d'entropie totale du supersystème	$\text{JK}^{-1}$
$\psi$	Energie libre massique de Helmholtz	$\text{J kg}^{-1}$
$\dot{\psi}$	Flux massique d'énergie libre de Helmholtz	$\text{W kg}^{-1}$
$\rho$	Masse volumique du matériau	$\text{kg m}^{-3}$
$\rho_d$	Densité de dislocations (mètre de dislocations par mètre cube)	$\text{m m}^{-3}$
$\rho_F$	Masse volumique du fluide	$\text{kg m}^{-3}$
$\sigma$	Tenseur des contraintes	Pa
$\sigma_f$	Contrainte à la rupture	Pa
$\sigma'_f$	Coefficient de résistance à la fatigue	Pa
$\sigma_m$	Contrainte moyenne de sollicitation	Pa
$\sigma_{max}, \sigma_M$	Contrainte maximale de sollicitation	Pa
$\sigma_{min}$	Contrainte minimale de sollicitation	Pa
$\sigma_{SB}$	Constante de Stefan-Boltzmann	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$
$\tau$	Constante de temps caractéristique des échanges aux limites du matériau	s
$\theta$	Angle d'émission	–
$\theta_c$	Facteur de Carnot	–
$\theta_T = \bar{T} - T_0$	Différence de température moyenne spatiale	K
$\xi_{\sigma'_f}, \xi_{\epsilon'_f}$	Coefficients d'incertitude sur les coefficients en fatigue	–
$\xi_b, \xi_b$	Exposants d'incertitude sur les exposants en fatigue	–

### Lettres Romaines

A	Coefficient lié au modèle de Park et Nelson	Pa
$A_k$	Force thermodynamique associée aux variables internes	$[A_k]$
$A_d, B_d$	Paramètres liés à l'endommagement	–
$a_i, b_i$	Coefficients des régressions linéaires de l'accumulation d'énergie	$\text{K s}^{-1}, \text{K}$
$a_j, b_j, c_j$	Coefficients de la régression parabolique de profil de température	$\text{K m}^{-2}, \text{K m}^{-1}, \text{K}$
$a\dot{n}_k$	Flux d'anergie spécifique des variables internes	$\text{W m}^{-3}$

## 2. FATIGUE ET THERMODYNAMIQUE CLASSIQUE

B	Coefficient lié au modèle de Park et Nelson	Pa
$b$	Exposant de résistance à la fatigue	–
$Bi$	Nombre de Biot	–
$b_u$	Module de Burgers	m
C	Capacité calorifique du matériau	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
$c$	Exposant de ductilité en fatigue	–
$c_l$	Célérité de la lumière	$\text{m s}^{-1}$
$Cp_F$	Capacité calorifique du fluide	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
$d_1$	Dissipation intrinsèque	$\text{W m}^{-3}$
D	Tenseur vitesse de déformation totale	$\text{s}^{-1}$
$D_0$	Endommagement initial	–
$D_c$	Endommagement critique	–
$D_e$	Variable d'endommagement	–
$dS$	Elément infinitésimal de surface projetée	$\text{m}^2$
E	Energie interne	J
$e$	Energie interne massique	$\text{J kg}^{-1}$
$E^0$	Energie du milieu ambiant	J
$E_{conv}$	Energie dissipée par convection	J
$E_d$	Energie de ligne de dislocation (par mètre de dislocations)	$\text{J m}^{-1}$
$E_{dtot}$	Energie totale de dislocation par unité de volume d'échantillon	$\text{J m}^{-3}$
$E_{k,K}$	Energie cinétique	J
$E_p$	Energie potentielle	J
$e_p$	Epaisseur de l'éprouvette	m
$E_{ray}$	Energie dissipée par rayonnement	J
$E^s$	Energie du système	J
$E^{s+0}$	Energie du système et du milieu ambiant	J
$E_y$	Module de Young	Pa
$f$	Fréquence de sollicitation	$\text{s}^{-1}$
$\vec{f}$	Effort volumique	$\text{N m}^{-3}$
$\vec{F}$	Effort surfacique	$\text{N m}^{-2}$
$Fo_x$	Nombre de Fourier numérique suivant $x$	–
$Fo_y$	Nombre de Fourier numérique suivant $y$	–
$g$	Accélération de la pesanteur	$\text{m s}^{-2}$
$Gr$	Nombre de Grashof	–
$h$	Coefficient d'échange convectif	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$

$h_G$	Coefficient d'échange global (convection + rayonnement)	$Wm^{-2}K^{-1}$
$h_m$	Coefficient d'échange convectif moyen	$Wm^{-2}K^{-1}$
$h_p$	Constante de Planck	J s
$h_{ray}$	Coefficient d'échange équivalent rayonnement	$Wm^{-2}K^{-1}$
$i$	Nombre d'amplitudes de chargement	–
$k$	Conductivité du matériau	$Wm^{-1}K^{-1}$
$K'$	Module d'écrouissage cyclique	Pa
$k_b$	Constante de Boltzmann	$JK^{-1}$
$L$	Longueur de l'éprouvette	m
$l$	Largeur de l'éprouvette	m
$L_c$	Longueur caractéristique	m
$L_\lambda$	Luminance monochromatique	$Wm^{-2}sr^{-1}m^{-1}$
$L_\lambda^0$	Luminance monochromatique du corps noir	$Wm^{-2}sr^{-1}m^{-1}$
$L_T$	Luminance totale	$Wm^{-2}sr^{-1}$
$M_\lambda$	Emittance monochromatique	$Wm^{-2}m^{-1}$
$N$	Nombre de cycles	–
$\vec{n}$	Vecteur unitaire sortant	–
$n'$	Exposant d'écrouissage cyclique	–
$N_f = 2n_f$	Nombre de cycles à rupture	–
$N_i$	Nombre de cycles à rupture pour l'amplitude $i$	–
$n_i$	Nombre de cycles effectués sous l'amplitude $i$	–
$Nu$	Nombre de Nusselt	–
$P_0$	Pression ambiante	Pa
$P_{conv}$	Puissance dissipée par convection	W
$Pr$	Nombre de Prandtl	–
$P_{ray}$	Puissance dissipée par rayonnement	W
$\dot{q}$	Flux de chaleur volumique	$Wm^{-3}$
$\dot{Q}$	Flux de chaleur	W
$Q^0$	Quantité de chaleur associée au milieu ambiant	J
$R$	Erreur relative sur le travail de déformation plastique	–
$r$	Puissance liée à une source volumique de chaleur	$Wm^{-3}$
$RA$	Réduction de section à la rupture	–
$Ra$	Nombre de Rayleigh	–
$R_{cond}$	Résistance de conduction	$KW^{-1}$
$R_{conv}$	Résistance de convection	$KW^{-1}$

## 2. FATIGUE ET THERMODYNAMIQUE CLASSIQUE

$R_\sigma$	Ratio de chargement	–
$RX_i$	Résistance thermique de conduction du matériau X suivant la coordonnée i	$KW^{-1}$
$r_X$	Rapport de résistances thermiques	–
S	Entropie fonction d'état	$JK^{-1}$
s	Entropie fonction d'état par unité de masse	$Jkg^{-1}K^{-1}$
$S^0$	Entropie du milieu ambiant	$JK^{-1}$
$S_{cha}$	Entropie associée à la quantité de chaleur	$JK^{-1}$
$S_{cond}$	Section de passage de la chaleur transférée par conduction	$m^2$
$S_{conv}$	Surface convectée	$m^2$
$S_{int}$	Entropie créée par irréversibilité	$JK^{-1}$
$\dot{S}_{irr}$	Flux d'entropie créé par irréversibilité	$WK^{-1}$
$S_{ray}$	Surface radiative	$m^2$
$S^s$	Entropie du système	$JK^{-1}$
$S^{s+0}$	Entropie du système et du milieu ambiant	$JK^{-1}$
$S_u, UTS$	Résistance mécanique	Pa
$\bar{T}$	Température moyenne spatio-temporelle	K
T	Température absolue	K
t	Temps	s
$T_0$	Température de l'environnement	K
$T_c$	Température de combustion (TAG)	K
$t_f$	Temps à la rupture	s
$T_\lambda$	Température de luminance	K
$T_m$	Température moyenne spatiale	K
$T_p$	Température de la paroi (moyenne spatiale)	K
$U^0$	Variation d'énergie interne du milieu ambiant	J
$U_0$	Energie interne du système à l'état final	J
$\vec{v}$	Champ de vitesse	$ms^{-1}$
$V^0$	Volume du milieu ambiant	$m^3$
$V_{ép}$	Volume éprouvette	$m^3$
$V_k$	Variables internes	$[V_k]$
$\dot{V}_k$	Flux thermodynamique associé aux variables internes	$[V_k]s^{-1}$
$V^s$	Volume du système	$m^3$
W	Travail mécanique	J
$\dot{W}$	Puissance des efforts extérieurs	W

$W^0$	Travail mécanique associé au milieu ambiant	J
$W_e$	Travail de déformation élastique cyclique	$\text{J cycle}^{-1} \text{m}^{-3}$
$\dot{W}_{int}$	Puissance des efforts intérieurs	W
$W_p$	Travail de déformation plastique cyclique	$\text{J cycle}^{-1} \text{m}^{-3}$
$W_{p_{err}}$	Travail de déformation plastique cyclique avec une incertitude sur les paramètres en fatigue	$\text{J cycle}^{-1} \text{m}^{-3}$
$W_t$	Travail de déformation totale cyclique	$\text{J cycle}^{-1} \text{m}^{-3}$
$X = W_{max}$	Exergie fonction d'état, travail maximal récupérable	J
$x$	Variable d'espace	m
$\dot{x}$	Flux d'exergie spécifique	$\text{Wm}^{-3}$
$\dot{x}_d$	Flux d'exergie spécifique détruite	$\text{Wm}^{-3}$
$x_d^c$	Exergie spécifique détruite par cycle	$\text{Jm}^{-3} \text{cycle}^{-1}$
$x_d^T$	Exergie spécifique détruite	$\text{Jm}^{-3}$
$\dot{x}_e$	Flux d'exergie spécifique élastique	$\text{Wm}^{-3}$
$\dot{x}_p$	Flux d'exergie spécifique plastique	$\text{Wm}^{-3}$
$x_p^c$	Exergie spécifique plastique cyclique	$\text{Jm}^{-3} \text{cycle}^{-1}$
$x_p^T$	Exergie spécifique plastique totale	$\text{Jm}^{-3}$
$X_q$	Exergie chaleur	J
$\dot{x}_q$	Flux d'exergie spécifique chaleur	$\text{Wm}^{-3}$

---



## Références

- A. Abusoglu et M. Kanoğlu. Exergoeconomic analysis and optimization of combined heat and power production : A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 13(9) :2295 – 2308, 2009. ISSN 1364-0321. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.rser.2009.05.004>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364032109000926>. (p.64)
- M. Amiri et M. M. Khonsari. On the thermodynamics of friction and wear a review. *Entropy*, 12(5) :1021, 2010a. ISSN 1099-4300. doi : 10.3390/e12051021. URL <http://www.mdpi.com/1099-4300/12/5/1021>. (p.12)
- M. Amiri et M. M. Khonsari. On the role of entropy generation in processes involving fatigue. *Entropy*, 14(1) :24, 2012. ISSN 1099-4300. doi : 10.3390/e14010024. URL <http://www.mdpi.com/1099-4300/14/1/24>. (p.12), (p.73)
- M. Amiri et M.M. Khonsari. Life prediction of metals undergoing fatigue load based on temperature evolution. *Materials Science and Engineering : A*, 527(6) :1555 – 1559, 2010b. ISSN 0921-5093. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.msea.2009.10.025>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S092150930901154X>. (p.27)
- M. Amiri et M.M. Khonsari. Rapid determination of fatigue failure based on temperature evolution : Fully reversed bending load. *International Journal of Fatigue*, 32(2) :382 – 389, 2010c. ISSN 0142-1123. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2009.07.015>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142112309002382>. (p.27)
- M. Amiri et M. Modarres. An entropy-based damage characterization. *Entropy*, 16(12) :6434, 2014. ISSN 1099-4300. doi : 10.3390/e16126434. URL <http://www.mdpi.com/1099-4300/16/12/6434>. (p.12)
- M. Amiri, M. Modarres, et E. L. Droguett. Ae entropy for detection of fatigue crack initiation and growth. In *Prognostics and Health Management (PHM), 2015 IEEE Conference on*, pages 1–8, June 2015. doi : 10.1109/ICPHM.2015.7245038. (p.12)
- AntLabDK. Weaver ants build a horisontal bridge. URL <https://www.youtube.com/watch?v=A4uv27nSaH4>. (p.70), (p.198)
- N. Aravas, K-S. Kim, et F. A. Leckie. On the calculations of the stored energy of cold work. *ASME - Journal of Engineering Materials and Technology*, 112 :465 – 470, 1990. ISSN 0094-4289. doi : 10.1115/1.2903358. URL <http://dx.doi.org/10.1115/1.2903358>. (p.9), (p.10), (p.195)
- M. Ashjaee, M. Amiri, et J. Rostami. A correlation for free convection heat transfer from vertical wavy surfaces. *Heat and Mass Transfer*, 44(1) :101–111, 2007. ISSN 1432-1181. doi : 10.1007/s00231-006-0221-8. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00231-006-0221-8>. (p.25)
- R. U. Ayres. Eco-thermodynamics : economics and the second law. *Ecological Economics*, 26(2) :189 – 209, 1998. ISSN 0921-8009. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0921-8009\(97\)00101-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0921-8009(97)00101-8). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921800997001018>. (p.64)
- R. U. Ayres, L. W. Ayres, et K. Martínás. Exergy, waste accounting, and life-cycle analysis. *Energy*, 23(5) :355 – 363, 1998. ISSN 0360-5442. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0360-5442\(97\)00076-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0360-5442(97)00076-5). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360544297000765>. (p.64)

- Y.L. Bai, J. Bai, H.L. Li, F.J. Ke, et M.F. Xia. Damage evolution, localization and failure of solids subjected to impact loading. *International Journal of Impact Engineering*, 24(6) :685 – 701, 2000. ISSN 0734-743X. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0734-743X\(99\)00151-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0734-743X(99)00151-7). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0734743X99001517>. **(p.51)**
- A. Baïri, E. Zarco-Pernia, J.-M. García de María, J.-G. Bauzin, N. Alilat, N. Laraqi, et F. Gutiérrez. Nusselt-rayleigh correlations for free convection in 2d air-filled parallelogrammic enclosures with isothermal active walls. *Heat and Mass Transfer*, 47(5) :589–595, May 2011. ISSN 1432-1181. doi : 10.1007/s00231-010-0750-z. URL <https://doi.org/10.1007/s00231-010-0750-z>. **(p.24)**
- N. R. Baral, D. M. Wituszynski, J. F. Martin, et A. Shah. Sustainability assessment of cellulosic biorefinery stillage utilization methods using emergy analysis. *Energy*, 109 :13 – 28, 2016. ISSN 0360-5442. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.energy.2016.04.085>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360544216304984>. **(p.64)**
- R. Basan, D. Rubeša, M. Franulović, et T. Marohnić. Some considerations on the evaluation of methods for the estimation of fatigue parameters from monotonic properties. *Procedia Engineering*, 101 :18 – 25, 2015. ISSN 1877-7058. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.proeng.2015.02.004>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705815006025>. **(p.16), (p.17), (p.196)**
- C. Basaran et S. Nie. An irreversible thermodynamics theory for damage mechanics of solids. *International Journal of Damage Mechanics*, 13(3) :205–223, 2004. doi : 10.1177/1056789504041058. URL <http://ijd.sagepub.com/content/13/3/205.abstract>. **(p.11), (p.48)**
- C. Basaran, M. Lin, et H. Ye. A thermodynamic model for electrical current induced damage. *International Journal of Solids and Structures*, 40(26) :7315 – 7327, 2003. ISSN 0020-7683. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2003.08.018>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768303004761>. **(p.11), (p.48)**
- C. Bathias. *Fatigue Limit in Metals*. 2013. ISBN 978-1-84821-476-7. **(p.8)**
- C. Bathias. Coupling effect of plasticity, thermal dissipation and metallurgical stability in ultrasonic fatigue. *International Journal of Fatigue*, 60 :18 – 22, 2014. ISSN 0142-1123. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2013.06.004>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142112313001709>. New Advances in {VHCF}. **(p.27)**
- C. Bathias et J. Bâillon. *La fatigue des matériaux et des structures*. 1997. **(p.7), (p.195)**
- S. Baumann. Direct emissivity measurements of painted metals for improved temperature estimation during laser damage testing, 2014. **(p.30)**
- A. Bäuml et T. Seeger. *Materials data for cyclic loading*. Elsevier Science Publishers, 1990. **(p.15)**
- A. Bejan. *Advanced Engineering Thermodynamics*. Wiley, New Jersey, 4th edition, 2016. **(p.21)**
- R. Benelmir, A. Lallemand, et M. Feidt. Analyse exergetique. *Techniques de l'ingénieur Thermodynamique et énergétique*, base documentaire : TIB216DUO.(ref. article : be8015), 2002. URL <http://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/energies-th4/thermodynamique-et-energetique-42216210/analyse-exergetique-be8015/>. **(p.65), (p.67), (p.198)**

- B. Berthel. *Mesures thermographiques de champs de dissipation accompagnant la fatigue à grand nombre de cycles des aciers*. PhD thesis, Université Montpellier II, 2007. (p.21), (p.31)
- M.B. Bever, D.L. Holt, et A.L. Titchener. The stored energy of cold work. *Progress in Materials Science*, 17 :5 – 177, 1973. ISSN 0079-6425. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0079-6425\(73\)90001-7](http://dx.doi.org/10.1016/0079-6425(73)90001-7). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0079642573900017>. (p.9), (p.10), (p.195)
- E. Bilgen et H. Takahashi. Exergy analysis and experimental study of heat pump systems. *Exergy, An International Journal*, 2(4) :259 – 265, 2002. ISSN 1164-0235. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S1164-0235\(02\)00083-3](http://dx.doi.org/10.1016/S1164-0235(02)00083-3). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1164023502000833>. (p.64)
- A. Blanche. *Effets dissipatifs en fatigue à grand et très grand nombre de cycles*. PhD thesis, Université Montpellier II, 2012. (p.21)
- A. Blanche, A. Chrysochoos, N. Ranc, et V. Favier. Dissipation assessments during dynamic very high cycle fatigue tests. *Experimental Mechanics*, 55(4) :699–709, 2015. ISSN 1741-2765. doi : 10.1007/s11340-014-9857-3. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11340-014-9857-3>. (p.27), (p.37), (p.196)
- T. Boulanger, A. Chrysochoos, C. Mabru, et A. Galtier. Calorimetric analysis of dissipative and thermoelastic effects associated with the fatigue behavior of steels. *International Journal of Fatigue*, 26(3) :221 – 229, 2004. ISSN 0142-1123. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0142-1123\(03\)00171-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0142-1123(03)00171-3). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142112303001713>. (p.26)
- M.D. Bryant, M.M. Khonsari, et F.F. Ling. On the thermodynamics of degradation. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 464(2096) :2001–2014, 2008. ISSN 1364-5021. doi : 10.1098/rspa.2007.0371. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/464/2096/2001>. (p.11), (p.12)
- BST. Rapport d'enquête ferroviaire r09d0012, 2009. URL [www.tsb.gc.ca/fra/rapports-reports/rail/2009/r09d0012/r09d0012.pdf](http://www.tsb.gc.ca/fra/rapports-reports/rail/2009/r09d0012/r09d0012.pdf). (p.5)
- J.L. Chaboche. Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity. *International Journal of Plasticity*, 2(2) :149 – 188, 1986. ISSN 0749-6419. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0749-6419\(86\)90010-0](http://dx.doi.org/10.1016/0749-6419(86)90010-0). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0749641986900100>. (p.20)
- A. Chrysochoos et H. Louche. An infrared image processing to analyse the calorific effects accompanying strain localisation. *International Journal of Engineering Science*, 38(16) : 1759 – 1788, 2000. ISSN 0020-7225. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7225\(00\)00002-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7225(00)00002-1). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020722500000021>. (p.26)
- A. Chrysochoos et R. Peyroux. Analyse expérimentale et modélisation numérique des couplages thermomécaniques dans les matériaux solides. *Revue Générale de Thermique*, 37(7) :582 – 606, 1998. ISSN 0035-3159. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0035-3159\(98\)80036-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0035-3159(98)80036-6). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0035315998800366>. (p.27)

- A. Chrysochoos, J.-C. Chezeaux, et H. Caumon. Analyse thermomécanique des lois de comportement par thermographie infrarouge. *Rev. Phys. Appl. (Paris)*, 24(2) :215–225, 1989. doi : 10.1051/rphysap:01989002402021500. URL <http://dx.doi.org/10.1051/rphysap:01989002402021500>. (p.27), (p.196)
- L. M. Clarebrough, M.E. Hargreaves, G. W. West, et A. K. Head. The energy stored in fatigued metals. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 242(1229) :160–166, 1957. ISSN 0080-4630. doi : 10.1098/rspa.1957.0164. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/242/1229/160>. (p.9), (p.22), (p.23)
- L. F. Coffin. A note on low cycle fatigue laws. *Journal of Materials*, 6(2) :388 – 402, 1971. (p.8)
- B. D. Coleman et M. E. Gurtin. Thermodynamics with internal state variables. *The Journal of Chemical Physics*, 47(2) :597–613, 1967. doi : <http://dx.doi.org/10.1063/1.1711937>. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jcp/47/2/10.1063/1.1711937>. (p.20)
- A. Valero Delgado. *Exergy evolution of the mineral capital on earth*. PhD thesis, University of Zaragoza, 2008. (p.64), (p.65), (p.198)
- I. Dincer et Y. A. Cengel. Energy, entropy and exergy concepts and their roles in thermal engineering. *Entropy*, 3(3) :116, 2001. ISSN 1099-4300. doi : 10.3390/e3030116. URL <http://www.mdpi.com/1099-4300/3/3/116>. (p.64), (p.66), (p.198)
- I. Dincer et M. A. Rosen. *Exergy*. Elsevier, second edition, 2013. ISBN 978-0-08-097089-9. doi : 10.1016/B978-0-08-097089-9.00001-2. URL [dx.doi.org/10.1016/B978-0-08-097089-9.00001-2](http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-08-097089-9.00001-2). (p.64), (p.65), (p.198)
- J. C. Dixon. *Appendix B : Properties of Air*, pages 375–378. John Wiley and Sons, Ltd, 2007. ISBN 9780470516430. doi : 10.1002/9780470516430.app2. URL <http://dx.doi.org/10.1002/9780470516430.app2>. (p.25)
- Y. Duyi et W. Zhenlin. Change characteristics of static mechanical property parameters and dislocation structures of 45 medium carbon structural steel during fatigue failure process. *Materials Science and Engineering : A*, 297(1–2) :54 – 61, 2001a. ISSN 0921-5093. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0921-5093\(00\)01257-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0921-5093(00)01257-0). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921509300012570>. (p.47)
- Y. Duyi et W. Zhenlin. A new approach to low-cycle fatigue damage based on exhaustion of static toughness and dissipation of cyclic plastic strain energy during fatigue. *International Journal of Fatigue*, 23(8) :679 – 687, 2001b. ISSN 0142-1123. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0142-1123\(01\)00027-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0142-1123(01)00027-5). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142112301000275>. (p.47)
- Y. Duyi et W. Zhenlin. An approach to investigate pre-nucleation fatigue damage of cyclically loaded metals using vickers microhardness tests. *International Journal of Fatigue*, 23(1) :85 – 91, 2001c. ISSN 0142-1123. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0142-1123\(00\)00034-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0142-1123(00)00034-7). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142112300000347>. (p.47)
- R. B. Evans. Thermoeconomic isolation and essergy analysis. *Energy*, 5(8) :804 – 821, 1980. ISSN 0360-5442. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0360-5442\(80\)90098-5](http://dx.doi.org/10.1016/0360-5442(80)90098-5). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0360544280900985>. (p.64)
- B. Eyglunent. *Manuel de thermique théorie et pratique (2e éd.)*. Hermès, 1997. (p.25)

- G. Fargione, A. Geraci, G. La Rosa, et A. Risitano. Rapid determination of the fatigue curve by the thermographic method. *International Journal of Fatigue*, 24(1) :11 – 19, 2002. ISSN 0142-1123. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0142-1123\(01\)00107-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0142-1123(01)00107-4). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142112301001074>. (p.9)
- A. Fatemi, A. Plaseied, A.K. Khosrovaneh, et D. Tanner. Application of bi-linear log–log s–n model to strain-controlled fatigue data of aluminum alloys and its effect on life predictions. *International Journal of Fatigue*, 27(9) :1040 – 1050, 2005. ISSN 0142-1123. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2005.03.003>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142112305000770>. (p.16), (p.55), (p.196)
- M. Feidt. Two examples of exergy optimization regarding the “thermo-frigopump” and combined heat and power systems. *Entropy*, 15(2) :544–558, 2013. ISSN 1099-4300. doi : 10.3390/e15020544. URL <http://www.mdpi.com/1099-4300/15/2/544>. (p.64)
- M. Feidt et M. Costea. Energy and exergy analysis and optimization of combined heat and power systems. comparison of various systems. *Energies*, 5(9) :3701–3722, 2012. ISSN 1996-1073. doi : 10.3390/en5093701. URL <http://www.mdpi.com/1996-1073/5/9/3701>. (p.64)
- M. L. Feidt. Optimal use of energy systems and processes. *International Journal of Exergy*, 5 (5/6) :500–531, 2008. (p.64)
- M. Fivel et M. Verdier. Frank-read mechanism. URL <http://www.numodis.fr/tridis/frank.html>. (p.7), (p.195)
- D. FRANÇOIS. Lois de comportement des métaux Élastoplasticité. viscoplasticité. *Techniques de l'ingénieur Essais mécaniques sur les métaux et alliages*, base documentaire : TIB531DUO.(ref. article : m4152), 2017. URL <http://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/materiaux-th11/essais-mecaniques-sur-les-metaux-et-alliages-42531210/lois-de-comportement-des-metaux-m4152/>. fre. (p.35)
- Junfei Geng, D. Howell, E. Longhi, R. P. Behringer, G. Reydellet, L. Vanel, E. Clément, et S. Luding. Footprints in sand : The response of a granular material to local perturbations. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :035506, Jul 2001. doi : 10.1103/PhysRevLett.87.035506. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.035506>. (p.78), (p.199)
- P. Germain, Q. S. Nguyen, et P. Suquet. Continuum thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, 50 :1010 – 1020, 1983. ISSN 0021-8936. doi : 10.1115/1.3167184. URL <http://dx.doi.org/10.1115/1.3167184>. (p.20)
- M. Gouy. Sur l'énergie utilisable. *Journal de physique théorique et appliquée*, 8(1) :501 – 518, 1889. (p.64)
- L. Grosu. *Exergie et systèmes énergétiques : Transition vers l'exergétique*. Presses Académiques Francophones, 2014. (p.64)
- L. Grosu, M. Feidt, et R. Benelmir. Study of the improvement in the performance coefficient of machines operating with three reservoirs. *International Journal of Exergy*, 1(1) :147–162, 2004. (p.64)
- Q. Guo, X. Guo, J. Fan, R. Syed, et C. Wu. An energy method for rapid evaluation of high-cycle fatigue parameters based on intrinsic dissipation. *International Journal of Fatigue*, 80 :136 – 144, 2015. ISSN 0142-1123. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2015.04.016>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142112315001322>. (p.26)

- G. R. Halford. The energy required for fatigue. *Journal of Materials*, 1 :3 – 18, 1966. **(p.9)**
- R. Hambli. Comparison between lemaître and gurson damage models in crack growth simulation during blanking process. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43(12) : 2769 – 2790, 2001. ISSN 0020-7403. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7403\(01\)00070-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7403(01)00070-4). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740301000704>. **(p.47)**
- S.-G. Hong, S. Yoon, et S.-B. Lee. The effect of temperature on low-cycle fatigue behavior of prior cold worked 316l stainless steel. *International Journal of Fatigue*, 25(9–11) :1293 – 1300, 2003. ISSN 0142-1123. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0142-1123\(03\)00154-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0142-1123(03)00154-3). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142112303001543>. International Conference on Fatigue Damage of Structural Materials {IV}. **(p.71)**
- M. R. Hoque, G. Villalba Méndez, X. Gabarell Durany, et C. S. Sala. Exergy analysis of construction material manufacturing processes and assessment of their improvement potentials. *International Journal of Exergy*, 16(1) :22–52, 2015. **(p.64)**
- F. Iacoviello, G. A. Ferro, L. Susmel, A. Risitano, G. Fargione, F. Giudice, et G. Patanè. Xxiii italian group of fracture meeting, igfxxiii evaluation of the relative plastic work factor during the fatigue test. *Procedia Engineering*, 109 :346 – 355, 2015. ISSN 1877-7058. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.proeng.2015.06.242>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705815012047>. **(p.9)**
- D. Iribarren, I. Vázquez-Rowe, B. Rugani, et E. Benetto. On the feasibility of using emergy analysis as a source of benchmarking criteria through data envelopment analysis : A case study for wind energy. *Energy*, 67 :527 – 537, 2014. ISSN 0360-5442. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.energy.2014.01.109>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360544214001315>. **(p.64)**
- Y. F. Ital'yantsev. Thermodynamic state of deformed solids. report 1. determination of local functions of state. *Strength of Materials*, 16(2) :238–241, 1984a. ISSN 1573-9325. doi : 10.1007/BF01530067. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01530067>. **(p.11)**
- Y. F. Ital'yantsev. Thermodynamic state of deformed solids. report 2. entropy failure criteria and their application for simple tensile loading problems. *Strength of Materials*, 16(2) : 242–247, 1984b. ISSN 1573-9325. doi : 10.1007/BF01530068. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01530068>. **(p.11)**
- J. Kaleta, R. Błotny, et H. Harig. The accumulated internal energy in the fatigue strength region. In *Advances in fracture research*, pages 1195–1202, Houston, 1989. Pergamon Press. **(p.31), (p.32), (p.196)**
- J.H. Keenan. Availability and irreversibility in thermodynamics. *British Journal of Applied Physics*, 2(7) :183 – 192, 1951. **(p.64)**
- M.M. Khonsari et M. Amiri. *Introduction to thermodynamics of Mechanical Fatigue*. CRC press, 2012. **(p.11), (p.22), (p.23)**
- F. A. Talla Konchou, C. V. Aloyem Kaze, et R. Tchinda. An application of energy and exergy analysis at the transportation sector of cameroon. *International Journal of Exergy*, 18(2) : 129–141, 2015. **(p.64)**
- D. Kondepudi et I. Prigogine. *Modern Thermodynamics : From Heat Engines to Dissipative Structures*. Wiley, United Kingdom, 2nd edition, 2014. **(p.21)**

- Z.-B. Kuang. *Some thermodynamic problems in continuum mechanics*. InTech, 2011. doi : 10.5772/22610. URL <https://www.intechopen.com/books/thermodynamics-kinetics-of-dynamic-systems/some-thermodynamic-problems-in-continuum-mechanics>. (p.70)
- G. La Rosa et A. Risitano. Thermographic methodology for rapid determination of the fatigue limit of materials and mechanical components. *International Journal of Fatigue*, 22(1) :65 – 73, 2000. ISSN 0142-1123. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0142-1123\(99\)00088-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0142-1123(99)00088-2). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142112399000882>. (p.9)
- N. Laraqi et E. Monier-Vinard. New analytical solution for solving steady-state heat conduction problems with singularities. *Thermal Science*, 17 :665–672, 2013. ISSN 0354-9836. doi : 10.2298/TSCI120826070L. URL <http://www.doiserbia.nb.rs/Article.aspx?ID=0354-98361300070L>. (p.56)
- J. Lemaitre et J.L. Chaboche. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge UK, 1990. (p.20), (p.22), (p.23), (p.72)
- J. Lemaitre et J. Dufailly. Damage measurements. *Engineering Fracture Mechanics*, 28(5) :643 – 661, 1987. ISSN 0013-7944. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0013-7944\(87\)90059-2](http://dx.doi.org/10.1016/0013-7944(87)90059-2). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0013794487900592>. (p.47)
- J. Lemaitre, J.L. Chaboche, A. Benallal, et R. Desmorat. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, troisième édition, 2009. ISBN 978-2-10-054133-1. (p.20)
- C. LExcellent. Aspects thermodynamiques du comportement en fluage biaxial de l'aluminium (99,5 *Rev. Phys. Appl. (Paris)*, 19(6) :425–430, 1984. doi : 10.1051/rphysap:01984001906042500. URL <http://dx.doi.org/10.1051/rphysap:01984001906042500>. (p.20)
- R. Li, L. Grosu, et D. Queiros-Condé. Multi-objective optimization of stirling engine using finite physical dimensions thermodynamics (fpdt) method. *Energy Conversion and Management*, 124 :517 – 527, 2016a. ISSN 0196-8904. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.enconman.2016.07.047>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0196890416306252>. (p.64)
- R. Li, L. Grosu, et D. Queiros-Condé. Losses effect on the performance of a gamma type stirling engine. *Energy Conversion and Management*, 114 :28 – 37, 2016b. ISSN 0196-8904. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.enconman.2016.02.007>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0196890416300309>. (p.64), (p.65), (p.198)
- M. Liakat et M.M. Khonsari. An experimental approach to estimate damage and remaining life of metals under uniaxial fatigue loading. *Materials and Design*, 57 :289 – 297, 2014a. ISSN 0261-3069. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.matdes.2013.12.027>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0261306913011606>. (p.12)
- M. Liakat et M.M. Khonsari. Rapid estimation of fatigue entropy and toughness in metals. *Materials and Design (1980-2015)*, 62 :149 – 157, 2014b. ISSN 0261-3069. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.matdes.2014.04.086>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0261306914003616>. (p.12), (p.14), (p.35), (p.196)
- M. Liakat et M.M. Khonsari. Entropic characterization of metal fatigue with stress concentration. *International Journal of Fatigue*, 70 :223 – 234, 2015a. ISSN 0142-1123. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2014.09.014>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142112314002424>. (p.11), (p.24)

- M. Liakat et M.M. Khonsari. On the anelasticity and fatigue fracture entropy in high-cycle metal fatigue. *Materials and Design*, 82 :18 – 27, 2015b. ISSN 0264-1275. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.matdes.2015.04.034>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0261306915002162>. **(p.12), (p.14), (p.196)**
- A. Lipski et S. Mroziński. Approximate determination of a strain-controlled fatigue life curve for aluminum alloy sheets for aircraft structures. *International Journal of Fatigue*, 39 :2 – 7, 2012. ISSN 0142-1123. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2011.08.007>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142112311002064>. Physical and phenomenological approaches to fatigue damage. **(p.16), (p.41), (p.55), (p.196)**
- U. Lucia. Gouy-Stodola Theorem as a variational principle for open systems. *ArXiv e-prints*, August 2012. **(p.67)**
- S. S. Manson. Interpretive report on cumulative fatigue damage in the low cycle range. *Welding Journal Research*, 43 :344 – 352, 1964a. **(p.8)**
- S. S. Manson. Fatigue : A complex subject - some simple approximations. *Experimental Mechanics*, 5 :193 – 226, 1964b. **(p.13), (p.16)**
- T. Marohnić, R. Basan, et M. Franulović. Evaluation of methods for estimation of cyclic stress-strain parameters from monotonic properties of steels. *Metals*, 7, 2017. ISSN 2075-4701. doi : 10.3390/met7010017. URL <http://www.mdpi.com/2075-4701/7/1/17>. **(p.16)**
- M. Maziere et S. Forest. Strain gradient plasticity modeling and finite element simulation of luders band formation and propagation. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 27(1) :83–104, 2015. ISSN 1432-0959. doi : 10.1007/s00161-013-0331-8. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00161-013-0331-8>. **(p.20)**
- M.A. Meggiolaro et J.T.P. Castro. Statistical evaluation of strain-life fatigue crack initiation predictions. *International Journal of Fatigue*, 26(5) :463 – 476, 2004. ISSN 0142-1123. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2003.10.003>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142112303002469>. **(p.15), (p.16), (p.55), (p.196)**
- G. Meneghetti. Analysis of the fatigue strength of a stainless steel based on the energy dissipation. *International Journal of Fatigue*, 29 :81 – 94, 2007. **(p.25), (p.37), (p.38)**
- G. Meneghetti et M. Ricotta. The use of the specific heat loss to analyse the low- and high-cycle fatigue behaviour of plain and notched specimens made of a stainless steel. *Engineering Fracture Mechanics*, 81 :2 – 16, 2012. ISSN 0013-7944. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2011.06.010>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794411002347>. Fracture and Damage Analysis in Design. **(p.9), (p.10), (p.31), (p.195)**
- M. A. Miner. Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics*, 67 :159 – 164, 1945. **(p.47)**
- M.R. Mitchell. *Fundamentals of modern fatigue analysis for design*. American society for metals, 1979. **(p.15)**
- M. F. Modest. *Radiative heat transfer*. Elsevier, 3 edition, 2013. ISBN 978-0-12-386944-9. **(p.29), (p.196)**
- J. Morrow. Cyclic plastic strain energy and fatigue of metals. *ASTM STP*, 378 :45 – 87, 1965. **(p.9), (p.10), (p.12), (p.195)**

- U. Muralidharan et S. S. Manson. A modified universal slopes equation for estimation of fatigue characteristics of metals. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 110 :55 – 58, 1988. ISSN 0094-4289. doi : 10.1115/1.3226010. URL <http://dx.doi.org/10.1115/1.3226010>. (p.14), (p.15)
- M. Naderi et M.M. Khonsari. An experimental approach to low-cycle fatigue damage based on thermodynamic entropy. *International Journal of Solids and Structures*, 47(6) :875 – 880, 2010a. ISSN 0020-7683. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.12.005>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768309004703>. (p.11), (p.48), (p.49), (p.50), (p.51), (p.73), (p.74), (p.203)
- M. Naderi et M.M. Khonsari. A thermodynamic approach to fatigue damage accumulation under variable loading. *Materials Science and Engineering : A*, 527(23) :6133 – 6139, 2010b. ISSN 0921-5093. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.msea.2010.05.018>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921509310005307>. (p.11), (p.13), (p.14), (p.195), (p.196)
- M. Naderi et M.M. Khonsari. Thermodynamic analysis of fatigue failure in a composite laminate. *Mechanics of Materials*, 46 :113 – 122, 2012. ISSN 0167-6636. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmat.2011.12.003>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167663611002201>. (p.11), (p.14), (p.196)
- M. Naderi, M. Amiri, et M. M. Khonsari. On the thermodynamic entropy of fatigue fracture. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2009. ISSN 1364-5021. doi : 10.1098/rspa.2009.0348. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/early/2009/10/15/rspa.2009.0348>. (p.11), (p.12), (p.35), (p.50), (p.73), (p.74), (p.195), (p.203)
- J.H. Ong. An improved technique for the prediction of axial fatigue life from tensile data. *International Journal of Fatigue*, 15(3) :213 – 219, 1993. ISSN 0142-1123. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0142-1123\(93\)90179-T](http://dx.doi.org/10.1016/0142-1123(93)90179-T). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/014211239390179T>. (p.14), (p.15)
- L. Onsager. Reciprocal relations in irreversible processes. i. *Phys. Rev.*, 37 :405–426, Feb 1931a. doi : 10.1103/PhysRev.37.405. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.37.405>. (p.21)
- L. Onsager. Reciprocal relations in irreversible processes. ii. *Phys. Rev.*, 38 :2265–2279, Dec 1931b. doi : 10.1103/PhysRev.38.2265. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.38.2265>. (p.21)
- V. L. Ontiveros, M. Modarres, et M. Amiri. Estimation of reliability of structures subject to fatigue loading using plastic strain energy and thermodynamic entropy generation. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O : Journal of Risk and Reliability*, 2015. doi : 10.1177/1748006X15574143. URL <http://pio.sagepub.com/content/early/2015/02/27/1748006X15574143.abstract>. (p.12)
- N. Özişik. *Heat conduction*. John Wiley and Sons, New York, 2 edition, 1993. (p.57)
- J. Park et D. Nelson. Evaluation of an energy-based approach and a critical plane approach for predicting constant amplitude multiaxial fatigue life. *International Journal of Fatigue*, 22(1) :23 – 39, 2000. ISSN 0142-1123. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0142-1123\(99\)00111-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0142-1123(99)00111-5). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142112399001115>. (p.9), (p.22), (p.55), (p.73)

- J-H. Park et J-H. Song. Detailed evaluation of methods for estimation of fatigue properties. *International Journal of Fatigue*, 17(5) :365 – 373, 1995. ISSN 0142-1123. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0142-1123\(95\)99737-U](http://dx.doi.org/10.1016/0142-1123(95)99737-U). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/014211239599737U>. (p.15)
- E. M. Pellegrino, E. Ghibaudi, et L. Cerruti. Clausius' disgregation : A conceptual relic that sheds light on the second law. *Entropy*, 17(7) :4500–4518, 2015. ISSN 1099-4300. doi : 10.3390/e17074500. URL <http://www.mdpi.com/1099-4300/17/7/4500>. (p.64)
- Emilio Marco Pellegrino et Elena Ghibaudi. Entropy from clausius to kolmogorov : historical evolution of an open concept. In Pasquale Tucci, editor, *Atti del XXXIV Convegno annuale*, Firenze, 2014. SISFA, Pavia university press. (p.4)
- S. I. Pishbin, M. Ghazikhani, et S. M. R. M. Razavi. Experimental study on the effects of flame regime on the exergy destruction in premixed low swirl combustion. *International Journal of Exergy*, 17(3) :267–286, 2015. (p.25), (p.64)
- G. Popescu, V. Radcenco, M. Costea, et M. Feidt. Optimisation thermodynamique en temps fini du moteur de stirling endo- et exo-irréversible. *Revue Générale de Thermique*, 35(418) : 656 – 661, 1996. ISSN 0035-3159. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0035-3159\(96\)80062-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0035-3159(96)80062-6). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0035315996800626>. (p.64)
- H. Pron et T. Bouache. Alternative thermal calibrations of focal plane array infrared cameras. *Quantitative InfraRed Thermography Journal*, 13(1) :94–108, 2016. doi : 10.1080/17686733.2015.1131854. URL <http://dx.doi.org/10.1080/17686733.2015.1131854>. (p.31)
- D. Queiros-Condé et M. Feidt. Exergie et thermodynamique en dimension finie, une approche géométrique par la théorie des peaux entropiques. In *Journée d'Exergie*. ENSTA, 2008. (p.64)
- D. Queiros-Condé, L. Grosu, et P. Ribeiro, editors. *L'EXERGIE, de l'énergie à l'écologie : un outil d'analyse et de décision pour un Développement Durable*, 2011. (p.64)
- D. Queiros-Condé et M. Feidt, editors. *Constructal Theory And Multi-Scale Geometries - Theory And Applications In Energetics, Chemical Engineering And Materials*. Presses de l'Ensta, 2010. (p.64)
- P. Rabbe, H-P. Lieurade, et A. GALTIER. Essais de fatigue partie i. *Techniques de l'ingénieur Essais mécaniques sur les métaux et alliages*, base documentaire : TIB531DUO.(ref. article : m4170), 2016. URL <http://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/materiaux-th11/essais-mecaniques-sur-les-metaux-et-alliages-42531210/essais-de-fatigue-m4170/>. fre. (p.6), (p.195)
- N. Ranc, D. Wagner, et P.C. Paris. Study of thermal effects associated with crack propagation during very high cycle fatigue tests. *Acta Materialia*, 56(15) :4012 – 4021, 2008. ISSN 1359-6454. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.actamat.2008.04.023>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359645408002978>. (p.27)
- Z. Rant. Exergie, ein neues wort fur technische arbeitsfahigkeit. *Forsch. Ing. Wes.*, 22(1) :36 – 37, 1956. (p.64)

- J.R. Rice. Inelastic constitutive relations for solids : An internal-variable theory and its application to metal plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 19(6) :433 – 455, 1971. ISSN 0022-5096. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0022-5096\(71\)90010-X](http://dx.doi.org/10.1016/0022-5096(71)90010-X). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002250967190010X>. (p.20)
- M. L. Roessle et A. Fatemi. Strain-controlled fatigue properties of steels and some simple approximations. *International Journal of Fatigue*, 22(6) :495 – 511, 2000. (p.15)
- P. Rosakis, A.J. Rosakis, G. Ravichandran, et J. Hodowany. A thermodynamic internal variable model for the partition of plastic work into heat and stored energy in metals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(3) :581 – 607, 2000. ISSN 0022-5096. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00048-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00048-4). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509699000484>. (p.20)
- M. A. Rosen. Exergy and economics : Is exergy profitable? *Exergy, An International Journal*, 2(4) :218 – 220, 2002a. ISSN 1164-0235. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S1164-0235\(02\)00086-9](http://dx.doi.org/10.1016/S1164-0235(02)00086-9). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1164023502000869>. (p.64)
- M. A. Rosen. Exergy and government policy : Is there a link? *Exergy, An International Journal*, 2(4) :224 – 226, 2002b. ISSN 1164-0235. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S1164-0235\(02\)00088-2](http://dx.doi.org/10.1016/S1164-0235(02)00088-2). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1164023502000882>. (p.64)
- M. A. Rosen. Thermodynamics education : Is present coverage of exergy sufficient and appropriate? *Exergy, An International Journal*, 2(4) :207 – 210, 2002c. ISSN 1164-0235. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S1164-0235\(02\)00057-2](http://dx.doi.org/10.1016/S1164-0235(02)00057-2). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1164023502000572>. (p.64)
- M. A. Rosen. Can exergy help us understand and address environmental concerns? *Exergy, An International Journal*, 2(4) :214 – 217, 2002d. ISSN 1164-0235. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S1164-0235\(02\)00085-7](http://dx.doi.org/10.1016/S1164-0235(02)00085-7). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1164023502000857>. (p.64)
- M. A. Rosen. Should we educate the public about exergy? *Exergy, An International Journal*, 2(4) :211 – 213, 2002e. ISSN 1164-0235. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S1164-0235\(02\)00084-5](http://dx.doi.org/10.1016/S1164-0235(02)00084-5). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1164023502000845>. (p.64)
- M. A. Rosen. Does industry embrace exergy? *Exergy, An International Journal*, 2(4) :221 – 223, 2002f. ISSN 1164-0235. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S1164-0235\(02\)00087-0](http://dx.doi.org/10.1016/S1164-0235(02)00087-0). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1164023502000870>. (p.64)
- E. Sciubba. On the second-law inconsistency of emergy analysis. *Energy*, 35(9) :3696 – 3706, 2010. ISSN 0360-5442. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.energy.2010.05.015>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360544210002781>. (p.64)
- E. Sciubba et G. Wall. A brief commented history of exergy from the beginnings to 2004. *International journal of thermodynamics*, 10(1) :1 – 26, 2007. ISSN 1301-9724. (p.64)
- D.F. Socie, M.R. Mitchell, et E.M. Caulfield. Fundamentals of modern fatigue analysis, 1977. (p.15)
- E. Sorgüven et M. Özilgen. First and second law work production efficiency of a muscle cell. *International Journal of Exergy*, 18(2) :142–156, 2015. (p.64)

- R. I. Stephens, A. Fatemi, R. R. Stephens, et H. O. Fuchs. *Metal Fatigue in Engineering*. Wiley and Sons, second edition, 2001. (p.8), (p.23), (p.35), (p.41)
- A. Stodola. *Die Dampfturbinen und die Aussichten der Wärmekraftmaschinen*. 1903. (p.64)
- G. Tsatsaronis. Recent developments in exergy analysis and exergoeconomics. *International Journal of Exergy*, 5(5/6) :489–499, 2008. (p.64)
- W. Wechsatoł, S. Lorente, et A. Bejan. Tree-shaped flow structures : are both thermal-resistance and flow-resistance minimisations necessary? *International Journal of Exergy*, 1(1) :2–17, 2004. (p.64)
- B. Yilong, X. Mengfen, K. Fujiu, et L. Huiling. Closed trans-scale statistical microdamage mechanics. *Acta Mechanica Sinica*, 18(1) :1–17, 2002. ISSN 1614-3116. doi : 10.1007/BF02487520. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02487520>. (p.51)
- C. Yuan-Sheng et H. Yungbin. Measurement of continuous damage parameter. *Engineering Fracture Mechanics*, 31(6) :985 – 992, 1988. ISSN 0013-7944. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0013-7944\(88\)90209-3](http://dx.doi.org/10.1016/0013-7944(88)90209-3). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0013794488902093>. (p.47)
- R. Yumrutaş, M. Kunduz, et M. Kanođlu. Exergy analysis of vapor compression refrigeration systems. *Exergy, An International Journal*, 2(4) :266 – 272, 2002. ISSN 1164-0235. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S1164-0235\(02\)00079-1](http://dx.doi.org/10.1016/S1164-0235(02)00079-1). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1164023502000791>. (p.64)
- T. Zheng, L. Chen, F. Sun, et C. Wu. Power, power density and efficiency optimization of an endoreversible braysson cycle. *Exergy, An International Journal*, 2(4) :380 – 386, 2002. ISSN 1164-0235. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S1164-0235\(02\)00093-6](http://dx.doi.org/10.1016/S1164-0235(02)00093-6). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1164023502000936>. (p.64)

## Analyse multi-échelle en mécanique

*En mathématique, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue*

– John Von Neumann

### Sommaire

---

<b>3.1 Historique</b> . . . . .	<b>99</b>
<b>3.2 De la géométrie fractale simple à la dépendance en échelle</b> . . . . .	<b>101</b>
3.2.1 Généralités sur les objets fractals . . . . .	101
3.2.2 Autosimilarité stricte comme cas particulier . . . . .	104
3.2.3 Fractal dépendant d'échelle . . . . .	106
<b>3.3 Caractérisation et généralisation des géométries dépendantes d'échelle</b> . . . . .	<b>108</b>
3.3.1 Les différents cas simples . . . . .	108
3.3.2 Généralisation du puits d'entropie d'échelle en régime stationnaire . . . . .	110
3.3.3 Fractals dissipatifs déterministes et log-périodicité . . . . .	115
<b>3.4 Géométrie fractale et entropie d'échelle en mécanique des solides</b> . . . . .	<b>131</b>
3.4.1 Caractérisation fractale des propriétés mécaniques . . . . .	131
3.4.2 Multifractal Scaling Law et dépendance en échelle . . . . .	137
3.4.3 Analyse de faciès de rupture . . . . .	141
3.4.4 Fragmentation mécanique . . . . .	150
<b>3.5 Fractal parabolique et lien constructal</b> . . . . .	<b>156</b>
3.5.1 Introduction . . . . .	156
3.5.2 Approche constructale en mécanique des milieux continus . . . . .	159
3.5.3 Approche constructale microscopique . . . . .	162
<b>3.6 Conclusion</b> . . . . .	<b>165</b>
<b>Nomenclature - Analyse multi-échelle en mécanique</b> . . . . .	<b>167</b>
<b>Références</b> . . . . .	<b>171</b>

---

### 3.1 Historique

**D**EPUIS le quatrième siècle avant J-C et Euclide, la géométrie classiquement appelée euclidienne s'est popularisée à travers la définition d'un point, d'un segment, d'une surface et d'un volume. Un siècle plus tard un autre type de géométrie, la géométrie fractale, fait son apparition sans que l'on s'en aperçoive. Cette géométrie est la baderne d'Apollonius consistant à tracer un cercle tangent à trois autres objets, points, lignes ou cercles, et ce n'est que bien longtemps après, en 1520, qu'un deuxième fractal apparaît, le pentagone de Dürer. Une propriété fondamentale des géométries fractales est la notion d'autosimilarité qui est définie autour des années 1700 par Leibniz. Dans un deuxième temps, ce que l'on appellera les

monstres mathématiques vont apparaître entre 1875 et 1925, avec la fonction de Weierstrass, fonction continue mais nulle part dérivable qui sera démontrée self-affine [Hunt, 1998, Kaplan et al., 1984] (voir équation 3.1 et figure 3.2).

$$\omega(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(2\pi b^k x) \quad D = 2 + \frac{\ln(a)}{\ln(b)} \quad (3.1)$$

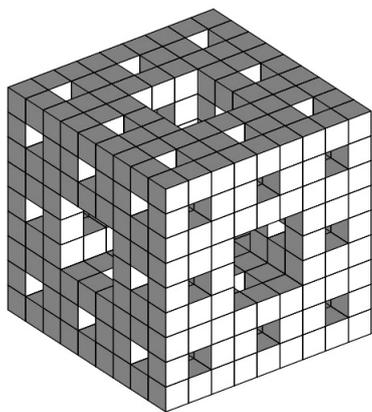


FIGURE 3.1 – Éponge de Menger itérée au rang 2



FIGURE 3.2 – Courbe de Weierstrass pour  $k = 10$ ,  $a = b^{-1/2}$  et  $b = 2$

Des cas similaires se multiplient et apparaissent ainsi les courbes de Von Koch, de Cantor, de Peano et d’Hilbert (courbes remplissant l’espace) ou encore la carpe de Sierpinski et l’éponge de Menger (voir figure 3.1). Ces géométries mènent à de nouvelles définitions de la dimension admettant l’existence de dimensions non entières comme la dimension de Hausdorff-Besicovitch ou encore la dimension des boites, cette dernière plus utilisée car plus simple à mesurer.

C’est à partir de la question de la longueur de la côte de Bretagne que Mandelbrot aboutit à ce type de géométrie [Mandelbrot, 1967]. Il en créera le nom en 1975, "fractal" venant de "fractus" signifiant brisé en latin, et proposera une définition générale de cette dernière. Ceci menant à la création de l’ensemble connu sous le nom de M ou encore l’ensemble de Mandelbrot [1975] et ceux découlant de celui-ci [Frame et Robertson, 1992, Michelitsch et Rössler, 1992, Rochon, 2000, Zireh, 2010] (figure 3.3, figure 3.4). Ces découvertes sont encore peu comprises du point de vue de la physique mais possèdent un lien fort avec le chaos déterministe et les attracteurs étranges (constante de Feigenbaum par exemple).

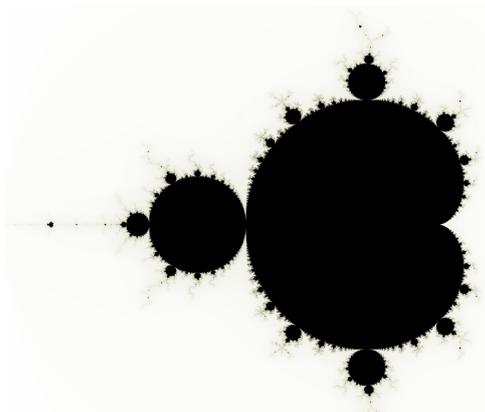


FIGURE 3.3 – Ensemble de Mandelbrot

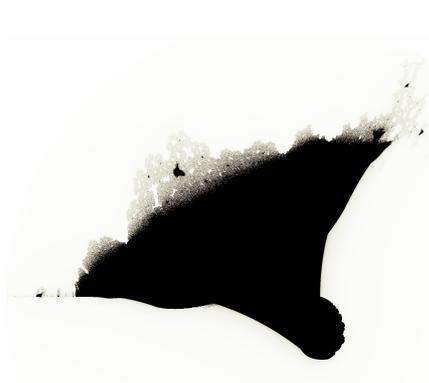


FIGURE 3.4 – Ensemble du Burningship

Depuis la définition générale donnée par Mandelbrot, la géométrie fractale s'est popularisée et s'est appliquée de façon exponentielle dans divers thèmes plus ou moins récents [Lopes et Betrouni, 2009, Mandelbrot, 1982, 1997, Yang et Pitchumani, 2001]. Cependant, il apparaît dans les résultats obtenus dans ces multiples domaines, l'existence de courbures et de non-linéarités dans l'estimation de la dimension fractale [Nottale, 2010, Queiros-Condé et al., 2015b] (voir figure 3.5), tendant naturellement à l'hypothèse de la dépendance en échelle de celle-ci. Cette dépendance en échelle a été observée dans un premier temps en turbulence par [Catrakis et Dimotakis, 1996] (voir figure 3.6). Ces déviations ont ensuite été étudiées à travers une explication physique des structures obtenues par la théorie des peaux entropiques et l'équation de diffusion d'entropie d'échelle, caractérisant ainsi les comportements dépendants d'échelle comme la technique de peinture de Léonard de Vinci [Queiros-Condé, 2004] et prenant en compte ce que l'on appelle généralement les effets de tailles finis. Cette théorie permet ainsi d'étudier les phénomènes mécaniques autosimilaires présentant une déviation au comportement fractal pur.

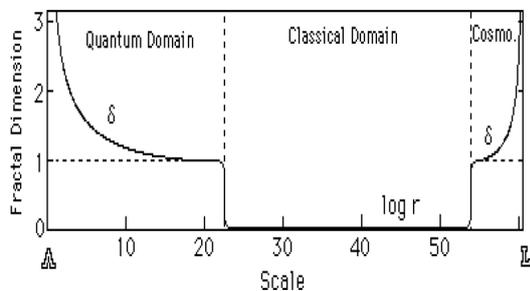


FIGURE 3.5 – Variation de la dimension fractale en fonction de l'échelle [Nottale, 2010]



FIGURE 3.6 – Mesure 2D de la concentration d'un jet turbulent ( $Re \approx 9.10^3$ ) mesuré perpendiculairement à la direction du jet par fluorescence induite par laser, phénomène dont la dimension est dépendante d'échelle [Catrakis et Dimotakis, 1996]

## 3.2 De la géométrie fractale simple à la dépendance en échelle

### 3.2.1 Généralités sur les objets fractals

#### Définition ou propriétés ?

Le domaine des fractales a été très développé par les mathématiciens [Barnsley, 2010, Falconer, 1990, Tricot, 1995, 2008] permettant son accessibilité à l'ensemble de la communauté scientifique. La première définition donnée par Mandelbrot était que l'on appelle fractal un ensemble mathématique dont sa dimension de Hausdorff-Besicovitch ( $D$ ) excède strictement sa dimension topologique ( $D_T$ ) (au sens de Lebesgue, Brouwer, Menger et Urysohn), avec ( $D$ ) pouvant être naturel ou décimal. On peut aussi trouver la définition d'une courbe fractale comme une courbe à la fois non rectifiable et homogène. Cependant, ces définitions (parmi d'autres) contraignent l'étendue des cas possibles, et des objets fractals violant celles-ci apparaissent. La définition claire d'un fractal posant problème, on préfère évaluer un objet fractal à partir de ses propriétés mathématiques. Par conséquent, on considère un ensemble  $F$  fractal lorsque :

- $F$  a une structure fine, c'est à dire des détails à des échelles arbitrairement petites

- F est trop irrégulier pour être décrit par les méthodes de géométrie traditionnelle, à la fois localement et globalement
- F a souvent une forme autosimilaire, au moins approximativement ou statistiquement
- Habituellement, la dimension fractale de F est supérieure à sa dimension topologique
- Dans la majorité des cas, F est défini de façon simple, possiblement de façon récursive

**Mesures et dimensions**

Pour caractériser un ensemble ou une géométrie qu'elle soit fractale ou non, on utilise ce que l'on appelle une mesure. De façon générale, les mesures utilisées seront effectuées sur un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , ainsi, on appelle  $\mu$  une mesure de  $\mathbb{R}^n$  si  $\mu$  affecte un nombre strictement positif (pouvant prendre une valeur infinie) à chaque sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  tel que :

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(A) \leq \mu(B)$  si  $A \subset B$
- Si  $A_1, A_2, \dots$  est une séquence finie d'ensemble

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \tag{3.2}$$

À partir de la définition d'une mesure, on peut définir ce que l'on appelle la mesure de Lebesgue qui généralise la notion de longueur (sur un ensemble A) :

$$\mathcal{L}^1(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \right\} \tag{3.3}$$

On considère ensuite une autre mesure connue des mathématiciens, la mesure de Hausdorff (sur un ensemble F). Celle-ci requiert ce que l'on appelle un  $\delta$ -recouvrement de l'ensemble à mesurer, et un diamètre des sous-ensembles de recouvrement  $U_i$  (la plus grande distance entre deux paires de points dans  $U_i$ ) :

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \quad \forall i : 0 < |U_i| \leq \delta \quad |U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\} \tag{3.4}$$

On définit maintenant pour  $s$  un nombre strictement positif, quelque soit  $\delta > 0$  :

$$\mathcal{H}_{\delta}^s(F) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } F \right\} \tag{3.5}$$

Et finalement, en faisant tendre  $\delta \rightarrow 0$ , l'infimum  $\mathcal{H}_{\delta}^s(F)$  augmente et approche une limite. Cette limite existe pour tout sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , à travers les valeurs limites pouvant être (souvent) 0 ou  $\infty$ . On appelle  $\mathcal{H}^s(F)$  la mesure  $s$ -dimensionnelle de Hausdorff de F.

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(F) \quad \mathcal{H}_{\delta}^s(F) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } F \right\} \tag{3.6}$$

Il est clair que pour tout ensemble F et  $\delta < 1$ ,  $\mathcal{H}_{\delta}^s(F)$  n'augmente pas avec  $s$  donc en passant à la limite  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{H}^s(F)$  non plus. Si  $t > s$  et  $\{U_i\}$  est un  $\delta$ -recouvrement de F, on a :

$$\sum_i |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \underbrace{\sum_i |U_i|^s}_{\text{infima}} \Rightarrow \mathcal{H}_{\delta}^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_{\delta}^s(F) \tag{3.7}$$

Si  $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ ,  $\mathcal{H}^t(F) = 0$  pour  $t > s$ . Il existe une valeur critique pour laquelle  $\mathcal{H}^s(F)$  passe de  $\infty$  à 0, que l'on appellera la dimension de Hausdorff :

$$dim_{\text{H}}F = \inf \{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup \{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\} \quad (3.8)$$

Ces outils mathématiques servent aux mathématiciens lors de la caractérisation topologique de divers ensembles et permettent l'étude des géométries fractionnaires. D'autres définitions plus simples, adaptées à l'ingénieur permettent elles aussi d'étudier la fractalité des phénomènes. Nous considérerons ici la plus utilisée dans notre cas, ce que l'on appelle la dimension de boîte ou encore la box-counting dimension. Soit  $N_\delta(F)$  le plus petit nombre d'ensembles de diamètre au plus  $\delta$ , recouvrant  $F$  (sous ensemble non vide de  $\mathbb{R}^n$ ), on définit la dimension de boîte inférieure et supérieure comme :

$$\underline{dim}_{\text{B}}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (3.9)$$

$$\overline{dim}_{\text{B}}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (3.10)$$

Lorsque celles-ci sont égales, on a :

$$dim_{\text{B}}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (3.11)$$

Généralement  $N_\delta(F)$ , peut être choisi librement suivant les applications. On retrouve le plus souvent :

1. Le plus petit nombre de boules fermées de rayon  $\delta$  recouvrant  $F$
2. Le plus petit nombre de cubes fermés de côté  $\delta$  recouvrant  $F$
3. Le nombre de mailles de type cube de taille  $\delta$  intersectant  $F$
4. Le plus petit nombre d'ensembles de diamètres au plus  $\delta$  recouvrant  $F$
5. Le plus grand nombre de boules disjointes de rayon  $\delta$  avec leur centre sur  $F$

Ces méthodes de mesures et d'estimation de la dimension permettent de capter l'information propre à une géométrie, sa propriété d'échelle. C'est le cas par exemple d'un système de taille  $L$  dont la masse est uniformément distribuée  $M(L)$ . En effet, lorsqu'on change la taille de cet objet d'un facteur  $b$ , sa masse devient :

$$M(bL) = b^d M(L) \Rightarrow M(L) = AL^d \quad (3.12)$$

Où  $d$  est la dimension qui peut être euclidienne (pour une plaque  $d = 2$ ) ou fractale. Dans le cas le plus simple, l'exposant  $d$  est strictement constant, on dira de cette géométrie qu'elle est strictement autosimilaire (invariance d'échelle). On la retrouve dans diverses théories<sup>1</sup> [Balankin, 1990, Barenblatt, 1996, 2012, del Angel, 2014, Dyskin, 2007, El Naschie, 2009, Poché et Queiros-Condé, 1996] cependant, une déviation au comportement linéaire de la dimension est très souvent présente lors de son estimation.

---

1. Les dérivées fractionnaires liées à la géométrie fractale ne sont pas étudiées ici mais font aussi partie des applications à la physique et en mathématique [Le Méhauté et al., 2010, Michelitsch et al., 2009].

### 3.2.2 Autosimilarité stricte comme cas particulier

#### Autoaffinité

Pour régler le problème de déviation dans l'estimation de la dimension, l'auto-affinité a été introduite. La fractalité auto-affine permet à partir de la normalisation d'un axe de retrouver une dimension constante en utilisant ce que l'on appelle l'exposant de Hurst (ou Holder). La différence entre autosimilarité et auto-affinité vient de la propriété d'échelle qui devient non plus uniforme (comme dans le cas précédent de la masse) mais présente une anisotropie :

$$x' \rightarrow \lambda_x x \quad y' \rightarrow \lambda_y y \quad z' \rightarrow \lambda_z z \quad (3.13)$$

Les transformations étant liées entre elles, une structure de groupe apparaît, par conséquent,  $\lambda_y$  et  $\lambda_z$  sont des fonctions homogènes de  $\lambda_x$  ayant les propriétés d'échelle :

$$\lambda_y \propto \lambda_x^{v_y} \quad \lambda_z \propto \lambda_x^{v_z} \quad \lambda_z \propto \lambda_y^H \quad H = \frac{v_z}{v_y} \quad (3.14)$$

Dans le cas d'une auto-affinité isotrope suivant  $x$  et  $y$ , l'exposant de Hurst se résume à  $v_z$ . Le lien entre l'exposant de Hurst  $H$ , la dimension fractale  $D$  et la dimension (euclidienne) englobant le phénomène  $d$  est donnée par :

$$D = d - H \quad \text{auto-affine} \quad D = \frac{d-1}{H} \quad \text{auto-similaire} \quad (3.15)$$

Elle a été mise en évidence dans le cadre du mouvement brownien fractionnaire [Mandelbrot, 1985, Voss, 1991] où l'exposant de Hurst est un paramètre de corrélation ou d'anti-corrélation des incréments de mouvement. Celui-ci est aussi présent dans la fonction de Weierstrass-Mandelbrot et une de ses généralisations par Borodich [1994] avec les fonctions homogènes paramétriques. Ces différentes fonctions mettant en jeu l'auto-affinité se sont révélées très pratiques pour l'étude de la rupture et la caractérisation de surfaces rugueuses [Borodich, 1997, Borodich et Mosolov, 1992, Dutta et al., 1998, Gol'dshtein et Mosolov, 1992, Majumdar et Tien, 1990, Mosolov, 1993, Wnuk et Yavari, 2003, 2005, 2009] (voir figure 3.7).

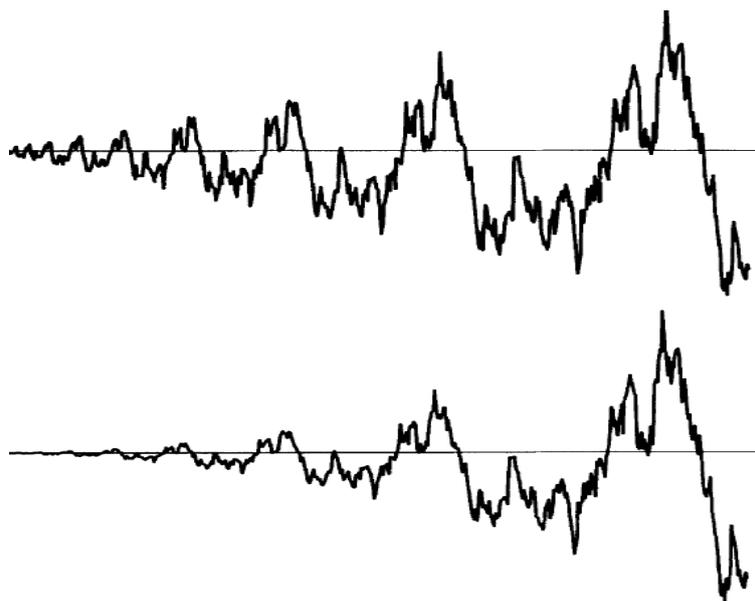


FIGURE 3.7 – Fonctions homogènes paramétriques auto-similaire (haut) et auto-affine (bas) ayant une dimension  $D=1.5$  [Borodich, 1997]

### Du fractal dans le fractal : Multifractalité

La théorie multifractale [Benzi et Biferale, 2009, Frisch et Vergassola, 1991] a été introduite pour essayer de répondre aux déviations au fractal pur de façon plus générale. Elle permet d'étudier la présence de fractalité à l'intérieur même d'un fractal donnant ainsi accès, à partir de ce que l'on appelle le spectre de singularité, à une caractérisation plus fine de la géométrie. Pour cela, une mesure probabiliste (ou de densité) est effectuée :

$$P_i(\varepsilon) = \frac{L_i(\varepsilon)}{L_T(\varepsilon)} \quad (3.16)$$

Où  $L_i$  représente le nombre de pixels (d'échelles minimales) dans une boîte de taille  $\varepsilon$  et  $L_T$ , le nombre total de pixels (d'échelles minimales) dans  $N(\varepsilon)$ , c'est à dire, l'ensemble des boîtes de taille  $\varepsilon$ . Cette théorie utilise les notions d'entropies et de dimensions généralisées permettant ainsi de construire une mesure normalisée :

$$D_q = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I_q(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \quad I_q = \frac{-1}{q-1} \ln \left[ \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^q(\varepsilon) \right] \quad \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i(\varepsilon) = 1 \quad (3.17)$$

$$\mu(q, \varepsilon) = \frac{[P_i(\varepsilon)]^q}{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} [P_i(\varepsilon)]^q} \quad (3.18)$$

On travaille généralement avec ce que l'on appelle le spectre multifractal  $f(\alpha)$  (ou densités de singularités) et  $\alpha(q)$  l'intensité des singularités, en considérant une loi de puissance sur la somme des probabilités (possédant un lien avec les dimensions généralisées) :

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} [P_i(\varepsilon)]^q \propto \varepsilon^{-\tau(q)=(q-1)D_q} \quad \alpha(q, r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i(q, \varepsilon) \log \mu_i(q, \varepsilon)}{\log \varepsilon} \quad (3.19)$$

$$f(\alpha) = q\alpha(q) - \tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i(q, \varepsilon) \log P_i(q, \varepsilon)}{\log \varepsilon} \quad (3.20)$$

$f(\alpha)$  est une fonction convexe présentant un point d'inflexion maximum en  $q = 0$ , et permet de représenter le spectre de toutes les dimensions fractales :

1.  $D_{q=0}$  est la dimension de capacité
2.  $D_{q=1}$  est la dimension d'information
3.  $D_{q=2}$  est la dimension de corrélation
4. Pour  $q = \pm\infty$ , on a une pente infinie  $\alpha_{min} = D_{+\infty}$ , et  $\alpha_{max} = D_{-\infty}$
5. L'espacement entre  $\alpha_{min}$  et  $\alpha_{max}$  mesure l'inhomogénéité de l'ensemble

Lorsque l'on est en présence d'un monofractal, la mesure est distribuée de façon homogène sur son support, on a donc un espacement nul entre  $\alpha_{min}$  et  $\alpha_{max}$  et  $D_q = D_0 \forall q$ . Une des origines de l'étude multifractale provient de l'étude des exposants des fonctions de structures en turbulence où des déviations à la linéarité ont été observée expérimentalement [Anselmet et al., 1984]. Cette théorie a trouvé aussi beaucoup d'application en mécanique, notamment dans l'étude de la fracturation [Ouillon et Sornette, 1996, Ouillon et al., 1996, Stach et Cybo, 2003, Weiss, 2001] (figure 3.8, figure 3.9).

Finalement, un couplage entre auto-affinité et multifractalité a été proposé par Barabási et Vicsek [1991], Barabási et al. [1991] afin de rendre compte d'un exposant de Hölder dépendant du moment associé à une probabilité multifractale permettant son application à la croissance de surfaces [Barabási et al., 1992].

Ces quatre visions que sont l'autosimilarité (stricte), l'auto-affinité, la multifractalité et le couplage multifractalité/auto-affinité sont extrêmement répandues. Elles permettent de répondre à de nombreuses attentes modélisant de façon très proche les phénomènes complexes, très présents dans les phénomènes naturels [Balankin et Sandoval, 1997].

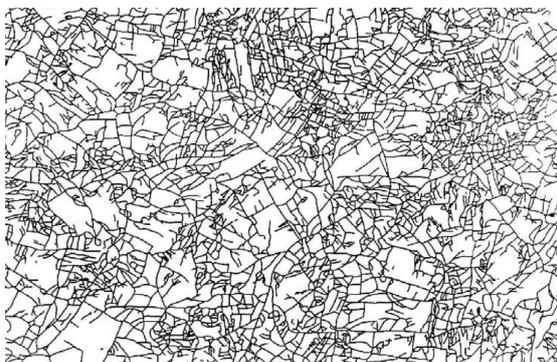


FIGURE 3.8 – Motifs des microfractures présent sur la section transversale pour un test de fluage en compression (5 sollicitations successives, ici la 5<sup>e</sup>) pour de la glace granulaire à  $T = -10^{\circ}\text{C}$  et  $\sigma = 3.1 \text{ MPa}$  [Weiss, 2001]

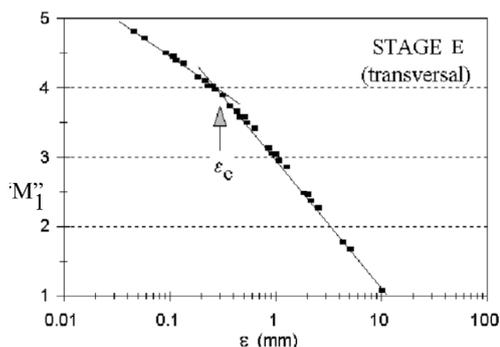


FIGURE 3.9 – Moment d'ordre 1, ou  $\sum p_i \log p_i$  en fonction de l'échelle d'observation [Weiss, 2001]

### 3.2.3 Fractal dépendant d'échelle

#### Différentes approches dépendante d'échelle

La dépendance en échelle a fait son apparition, dans un premier temps par l'introduction de la notion de bifractalité où une seule dimension ne suffisait plus à caractériser un phénomène d'où la nécessité de deux dimensions [Thomas et al., 1999, Wan et al., 2014, Wu, 2000]. Puis, la question de la dépendance en échelle s'est posée par l'intermédiaire d'une réflexion par Li [2014] dans le domaine de l'écologie et par Catrakis et Dimotakis [1999], Dimotakis et Catrakis [1999] en turbulence (figure 3.10). Un autre type de dépendance en échelle a été mis en évidence par Sornette [1998], Stauffer et Sornette [1998], liée à la log-périodicité des phénomènes (Discrete Scale Invariance). Cependant, l'existence d'une structuration et d'une organisation spécifique liée entre les différentes échelles est à créditer à la théorie des peaux entropiques notamment son application à la turbulence [Queiros-Condé, 1999, 2000b, 2001] et l'équation de diffusion de l'entropie d'échelle [Queiros-Condé, 2003], prenant en compte toute possibilité dans la dépendance en échelle à partir d'un potentiel évolutif, l'entropie d'échelle.

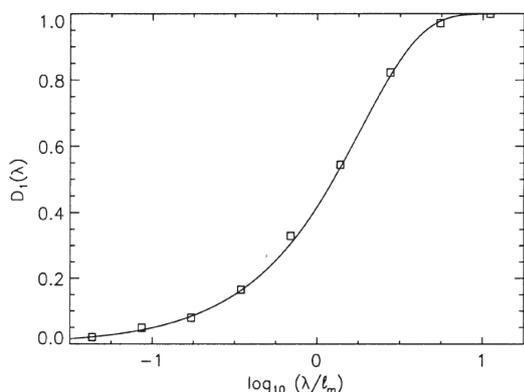


FIGURE 3.10 – Variation de la dimension en fonction de l'échelle pour un processus de distribution de point sur une ligne suivant une loi de Poisson [Dimotakis et Catrakis, 1999]

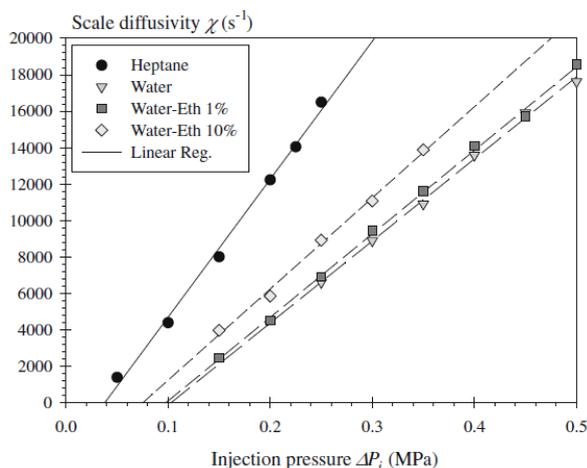


FIGURE 3.11 – Évolution de la diffusivité d'échelle en fonction de la pression d'injection et des propriétés des fluides utilisés [Dumouchel et Grout, 2009]

### Théorie des peaux entropiques et diffusion d'entropie d'échelle

La théorie des peaux entropiques permettant la dépendance en échelle possède une forte application à la turbulence et la combustion turbulente [Queiros-Condé, 2000a, Queiros-Condé et Feidt, 2008a, Queiros-Condé et al., 2015a, Queiros-Condé, 2008]. Mais celle-ci, ne se base en fait que sur un cas particulier de l'équation de diffusion d'entropie d'échelle, que l'on retrouve aussi en turbulence, combustion turbulente et atomisation [Dumouchel et Grout, 2009, 2011, Dumouchel et al., 2015, Le Moyne, 2010, Le Moyne et al., 2008, Queiros-Condé et al., 2008, Queiros-Condé et Feidt, 2010, Queiros-Condé, 2003] (voir figure 3.11), et se répand à d'autres domaines [Queiros-Condé, 2008]. Cette utilisation grandissante de l'entropie d'échelle vient du cadre théorique permettant l'étude des déviations au fractal pur. Un cas simple que l'on appelle fractal parabolique, terme inventé par Laherrère [1996], utilise un logarithme de second degré plus pertinent que le fractal pur (d'ordre 1) au vu des nombreux phénomènes physiques cités dans la littérature précédemment. Ce que l'on appelle l'entropie d'échelle ( $S$ ) représente un potentiel évolutif traduisant la possibilité à remplir l'espace d'un phénomène, celui-ci lorsqu'il est élevé implique un phénomène faiblement désorganisé, et donc plus de possibilités de remplir l'espace. Ce potentiel est défini mathématiquement comme le logarithme du ratio d'une mesure à une échelle maximale ( $M_{[0,0]}$ ) sur une mesure à l'échelle d'observation du phénomène ( $M_{[i,0]}$ ). Les phénomènes autosimilaires généraux faisant intervenir le logarithme de l'échelle d'observation, on définit l'échelle logarithmique<sup>2</sup> ( $x$ ), comme le logarithme du ratio de l'échelle d'observation ( $l_i$ ) sur l'échelle maximale ( $l_0$ ), celle-ci étant bornée entre une échelle maximale  $l_0$  et une échelle minimale  $l_c$  :

$$x = \ln\left(\frac{l_i}{l_0}\right) \quad l_c < l_i < l_0 \quad (3.22)$$

Par analogie avec la turbulence, on pourra appeler  $l_0$  l'échelle intégrale (considérée comme l'échelle maximale du phénomène étudié), on dénommera de plus  $l_c$  comme l'échelle crête (qui correspondrait dans le cas de la turbulence à l'échelle de Kolmogorov).

La mesure quant à elle représente un pavage par une méthode de comptage de boîte, ce qui nous permet de déduire une relation simple entre entropie d'échelle et nombre d'objets servant au pavage (ces objets ayant une dimension euclidienne  $d$ ). Le résultat nous montre ainsi une décomposition en deux composantes. Une composante étant le logarithme du ratio du nombre d'objets servant au pavage à l'échelle intégrale ( $N_{[0,0]} = 1$ ) et à l'échelle d'observation du phénomène ( $N_{[i,0]}$ ). Puis une deuxième composante étant l'échelle logarithmique multipliée par la dimension euclidienne  $d$  :

$$S(x) = \ln\left(\frac{M_{[0,0]}}{M_{[i,0]}}\right) = -\ln\left(\frac{N_{[i,0]}}{N_{[0,0]}}\left(\frac{l_i}{l_0}\right)^d\right) = -\ln\left(\frac{N_{[i,0]}}{N_{[0,0]}}\right) - dx \quad (3.23)$$

On notera de plus que l'entropie d'échelle à l'échelle intégrale  $S(x=0)$  est par définition nulle.

C'est dans l'optique de représenter l'entropie par la géométrie fractale que l'équation de diffusion d'entropie d'échelle est née. Cette équation présente la diffusion de l'entropie d'échelle dans l'espace des échelles (=échelle logarithmique) et en fonction du temps, introduisant le concept de puits d'entropie d'échelle ( $\omega(x, t)$ ) et le concept de diffusivité d'échelle

2. À noter que l'on peut aussi définir une échelle logarithmique à partir de l'échelle crête mais que l'on n'utilisera pas dans ce manuscrit :

$$x_c = \ln\left(\frac{l_i}{l_c}\right) \quad l_c < l_i < l_0 \quad (3.21)$$

( $\chi$ ). La définition de l'entropie d'échelle fait apparaître un lien entre la dimension fractale à l'échelle d'observation (ou plus précisément la codimension  $\Delta_{[i,0]}$ -d) et la dérivée de l'entropie d'échelle par rapport à l'échelle logarithmique :

$$\frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x^2} - \omega(x, t) = \frac{1}{\chi} \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \quad \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} = \Delta_{[i,0]} - d \quad (3.24)$$

Les phénomènes réels exhibant une dissipation d'énergie imposent une géométrie fractale finie. On appelle les objets respectant l'équation de diffusion d'entropie d'échelle des fractals dissipatifs ou cumulatifs (suivant le signe du puits d'entropie d'échelle). Dans la suite, nous considérerons des phénomènes stationnaires entraînant une dérivée temporelle nulle, permettant ainsi une étude des comportements géométriques pour des puits d'entropie d'échelle particuliers.

### 3.3 Caractérisation et généralisation des géométries dépendantes d'échelle

#### 3.3.1 Les différents cas simples

Les différents cas simples possèdent un puits d'entropie d'échelle constant :

- Euclidien :  $\omega(x) = 0 \quad \Delta_{[i,0]} = \Delta = d$
- Fractal pur :  $\omega(x) = 0 \quad \Delta_{[i,0]} = \Delta \neq d$
- Fractal parabolique :  $\omega(x) = \beta \neq 0 \quad \Delta_{[0,0]}, \Delta_{[i,0]}, \Delta_{[c,0]} \in [0, d]$

#### Géométrie euclidienne

Le cas trivial euclidien possède une dimension fractale entière égale à sa dimension topologique et dont le puits d'entropie d'échelle est nul. La résolution de l'équation de diffusion en régime stationnaire donne simplement :

$$S(x) = 0 \quad N_{[i,0]} = \left( \frac{l_0}{l_i} \right)^d \quad (3.25)$$

Des géométries euclidiennes simples seront étudiées à travers une analyse en échelle dans le cadre du paramétrage de l'outil de mesure de dimension, des cas simples sont présentés en figure 3.12.

#### Géométrie fractale "pure"

Un phénomène fractal quant à lui possède une dimension non entière différente de sa dimension topologique dont le puits d'entropie d'échelle est, comme dans le cas euclidien, nul. Ceci menant après intégration de l'équation de diffusion à :

$$S(x) = (\Delta - d) x \quad N_{[i,0]} = \left( \frac{l_0}{l_i} \right)^\Delta \quad (3.26)$$

Des géométries fractales pures seront aussi étudiées pour vérifier l'erreur commise par l'outil de mesure de dimension fractale ; des exemples de géométries fractales pures sont présentés en figure 3.13.

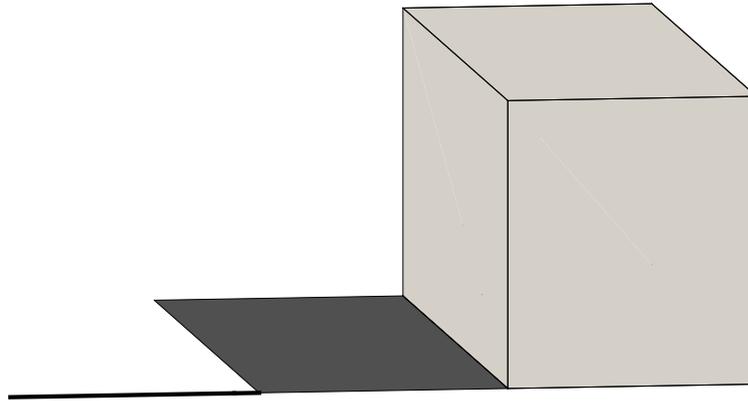


FIGURE 3.12 – De gauche à droite un segment lisse de dimension  $\Delta = 1$ , un carré de dimension  $\Delta = 2$ , un cube de dimension  $\Delta = 3$

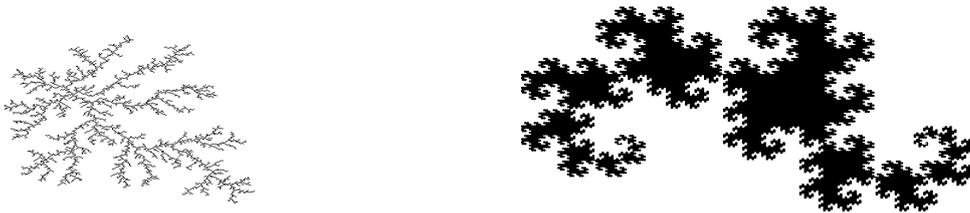


FIGURE 3.13 – DLA de dimension  $\approx 1.71$  et courbe du Dragon de dimension 2

### Géométrie fractale parabolique

La dernière géométrie simple est ce que l'on appelle le fractal parabolique montrant une déviation de dimension fractale (à petite ou grande échelle) provenant de l'existence d'un puits d'entropie d'échelle constant (le signe étant lié à une augmentation ou une diminution des intercorrélations entre échelles).

$$\frac{dS}{dx} = \beta x + C = \Delta_{[i,0]} - d \quad C = \Delta_{[0,0]} - d \quad (3.27)$$

$$S(x) = \frac{\beta}{2}x^2 + (\Delta_{[0,0]} - d)x \quad N_{[i,0]} = \left(\frac{l_0}{l_i}\right)^{\frac{\Delta_{[i,0]} + \Delta_{[0,0]}}{2}} = \left(\frac{l_0}{l_i}\right)^{\left(\frac{\beta}{2}\right)x + \Delta_{[0,0]}} \quad (3.28)$$

On présente un exemple de géométrie fractale parabolique en figure 3.14, obtenu en utilisant l'équation de diffusion d'entropie d'échelle.

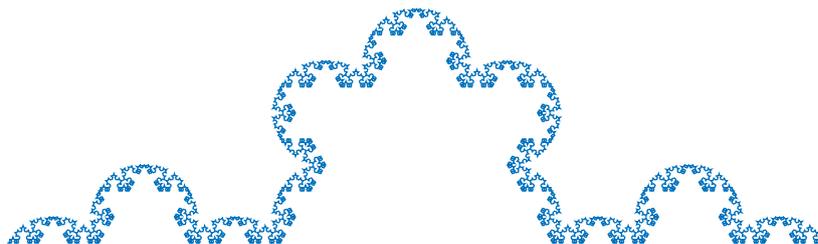


FIGURE 3.14 – Von Koch parabolique dont la dimension varie de  $\Delta_{[0,0]} = 1.2618$  à  $\Delta_{[c,0]} = 2$  sur 6 itérations

Une représentation possible des divers comportements fractals dans l'espace des échelles est possible dans ce que l'on appelle le diagramme espace-échelle (figure 3.15).

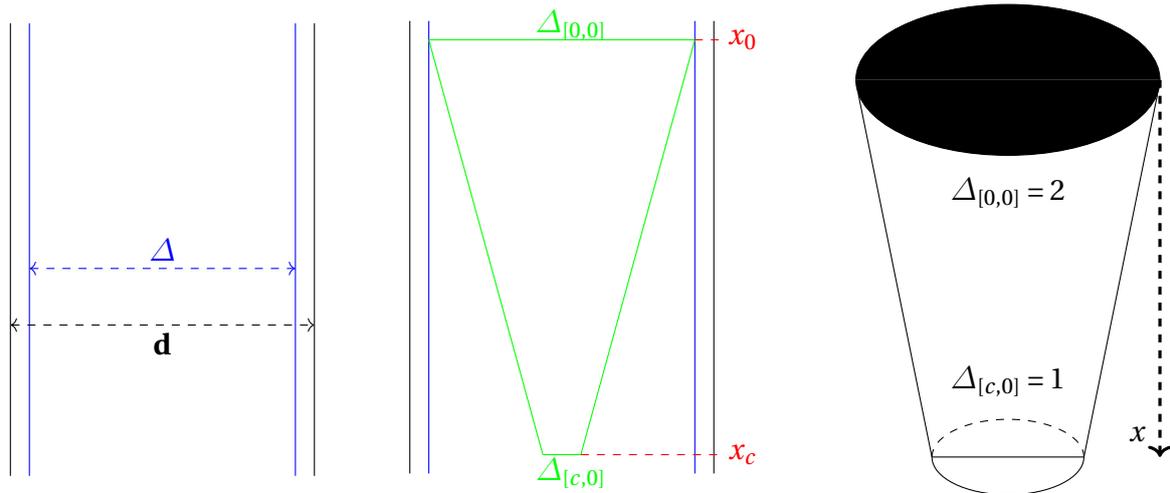


FIGURE 3.15 – Diagramme espace-échelle représentant ici une géométrie euclidienne en noir de dimension  $d$ , une géométrie fractale en bleu de dimension  $\Delta$ , et une géométrie fractale parabolique en vert dont la dimension varie de  $\Delta_{[0,0]}$  en  $x_0$  à  $\Delta_{[c,0]}$  en  $x_c$ . À droite se trouve le cône des échelles représentant une géométrie fractale parabolique ayant une dimension variant d'un disque de dimension 2 à un segment de dimension 1 à travers les échelles.

Afin d'étudier les divers types de déviations au fractal pur existant dans les phénomènes, une généralisation est possible pour la prédiction de la dépendance en échelle de la dimension. En effet, le puits d'entropie d'échelle représente précisément l'origine de l'écart des phénomènes au fractal pur à travers une sous-diffusion ou surdiffusion.

### 3.3.2 Généralisation du puits d'entropie d'échelle en régime stationnaire

Nous allons étudier deux types de déviations au fractal pur à travers deux lois pour le puits d'entropie d'échelle :

- Des lois de puissances
- Des lois polynomiales

#### Géométrie dissipative pure (modale) : une loi de puissance pour le fractal

On considère un puits modal d'entropie d'échelle lorsque celui-ci est exprimé par :

$$\omega(x) = \beta_k^* x^k \quad (3.29)$$

Où  $k$  représente l'ordre du mode et  $\beta_k^*$ , l'invariant d'échelle associé au mode  $k$  (l'exposant  $\star$  décrit une déviation unimodale au comportement fractal pur). À partir de l'intégration de l'équation précédente, on obtient le flux modal d'entropie d'échelle (la constante d'intégration représentant la codimension à l'échelle intégrale) :

$$\int \omega(x) dx = \Delta_{[i,0]}^{[\beta_k^*]} - d = \left( \frac{1}{k+1} \right) \beta_k^* x^{k+1} + \Delta_{[0,0]} - d \quad (3.30)$$

Puis en intégrant une dernière fois, on obtient l'entropie d'échelle modale (par définition, l'entropie d'échelle est nulle à l'échelle intégrale annulant ainsi la constante d'intégration) :

$$\iint \omega(x) dx = S(x) = \left( \frac{k!}{(k+2)!} \right) \beta_k^* x^{k+2} + (\Delta_{[0,0]} - d)x \quad (3.31)$$

On est ici en présence d'un mode  $k$  définissant une déviation unimodale à la géométrie fractale, caractérisée par des relations simples sur l'invariant  $\beta$  et la dimension  $\Delta_{[i,0]}$  (ou le nombre de boules  $N_{[i,0]}$ ) :

$$\frac{(k+1)(\Delta_{[i,0]}^{[\beta_k^*]} - \Delta_{[0,0]})}{x^{k+1}} = \beta_k^* \quad N_{[i,0]} = \left(\frac{l_0}{l_i}\right)^{\frac{\Delta_{[i,0]}^{[\beta_k^*]} - \Delta_{[0,0]}}{k+2} + \Delta_{[0,0]}} \quad (3.32)$$

Pour simplifier l'écriture dans la suite on pourra utiliser la notation  $\Delta_x^{[\beta_k^*]} = \Delta_{[i,0]}^{[\beta_k^*]}$ , ou plus généralement  $\Delta_x$  à la place de  $\Delta_{[i,0]}$ . En reprenant les trois cas simples présentés précédemment, à savoir l'eulidien, le fractal et le fractal parabolique, ceux-ci partagent le même mode avec chacun une particularité différente :

— Mode 0(a) :

$$\omega(x) = \beta_0^* = 0 \quad \Delta_x = \Delta = d \quad N_{[i,0]} = \left(\frac{l_0}{l_i}\right)^d \quad (3.33)$$

— Mode 0(b) :

$$\omega(x) = \beta_0^* = 0 \quad \Delta_x = \Delta \neq d \quad N_{[i,0]} = \left(\frac{l_0}{l_i}\right)^{\Delta_{[0,0]}} \quad (3.34)$$

— Mode 0(c) :

$$\omega(x) = \beta_0^* \neq 0 \quad \Delta_{[0,0]} \in [0, d] \quad \frac{dS}{dx} = \beta_0^* x + C = \Delta_x^{[\beta_0^*]} - d \quad C = \Delta_{[0,0]} - d \quad (3.35)$$

$$S = \frac{\beta_0^*}{2} x^2 + (\Delta_{[0,0]} - d)x \Rightarrow N_{[i,0]} = \left(\frac{l_0}{l_i}\right)^{\frac{\Delta_x^{[\beta_0^*]} + \Delta_{[0,0]}}{2}} = \left(\frac{l_0}{l_i}\right)^{\left(\frac{\beta_0^*}{2}\right)x + \Delta_{[0,0]}} \quad (3.36)$$

— Mode 1 :

$$\omega(x) = \beta_1^* x \neq 0 \quad \Delta_{[0,0]} \in [0, d] \quad \frac{dS}{dx} = \frac{\beta_1^*}{2} x^2 + C = \Delta_x^{[\beta_1^*]} - d \quad C = \Delta_{[0,0]} - d \quad (3.37)$$

$$S = \frac{\beta_1^*}{6} x^3 + (\Delta_{[0,0]} - d)x \Rightarrow N_{[i,0]} = \left(\frac{l_0}{l_i}\right)^{\frac{\Delta_x^{[\beta_1^*]} + 2\Delta_{[0,0]}}{3}} = \left(\frac{l_0}{l_i}\right)^{\left(\frac{\beta_1^*}{6}\right)x^2 + \Delta_{[0,0]}} \quad (3.38)$$

Le Mode 0(a) représente le cas trivial eulidien où la dimension fractale est égale à la dimension euclidienne et où le puits d'entropie d'échelle est nul. Le mode 0(b) est le cas du fractal pur (cas où le puits d'entropie d'échelle est nul) possédant une dimension précise associée au phénomène différente de sa dimension euclidienne. Enfin, le mode 0(c) représente le cas parabolique, déviation (à petite ou grande échelle) au fractal pur provenant de l'existence d'un puits d'entropie d'échelle constant non nul à travers l'espace des échelles (le signe étant relié à une surabondance ou une raréfaction des intercorrélations entre échelles). On peut aussi fournir un exemple remarquable, c'est le cas du mode 1 ayant un comportement linéairement accéléré dans l'espace des échelles. Par analogie avec la mécanique, la géométrie euclidienne représente un corps au repos, la géométrie fractale un mouvement rectiligne uniforme et le fractal parabolique, un mouvement uniformément accéléré. Pour

ce qui est d'une géométrie fractale de mode 1, le mouvement est linéairement accéléré ou ce que l'on appelle à Jerk constant.

Une relation simple apparait pour le nombre de boules  $N_{[i,0]}$  pouvant s'écrire à partir d'une dimension fractale équivalente :

$$N_{[i,0]} = \left(\frac{l_0}{l_i}\right)^{\overline{\Delta}_x^{[\beta_k^*]}} \quad \overline{\Delta}_x^{[\beta_k^*]} = \alpha_k \Delta_x^{[\beta_k^*]} + \gamma_k \Delta_{[0,0]} \quad \alpha_k + \gamma_k = 1 \quad (3.39)$$

Cette dimension fractale équivalente apparait comme une moyenne pondérée des composantes fractale pure et déviées. La généralisation en loi de puissance ne prend en compte que des déviations uniques (unimodales) par rapport au fractal classique, par conséquent, on peut définir un puits d'entropie d'échelle global (multimodal) associé à un flux d'entropie d'échelle global et une entropie d'échelle globale, comme une somme de différents modes menant ainsi à une loi polynomiale.

### Géométrie dissipative multimodale : une loi polynomiale pour le fractal

Un puits d'entropie d'échelle global peut être défini par sa gamme de déviation  $[\beta_0, \beta_n]$  lorsque les modes participants sont chacun associés à un ordre successif de déviation. Ce puits multimodal se traduit par :

$$\omega(x) = \sum_{k=0}^n \beta_k x^k \Rightarrow \int \omega(x) dx = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+1}\right) \beta_k x^{k+1} + (\Delta_{[0,0]} - d) \quad (3.40)$$

$$S(x) = \iint \omega(x) dx = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k!}{(k+2)!}\right) \beta_k x^{k+2} + (\Delta_{[0,0]} - d)x \quad (3.41)$$

$$N_{[i,0]} = \left(\frac{l_0}{l_i}\right)^{\sum_{k=0}^n \left(\frac{k!}{(k+2)!}\right) \beta_k x^{k+1} + \Delta_{[0,0]}} \quad (3.42)$$

On peut illustrer des cas simples de puits d'entropie d'échelle multimodal, par exemple, le cas simple de puits d'entropie d'échelle d'ordre 1 est donné par un mode d'ordre 1 superposé au mode d'ordre 0 (la gamme de déviation étant simplement  $[\beta_0, \beta_1]$ ) :

À partir de l'utilisation de  $\Delta_x^{[\beta_0]}$  du cas parabolique, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 S}{dx^2} &= \beta_1 x + \beta_0 & \frac{dS}{dx} &= \frac{\beta_1}{2} x^2 + \beta_0 x + C = \Delta_x^{[\beta_0, \beta_1]} - d \\ C &= \Delta_{[0,0]} - d & \beta_0 &= \frac{(\Delta_x^{[\beta_0]} - \Delta_{[0,0]})}{x} & \beta_1 &= \frac{2(\Delta_x^{[\beta_0, \beta_1]} - \Delta_x^{[\beta_0]})}{x^2} \\ S &= \frac{\beta_1}{6} x^3 + \frac{\beta_0}{2} x^2 + (\Delta_{[0,0]} - d)x = \frac{1}{3} (\Delta_x^{[\beta_0, \beta_1]} - \Delta_x^{[\beta_0]})x + \frac{1}{2} (\Delta_x^{[\beta_0]} - \Delta_{[0,0]})x + (\Delta_{[0,0]} - d)x \\ N_{[i,0]} &= \left(\frac{l_0}{l_i}\right)^{\frac{\Delta_x^{[\beta_0, \beta_1]} - \Delta_x^{[\beta_0]}}{3} + \frac{\Delta_x^{[\beta_0]} - \Delta_{[0,0]}}{2} + \Delta_{[0,0]}} \Rightarrow N_{[i,0]} = \left(\frac{l_0}{l_i}\right)^{\frac{\Delta_x^{[\beta_0, \beta_1]}}{3} + \frac{\Delta_x^{[\beta_0]}}{6} + \frac{\Delta_{[0,0]}}{2}} \quad (3.43) \end{aligned}$$

Par extension, on peut utiliser le puits d'entropie d'échelle d'ordre 1 pour remonter à celui d'ordre 2 (la gamme de déviation étant  $[\beta_0, \beta_2]$ ). Ce cas particulier peut présenter plusieurs points d'inflexion dans l'espace des échelles suivant le signe des invariants d'échelle à chaque ordre :

$$\frac{d^2 S}{dx^2} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 \quad \frac{dS}{dx} = \frac{\beta_2}{3} x^3 + \frac{\beta_1}{2} x^2 + \beta_0 x + C = \Delta_x^{[\beta_0, \beta_2]} - d$$

$$\begin{aligned}
 C &= \Delta_{[0,0]} - d \quad \beta_2 = \frac{3(\Delta_x^{[\beta_0, \beta_2]} - \Delta_x^{[\beta_0, \beta_1]})}{x^3} \\
 S &= \frac{\beta_2}{12}x^4 + \frac{\beta_1}{6}x^3 + \frac{\beta_0}{2}x^2 + (\Delta_{[0,0]} - d)x \\
 S &= \frac{1}{4}(\Delta_x^{[\beta_0, \beta_2]} - \Delta_x^{[\beta_0, \beta_1]})x + \frac{1}{3}(\Delta_x^{[\beta_0, \beta_1]} - \Delta_x^{[\beta_0]})x + \frac{1}{2}(\Delta_x^{[\beta_0]} - \Delta_{[0,0]})x + (\Delta_{[0,0]} - d)x \\
 N_{[i,0]} &= \left(\frac{l_0}{l_i}\right) \frac{\Delta_x^{[\beta_0, \beta_2]} - \Delta_x^{[\beta_0, \beta_1]}}{4} + \frac{\Delta_x^{[\beta_0, \beta_1]} - \Delta_x^{[\beta_0]}}{3} + \frac{\Delta_x^{[\beta_0]} - \Delta_{[0,0]}}{2} + \Delta_{[0,0]}
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

$$N_{[i,0]} = \left(\frac{l_0}{l_i}\right) \frac{\Delta_x^{[\beta_0, \beta_2]}}{4} + \frac{\Delta_x^{[\beta_0, \beta_1]}}{12} + \frac{\Delta_x^{[\beta_0]}}{6} + \frac{\Delta_{[0,0]}}{2} \tag{3.45}$$

En réitérant le raisonnement n fois, on aboutit à :

$$\frac{(n+1)(\Delta_x^{[\beta_0, \beta_n]} - \Delta_x^{[\beta_0, \beta_{n-1}]})}{x^{n+1}} = \beta_n \tag{3.46}$$

Et le nombre de boules devient :

$$N_{[i,0]} = \left(\frac{l_0}{l_i}\right)^{\sum_{k=1}^n} \left( \frac{\Delta_x^{[\beta_0, \beta_k]} - \Delta_x^{[\beta_0, \beta_{k-1}]}}{k+2} \right) + \frac{\Delta_x^{[\beta_0]} + \Delta_{[0,0]}}{2} \tag{3.47}$$

Comme précédemment, une dimension équivalente intervient sa propriété de moyenne pondérée étant conservée :

$$N_{[i,0]} = \left(\frac{l_0}{l_i}\right)^{\overline{\Delta}_x^{[\beta_0, \beta_k]}} \quad \overline{\Delta}_x^{[\beta_0, \beta_k]} = \sum_{k=1}^n \left( \alpha_k \Delta_x^{[\beta_0, \beta_k]} + \gamma_k \Delta_x^{[\beta_0, \beta_{k-1}]} \right) + \alpha_0 \Delta_x^{[\beta_0]} + \gamma_0 \Delta_{[0,0]} \tag{3.48}$$

$$\sum_{k=1}^n (\alpha_k + \gamma_k) + \alpha_0 + \gamma_0 = 1 \tag{3.49}$$

La dimension équivalente affiche la contribution de chacun des types de déviations, chacune portant un poids différent et leur somme étant égale à l'unité.

On pourra ajouter que le puits d'entropie d'échelle peut prendre une forme fractionnaire menant aux mêmes relations, dans le cas polynomial, celui-ci requérant une gamme de déviation finie et ayant un incrément fini entre chaque mode<sup>3</sup>. On pourrait de plus, travailler avec des systèmes plus complexes utilisant des modes discrets  $\{\beta_0, \beta_k, \beta_n\}$  et non plus une gamme entière  $[\beta_0, \beta_n]$ . Quelques cas simples d'entropies d'échelle unimodales et multimodales sont présentés en figure 3.16.

D'autres cas particuliers de puits d'entropie d'échelle sont intéressants :

**Cas 1 :** En considérant qu'il existe un  $\beta_n^*$  tel que  $\Delta_x^{[\beta_0, \beta_n]} \approx \Delta_x^{[\beta_n^*]}$  et  $\Delta_x^{[\beta_0, \beta_{n-1}]} \approx \Delta_x^{[\beta_{n-1}^*]}$ , on peut utiliser une décomposition pour faire apparaître les pures successions de déviations au fractal pur, la fractalité pure étant associée à l'échelle intégrale ( $\Delta = \Delta_{[0,0]}$ ) :

$$\beta_n = \frac{(n+1)((\Delta_x^{[\beta_0, \beta_n]} - \Delta_{[0,0]}) - (\Delta_x^{[\beta_0, \beta_{n-1}]} - \Delta_{[0,0]}))}{x^{n+1}} = \beta_n^* - \frac{(n+1)}{n} \frac{\beta_{n-1}^*}{x} \tag{3.50}$$

3. Il est nécessaire de noter qu'un puits d'entropie d'échelle global négatif implique une singularité infinie à l'échelle prise comme référence, ici  $l_0$

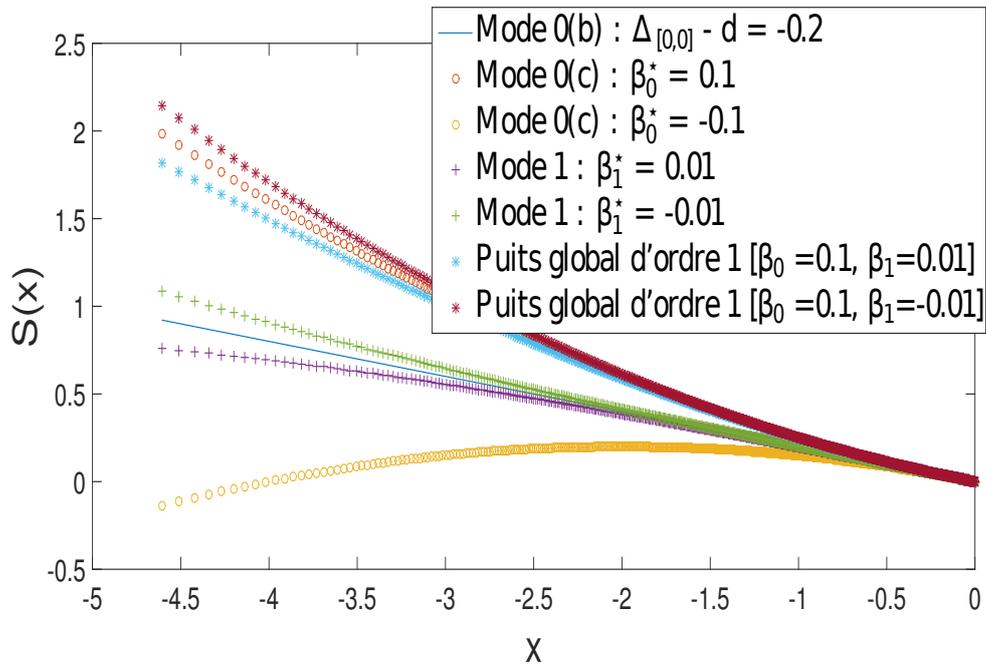


FIGURE 3.16 – Entropie d'échelle en fonction de l'échelle logarithmique pour différents modes et comportements globaux

$$\frac{\beta_{n-1}^*}{(\beta_n - \beta_n^*)} = -\frac{nx}{n+1} \quad (3.51)$$

Avec  $\beta_{(n)}^*$  la déviation au fractal pur  $\Delta_{[0,0]}$  d'ordre  $n$ . En étendant l'hypothèse précédente pour chacune des déviations d'ordre  $n$  le puits d'entropie d'échelle devient :

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^n \left( \beta_k^* x^k - \frac{(k+1)}{k} \beta_{k-1}^* x^{k-1} \right) + \beta_0^* = \beta_n^* x^n + \sum_{k=2}^n \left( -\frac{1}{k} \beta_{k-1}^* x^{k-1} \right) \quad (3.52)$$

On aperçoit ainsi une superposition de déviations pures au fractal, où le comportement polynomial est remplacé par le mode équivalent.

Cas 2 : Ce second cas requiert des hypothèses particulières, la première étant un lien entre chaque invariant de puits d'entropie d'échelle global et le deuxième une forme particulière dépendante de la gamme de déviation :

$$\beta_k = \beta_0^{k+1} \quad \omega(x) = \sum_{k=0}^n (k+2)(k+1)\beta_0^{k+1} x^k \quad (3.53)$$

$$\Delta_{[i,0]} - \Delta_{[0,0]} = \sum_{k=0}^n (k+2)\beta_0^{k+1} x^{k+1} \quad (3.54)$$

$$S(x) = (\Delta_{[0,0]} - d)x + \sum_{k=0}^n \beta_0^{k+1} x^{k+2} = x \left[ (\Delta_{[0,0]} - d) + \frac{1 - (\beta_0 x)^{n+2}}{1 - (\beta_0 x)} \right] \quad (3.55)$$

L'avantage de cette forme provient du fait que le problème est réduit à la caractérisation d'un seul invariant d'échelle  $\beta_0$  pouvant être obtenu à partir d'une régression simple.

### 3.3.3 Fractals dissipatifs déterministes et log-périodicité

#### La méthode du compas pour la mesure de dimension

Il existe plusieurs méthodes de mesure d'une géométrie permettant d'estimer une dimension fractale. Suivant les méthodes utilisées, certaines peuvent donner des résultats différents. Dans notre cas, nous allons utiliser la méthode du compas (divider method). Cette méthode fut à l'origine utilisée pour mesurer des frontières mettant en évidence des lois de puissance [Richardson, 1961]. Elle permet la mesure d'une longueur en utilisant un pavage de la courbe étudiée (voir figure 3.17). Cependant, il peut arriver que plusieurs pavages soient possibles à une même échelle suivant que l'on prenne le premier ou le dernier point intersecté par le compas (cas du mouvement brownien) ; ou encore que l'on ait un point d'origine différent. Une autre problématique apparaît lorsque le dernier morceau de courbe à paver est plus petit que la taille du compas. Ceci implique un nombre de boules non entier lorsque l'on tient compte de ce reste [Klinkenberg, 1994].

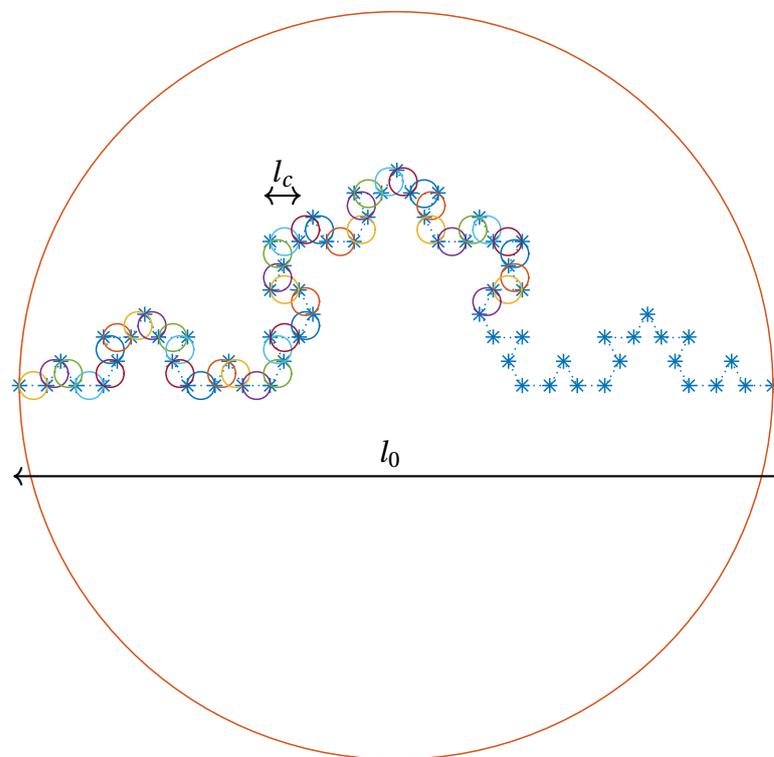


FIGURE 3.17 – Pavage d'une géométrie avec deux échelles différentes  $l_0$  et  $l_c$

Un outil de mesure de dimension fractale est donc nécessaire, celui-ci devant être testé sur des géométries fractales connues afin de vérifier l'estimation correcte de leur dimension. On parle ici de géométrie fractale bien que vis-à-vis du mathématicien nous devrions plutôt parler de "préfractal", c'est à dire, de géométries fractales dont le niveau d'itération est fini. Les géométries fractales ainsi étudiées possèdent deux échelles cut-offs, que l'on pourra appeler comme dans le cadre de l'entropie d'échelle, une échelle intégrale ou échelle de corps  $l_0$  et une échelle minimale ou échelle crête  $l_c$ . Les géométries qui seront étudiées sont des géométries très connues caractérisées par leur dimension d'homothétie (figure 3.18) :

- Ligne euclidienne de dimension  $\Delta = 1$
- Courbe de Von Koch ayant une dimension  $\Delta = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.2618$
- Courbe de Sierpiński en pointe de flèche de dimension  $\Delta = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.5849$

— Courbe ou saucisse de Minkowski de dimension  $\Delta = \frac{\ln 8}{\ln 4} = 1.5$

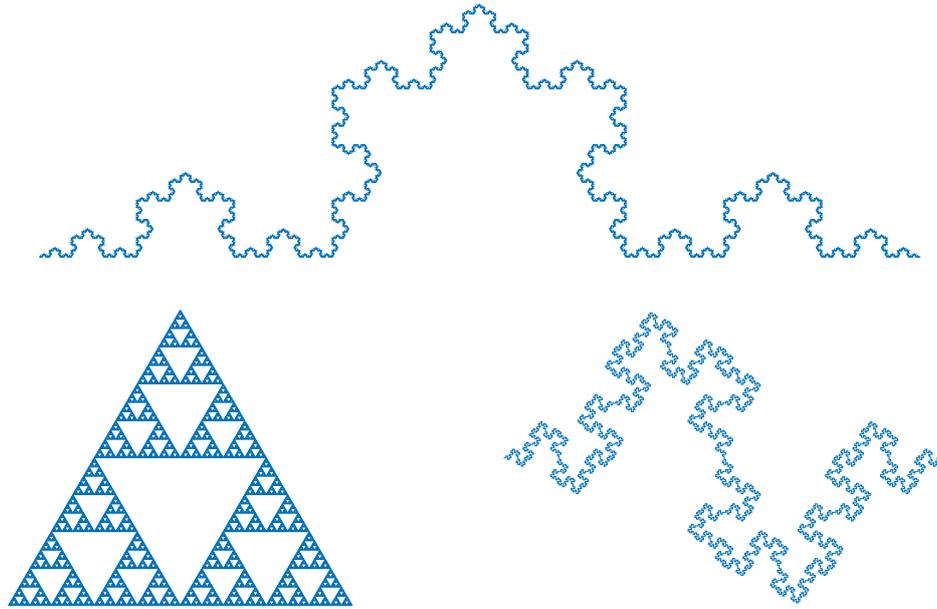


FIGURE 3.18 – Illustration des différentes géométries fractales (de haut en bas et de gauche à droite) : Courbe de Von Koch, courbe de Sierpiński en pointe de flèche et courbe de Minkowski

La première illustration sur un segment euclidien montre le gain de précision que l'on obtient lorsqu'on utilise un nombre de pavages non entier par rapport à une analyse classique. Comme on peut le voir sur la figure 3.19 non seulement la dimension est correctement estimée, mais l'échelle intégrale ne présente pas de biais (constante  $p_2$  nulle). Par conséquent, l'utilisation d'un nombre de boules fractionnaire est préférable tel que :

$$Nb_{[i,0]} = N_{[i,0]} + \frac{[FF]}{l_i} \quad (3.56)$$

$Nb_{[i,0]}$  : nombre de recouvrements corrigé (associé à l'échelle  $l_i$ )

$N_{[i,0]}$  : nombre de recouvrements requis pour paver la courbe à l'échelle  $l_i$

[FF] : distance restante entre le dernier pavé et le point final de la courbe

$l_i$  : échelle d'observation (taille du pavage)

Pour les fractals de dimension non entière, l'estimation rigoureuse de la dimension à partir de la méthode des compas présente une erreur de quelques pourcents vis-à-vis de la dimension d'homothétie lorsque les échelles d'extension de la géométrie restent faibles. Pour améliorer la précision, il est généralement nécessaire d'avoir beaucoup d'itération et de ne pas prendre en compte les grandes échelles (où l'erreur est plus importante). Les méthodes classiques d'estimation de la dimension utilisent une régression linéaire sur l'analyse en échelle (ie le graphe traçant le nombre de boules en fonction de l'échelle logarithmique), ou encore un fenêtrage de régression linéaire en utilisant uniquement les petites échelles (voir figure 3.20). Malgré une erreur plus faible dans l'estimation de la dimension que la régression linéaire simple, le fenêtrage nécessite un temps de calcul beaucoup plus conséquent pour des résultats de qualité légèrement meilleurs.

Afin d'améliorer la précision de l'estimation de la dimension, Nams [2006] à utilisé des considérations statistiques. Dans notre cas, cherchant une mesure précise des propriétés d'échelle à travers l'espace des échelles, nous proposons une méthode basée sur la structure même de la géométrie afin de savoir si l'outil de mesure est correctement dimensionné.

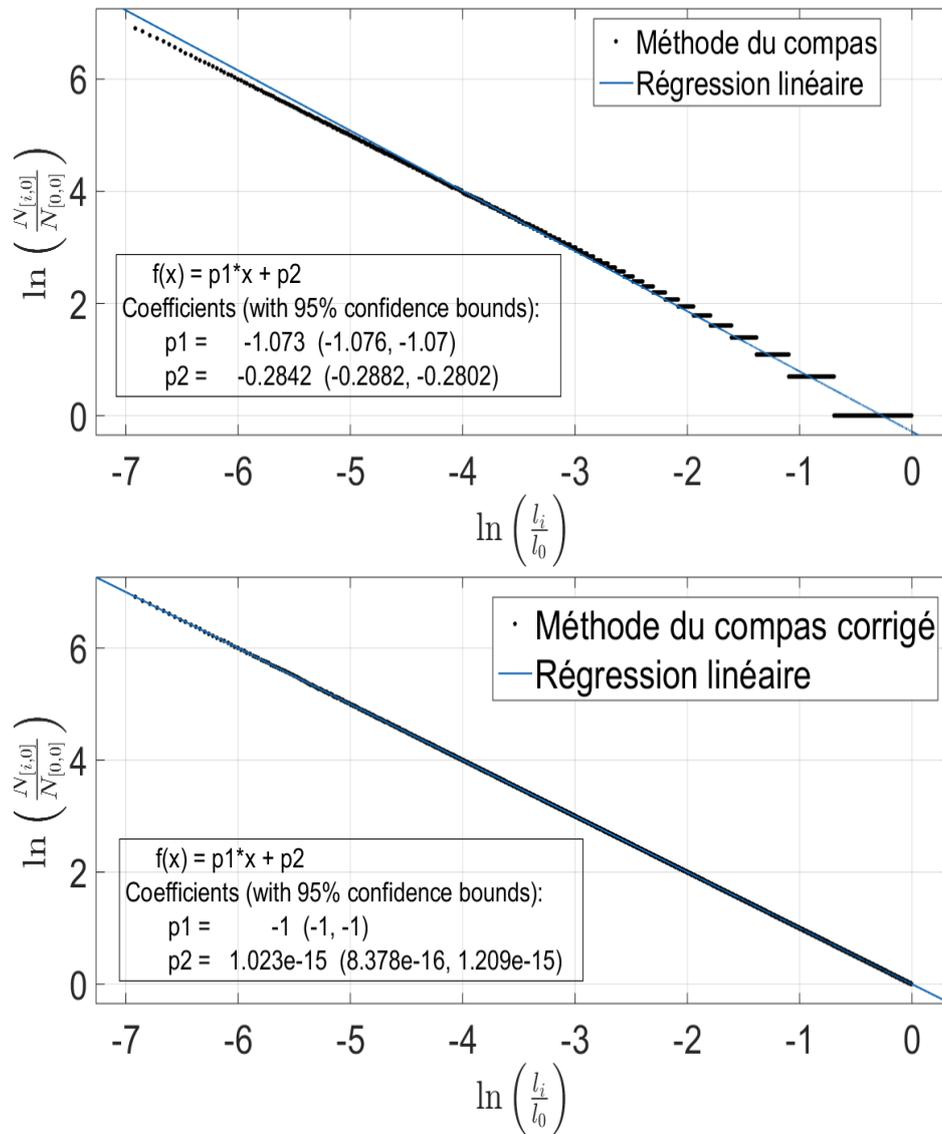


FIGURE 3.19 – Analyse en échelle utilisant un nombre de pavages classique (haut) et fractionnaire (bas) avec  $p1$  le coefficient permettant d'estimer la dimension fractale et  $p2$  une erreur sur l'ordonnée à l'origine

Notre méthode est basée sur la mesure précise de ce que l'on appelle les échelles de transition, de fait, à partir d'une analyse en échelle sur la gamme  $[l_{min}; l_{max}]$ , il est possible d'obtenir les échelles de coupure (cut-off) liées à la géométrie (ou bien liées au phénomène si l'on étudie un phénomène). On appelle ainsi échelle de transition proche ou échelle intégrale (ou encore échelle de corps)  $l_0$  l'échelle pour laquelle le nombre de divisions recouvrant la géométrie en utilisant la méthode du compas est égale strictement à l'unité  $N_{[0, 0]} = 1$ . Pour ce qui est de l'échelle de transition lointaine ou échelle minimale (ou encore échelle crête), celle-ci est liée à la fin de la fractalité et à un retour au comportement euclidien de la dimension dépendante d'échelle, correspondant à  $\Delta_{[c, 0]} = 1$  (dans le cadre de l'étude de courbes) et où le critère local, c'est à dire l'équation 3.57 ne fluctue plus (voir figure 3.21). Pour finir, la dimension finale estimée est considérée comme la pente entre ces deux échelles caractéristiques.

L'échelle intégrale est accessible directement par l'analyse en échelle, ce qui n'est pas le cas de l'échelle crête. En effet, pour déterminer l'échelle minimale, il est nécessaire d'utiliser

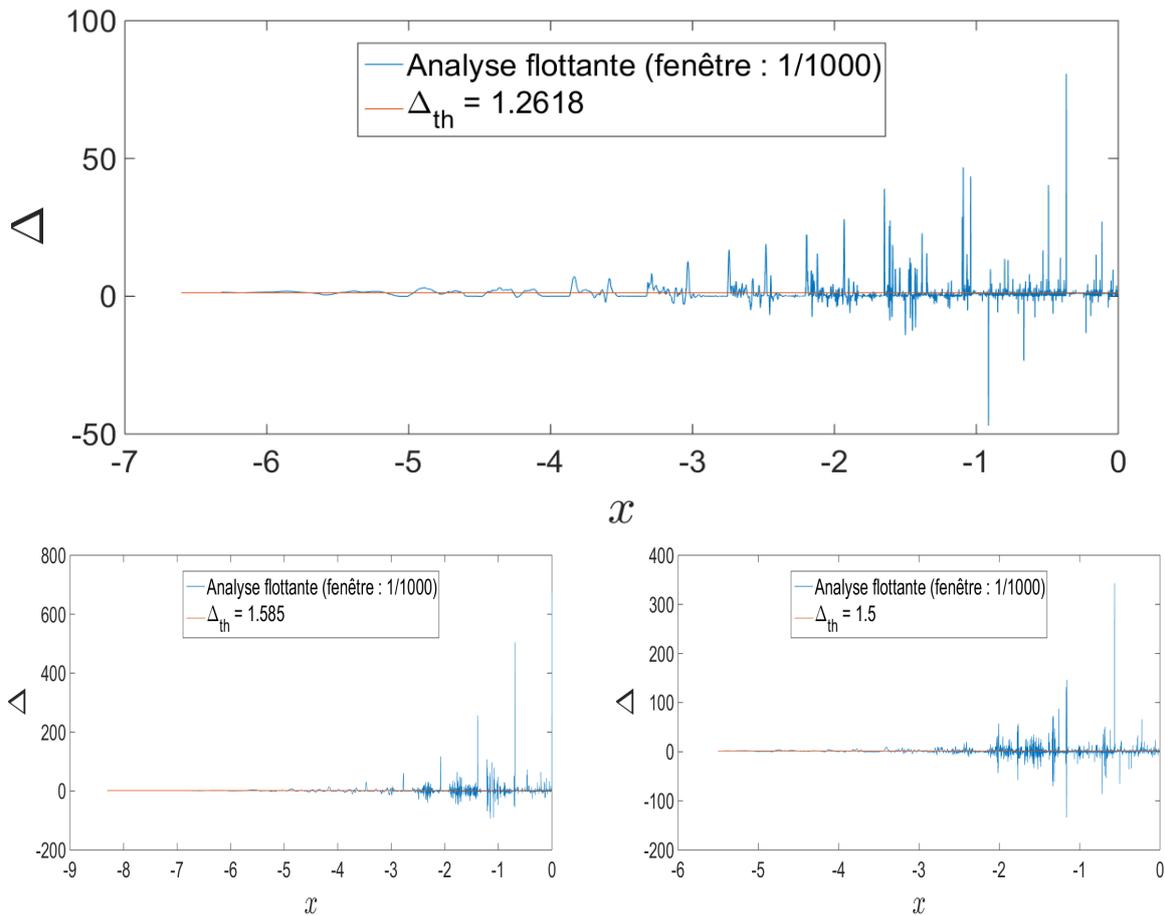


FIGURE 3.20 – Dimension estimée à partir d’un fenêtrage (de taille 1/1000 de l’analyse) pour un Von Koch de rang 6, un Sierpiński en pointe de flèche de rang 12 et courbe de Minkowski de rang 5

l’équation suivante (représentant la dimension locale) :

$$\frac{d \ln \left( \frac{N_{[i,0]}}{N_{[0,0]}} \right)}{d \ln \left( \frac{l_i}{l_0} \right)} = \frac{\ln \left( \frac{N_{[i+1,0]}}{N_{[0,0]}} \right) - \ln \left( \frac{N_{[i,0]}}{N_{[0,0]}} \right)}{\ln \left( \frac{l_{i+1}}{l_0} \right) - \ln \left( \frac{l_i}{l_0} \right)} = \frac{\ln \left( \frac{N_{[i+1,0]}}{N_{[i,0]}} \right)}{\ln \left( \frac{l_{i+1}}{l_i} \right)} \quad (3.57)$$

Puisque l’on sait que la mesure de dimension possède une erreur non négligeable à grande échelle, on décide de tester les géométries fractales discutées précédemment pour plusieurs niveaux d’itérations (ou rangs). Ainsi, on évalue les échelles caractéristiques de chaque géométrie pour chaque rang étudié (6 rangs pour le Von Koch ; 6 rangs pour le Sierpiński et 5 rangs pour le Minkowski). On en déduit la dimension. Les résultats obtenus sont présentés en figure 3.22 pour chacune des géométries où l’on peut les comparer avec la méthode classique. La méthode classique utilise une régression linéaire de l’analyse en échelle, celle-ci étant effectuée avec la méthode du compas prenant en compte le reste (nombre de boules fractionnaire). La dimension fractale obtenue est assez satisfaisante vis-à-vis de la dimension d’homothétie (théorique). Il apparaît néanmoins que même pour des géométries fractales déterministes l’évaluation de la dimension présente une erreur. La méthode classique (tout comme le fenêtrage évoqué précédemment) nécessite beaucoup d’échelles pour être fiable et conserve toutefois un petit pourcentage d’erreur. Pour ce qui est de la méthode des échelles de transition, celle-ci présente des résultats proches des résultats théoriques bien meilleurs que la méthode classique permettant ainsi de vérifier et de garantir la fiabilité des outils d’analyse en échelle.

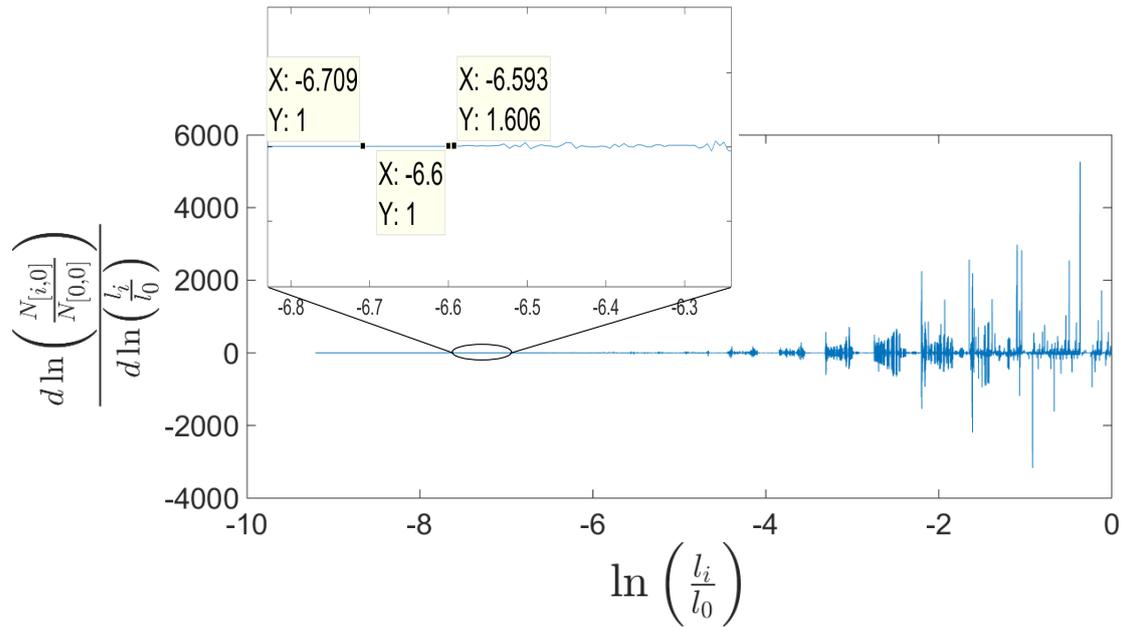


FIGURE 3.21 – Détermination de l'échelle crête pour une courbe de Von Koch de rang 6

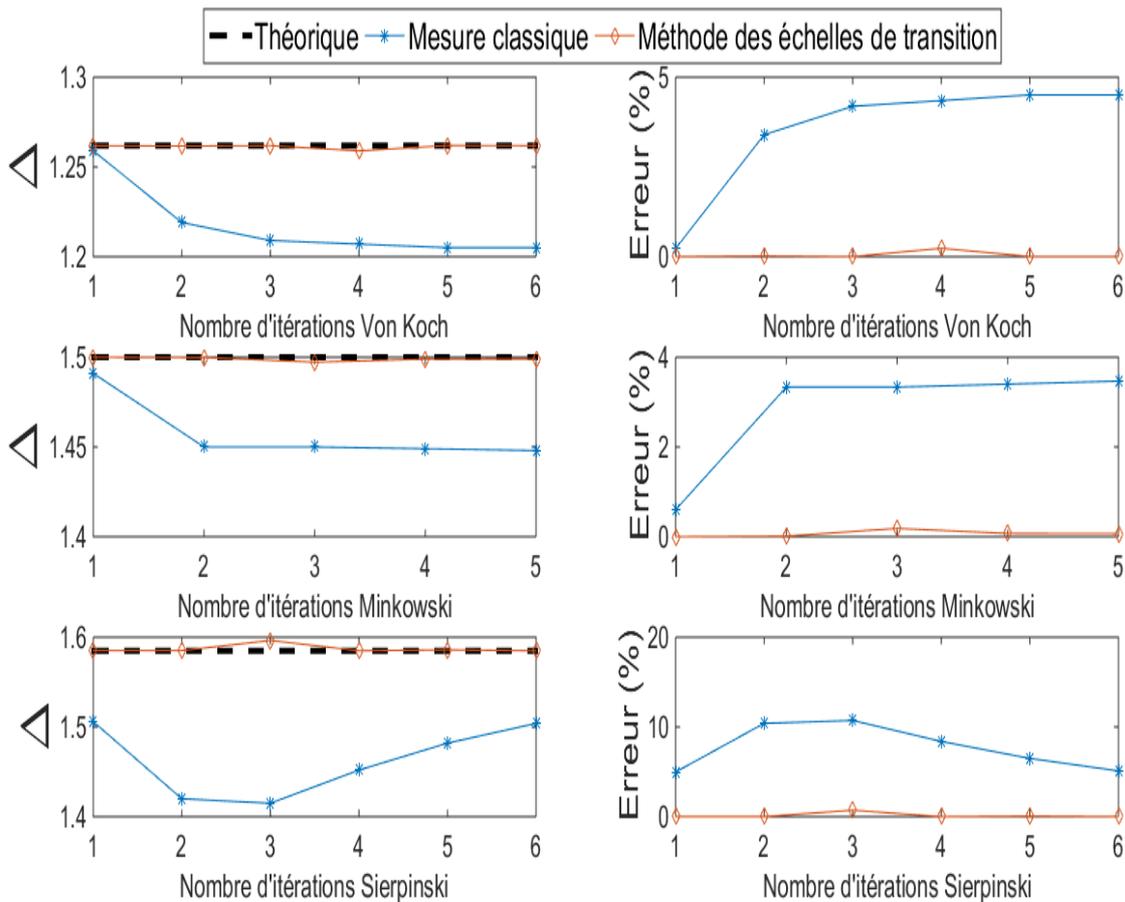


FIGURE 3.22 – Résultats obtenus à partir de la méthode des échelles de transition et de la méthode classique pour différentes géométries et différents niveaux d'itérations

### Échelles caractéristiques et échelles de construction

Les échelles caractéristiques de la géométrie, c'est à dire échelle crête et échelle intégrale, jouent un rôle important dans la dimensionnalité de celle-ci et ce quelque soit le niveau

d'itération. Il est nécessaire d'ajouter que la pente entre ces deux échelles (donnant la dimension) intersecte ce que l'on appellera les échelles de construction de la géométrie. Ces échelles de construction s'avèrent être des échelles crêtes intrinsèques ou internes à la géométrie, provenant de la géométrie à un niveau intermédiaire. En d'autres termes des échelles crêtes associées à chaque rang intermédiaire de la géométrie. Ces échelles peuvent donc être vues comme le squelette de la géométrie (voir figure 3.23).

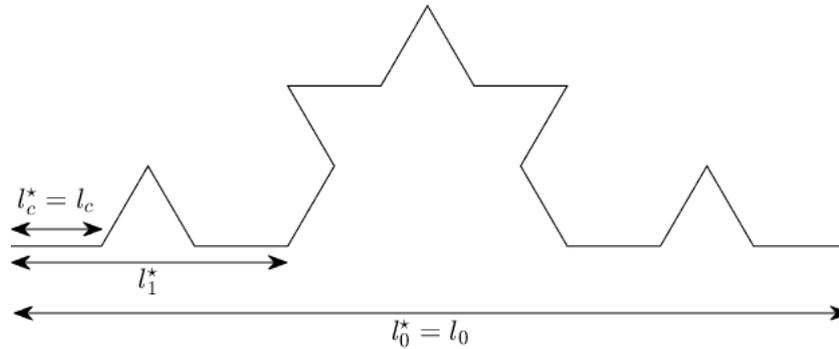


FIGURE 3.23 – Les différentes échelles de construction d'un Von Koch de rang 2 :  $l_0^*$  étant l'échelle intégrale  $l_0$  ;  $l_c^*$  l'échelle crête  $l_c$  ; et  $l_1^*$  représente une échelle intrinsèque de construction - l'échelle crête d'un Von Koch de rang 1, géométrie intermédiaire

Ces échelles sont discrètes et sont liées entre elles par une relation d'échelle :

$$l_i^* = \frac{l_0^*}{a^i} \quad i \in \mathbb{N} \quad (3.58)$$

Où  $l_0^* = l_0$  est l'échelle intégrale et  $a$  est l'inverse du ratio d'homothétie.

On présente l'analyse en échelle des trois géométries étudiées précédemment et leurs échelles de construction en figure 3.24, figure 3.25 et figure 3.26. Il est par conséquent possible d'estimer la dimension fractale tout comme avec les échelles caractéristiques, en utilisant une pente prise entre échelles de construction. De plus, l'observation de l'analyse en échelle nous indique d'autres particularités liées à la géométrie. En effet, le Von Koch et le Minkowski sont considérés comme fractalement concave (puisque la dimension théorique est toujours supérieure à la dimension mesurée) alors que le Sierpiński est fractalement convexe (puisque sa dimension théorique est toujours inférieure à sa dimension mesurée, la dimension étant la pente entre  $l_i$  et  $l_0$ ).

Il ressort ainsi des analyses en échelle que les échelles de construction sont le support de fractalité de la géométrie (des échelles de construction intermédiaire peuvent apparaître notamment pour le Von Koch car cette courbe peut être construite à partir d'un autre initiateur). Par ailleurs, le comportement entre ces échelles est tout à fait intéressant car on observe l'émergence d'oscillations et l'apparition de périodicité.

### Apparition de log-périodicité

À la vue de l'équation de diffusion d'entropie d'échelle et des raisonnements précédents, on constate que l'analyse en échelle ne montre pas l'entière structure fractale dans ses détails. Pour pallier à ce manque d'information, nous introduisons un nouveau diagramme pour étudier la fractalité dans sa globalité et particulièrement les déviations à la géométrie purement fractale. Le diagramme DTF, de l'anglais *departure to fractal*, est introduit permettant de tracer l'évolution de la dimension fractale et du puits d'entropie d'échelle de la géométrie à travers les échelles. On illustre des cas simples de géométries idéales en figure 3.27.

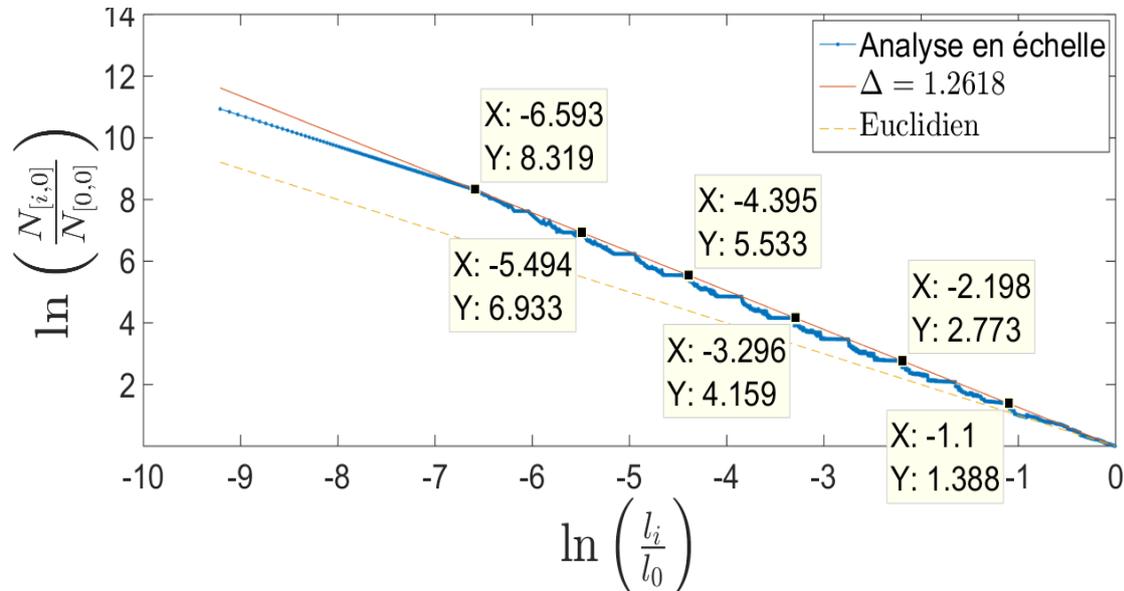


FIGURE 3.24 – Analyse en échelle montrant les différentes échelles de construction du Von Koch

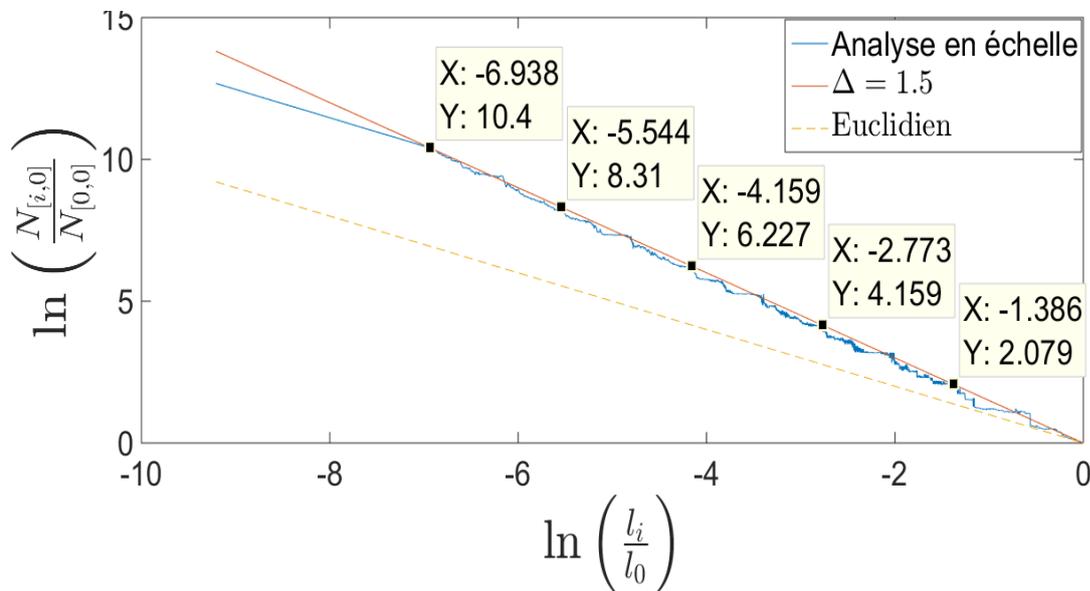


FIGURE 3.25 – Analyse en échelle montrant les différentes échelles de construction du Minkowski

Cependant, les cas idéaux de fractalité n'existent que théoriquement, en effet, les résultats des analyses en échelle précédentes montrent l'existence de log-périodicité intrinsèque dans l'espace des échelles. La dimension fractale théorique  $\Delta_{th}$  repose sur la pente liant les différentes échelles de construction, néanmoins, sur les autres échelles, la dimension fractale reste différente  $\Delta \neq \Delta_{th}$ . La log-périodicité a déjà été très étudiée [Brissaud, 2009, Fantazzini et Geraskin, 2011, Nottale et al., 2000, Queiros-Condé, 2000a, Sornette et Johansen, 2001] à travers l'utilisation d'un flux d'entropie d'échelle, de la relativité d'échelle ou encore de l'invariance d'échelle discrète dans l'optique d'une log-périodicité temporelle. Nous allons ici utiliser le diagramme DTF afin d'observer la log-périodicité intrinsèque d'une géométrie dans l'espace des échelles. Du point de vue purement théorique, la géométrie fractale pure requiert  $\frac{d\Delta_{th}}{dx} = 0$ . Cependant, les diagrammes montrent tous un comportement périodique tourbillonnaire de cette quantité qui converge vers un attracteur à petite échelle proche de la dimension théorique. L'universalité de ce comportement sur les différentes géométries nous indique la présence de log-périodicité (voir figure 3.28, figure 3.29, et figure 3.30).

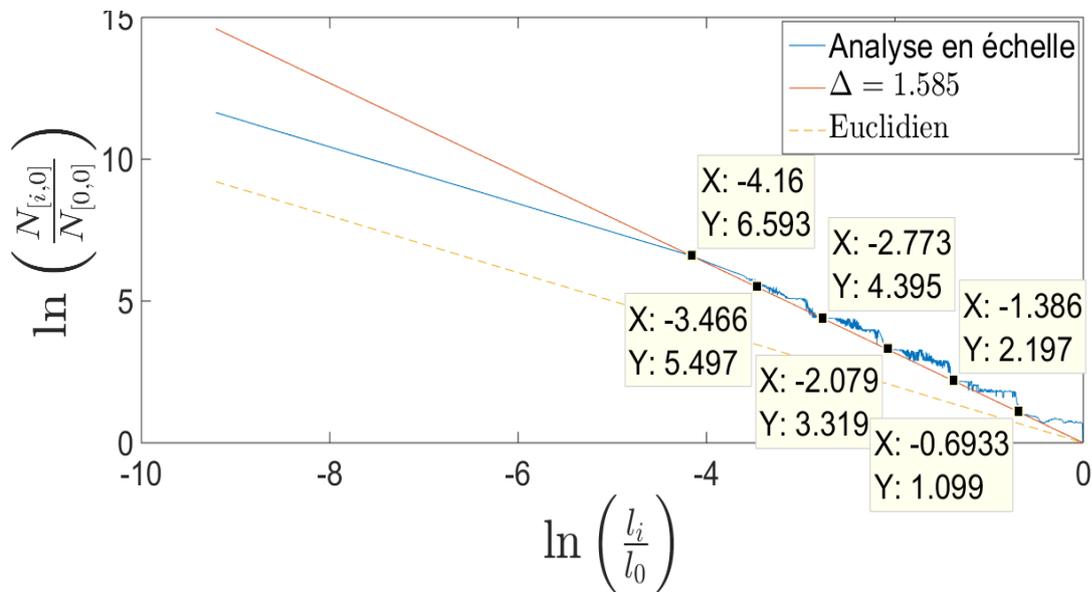


FIGURE 3.26 – Analyse en échelle montrant les différentes échelles de construction du Sierpiński

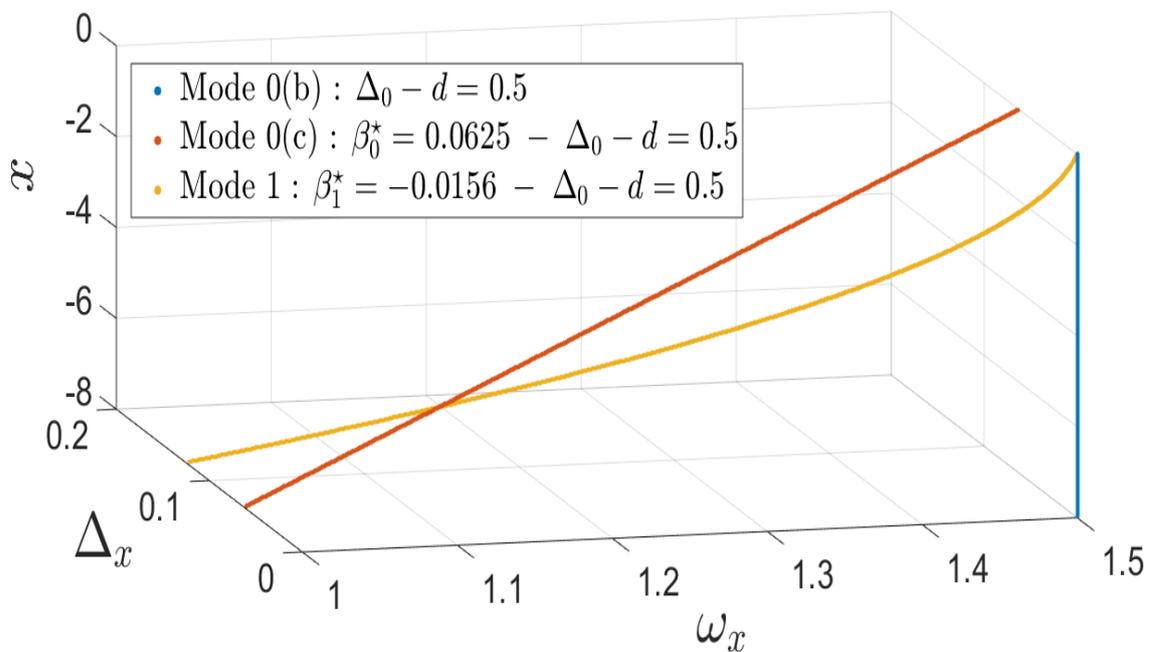


FIGURE 3.27 – Diagramme DTF de quelques cas simples

Afin de visualiser encore plus nettement le comportement log-périodique, on définit un facteur de déviation (proche de ce qui est défini dans [Queiros-Condé et Feidt \[2008a\]](#)) prenant en compte la déviation effective du fractal réel au fractal théorique :

$$\eta_i = \frac{\ln N_{[i,0]}^m}{\ln N_{[i,0]}^{th}} \quad \ln N_{[i,0]}^{th} = -\Delta_{th} \ln \left( \frac{l_i}{l_0} \right) \quad (3.59)$$

$N_{[i,0]}^m$  correspond au nombre de compas mesuré à l'échelle  $i$ , et  $N_{[i,0]}^{th}$  est le nombre de compas théorique à l'échelle  $i$ . De par sa définition, ce facteur révèle clairement la dépendance en échelle d'une géométrie et montre la log-périodicité des fractals déterministes étudiés en [figure 3.31](#), [figure 3.32](#) et [figure 3.33](#). Ce facteur peut de fait être utilisé pour comparer une géométrie à la théorie (par exemple la mesure d'un fractal déterministe comparée à une loi de puissance ayant la dimension de similarité de l'objet étudié). Le calcul d'un facteur de

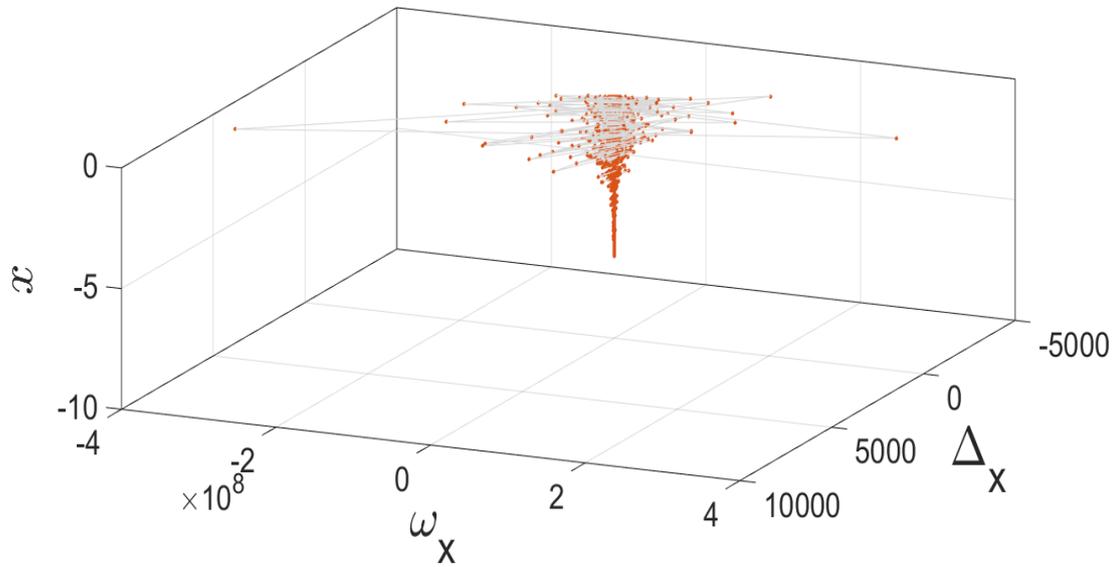


FIGURE 3.28 – Diagramme DTF du Von Koch

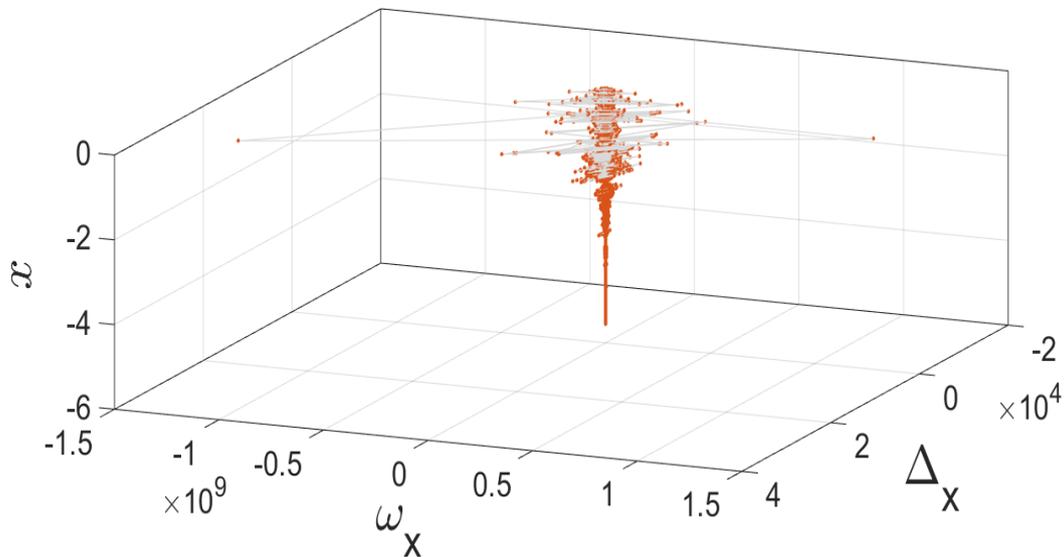


FIGURE 3.29 – Diagramme DTF du Minkowski

déviations moyennes représentent un équivalent du rendement global de la géométrie, c'est à dire, l'espace moyen utilisé par le phénomène réel comparé à son homologue idéalement fractal.

La log-périodicité évoquée précédemment peut être étudiée à partir de l'utilisation de l'entropie d'échelle. En effet, l'observation nous oriente vers un puits d'entropie d'échelle  $\omega(x) \neq 0$ , lié à la déviation existante des fractals déterministes au fractal pur. Ainsi, un fractal déterministe est pur uniquement sur ses échelles de constructions impliquant un flux d'entropie entre celles-ci. Les généralisations précédentes sur le puits d'entropie d'échelle apparaissent comme les plus courantes, mais d'autres formes particulières peuvent apparaître comme des sigmoïdes, des fonctions hyperboliques [Thiesset et al., 2016] ou encore des formes de types perturbatrices trigonométriques. Dans notre cas de log-périodicité, on considèrera simplement un terme perturbatif de type sinusoïdal sur la dimension locale :

$$A_f \cos(Wx) \operatorname{sgn}(\sin(Wx)) - \Delta_{[0,0]} = -\Delta_{[i,0]} \quad (3.60)$$

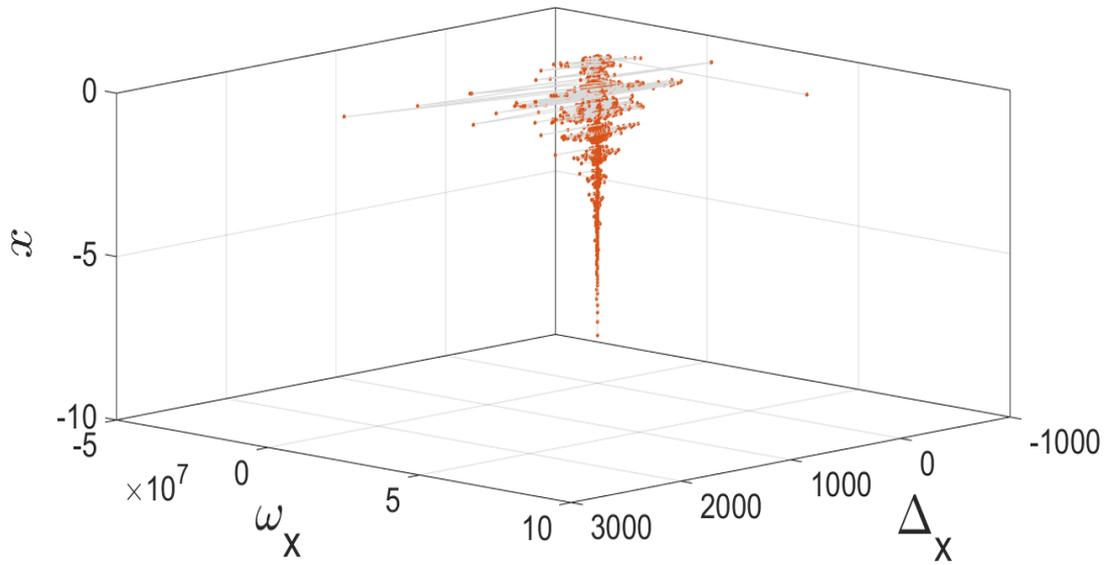


FIGURE 3.30 – Diagramme DTF du Sierpiński

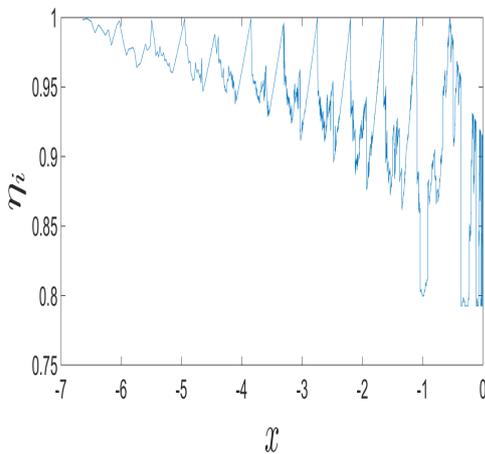


FIGURE 3.31 – Évolution du facteur de déviation en fonction de l'échelle pour le Von Koch

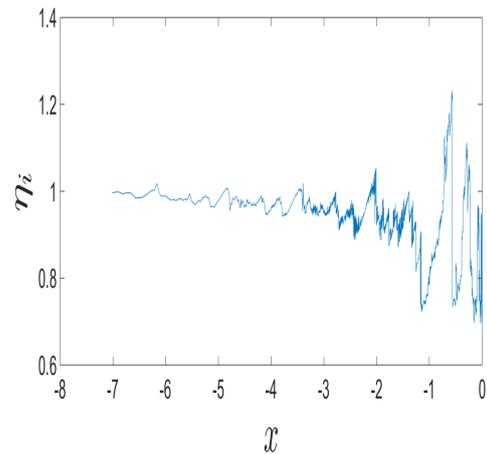


FIGURE 3.32 – Évolution du facteur de déviation en fonction de l'échelle pour le Minkowski

Où  $sgn(x)$  est la fonction signe définie comme :

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0. \\ -1, & \text{si } x < 0. \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (3.61)$$

Et  $\Delta_{[0,0]}$  la dimension à l'échelle intégrale étant égale à la dimension théorique.  $W = (2\pi/\alpha_p)$  est considéré comme la pulsation d'échelle de la géométrie avec  $\alpha_p$  la période d'échelle du fractal (liée aux échelles de construction). Ce qui mène simplement à  $N_{[i,0]}$  et au puits d'entropie d'échelle  $\omega(x)$  :

$$\ln\left(\frac{N_{[i,0]}}{N_{[0,0]}}\right) = \frac{A_f}{W} \sin(Wx) sgn(\sin(Wx)) - \Delta_{[0,0]}x \quad (3.62)$$

$$\omega(x) = A_f W \sin(Wx) sgn(\sin(Wx)) \quad (3.63)$$

Pour déterminer l'amplitude de perturbation, on considère comme hypothèse qu'un fractal dépendant d'échelle possède une dimension locale minimale nulle, impliquant :  $A_f =$

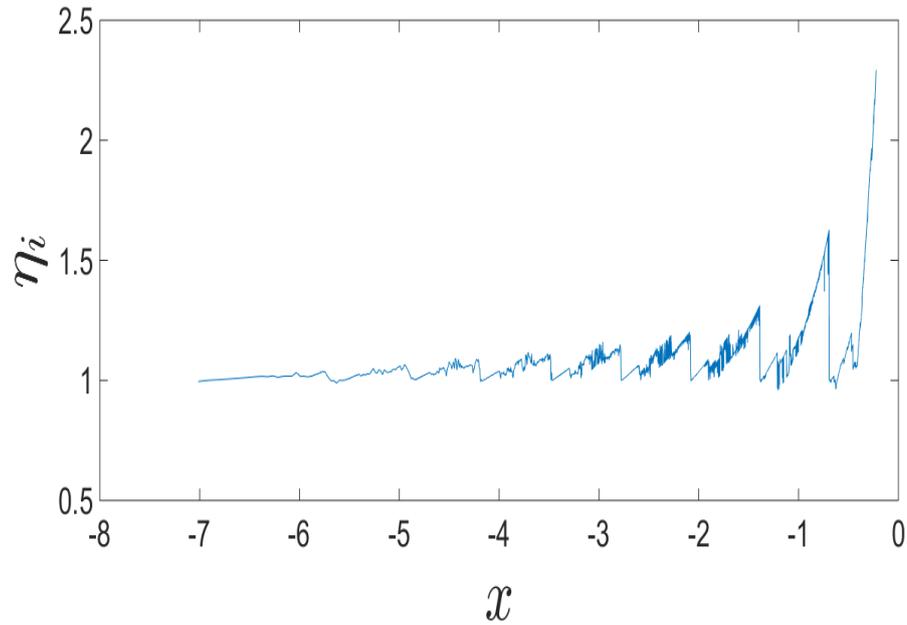


FIGURE 3.33 – Évolution du facteur de déviation en fonction de l'échelle pour le Sierpiński

$-\Delta_{[0,0]}$ . Sachant que l'on travaille avec des géométries déterministes connues, on peut déduire leur périodicité d'échelle  $\alpha_p = \ln(3)$  pour le Von Koch,  $\alpha_p = \ln(4)$  pour le Minkowski et  $\alpha_p = \ln(3)$  pour le Sierpiński.

À partir de l'équation de diffusion de l'entropie d'échelle, on obtient les résultats présentés en figure 3.34, figure 3.35 et figure 3.36. En sachant que le Sierpiński en pointe de flèche est fractalement convexe, la fonction cosinus est remplacée par la fonction sinus et l'amplitude de perturbation devient  $A_f = \Delta_{[0,0]}$ , montrant des résultats reproduisant de façon proche le comportement de la géométrie réelle.

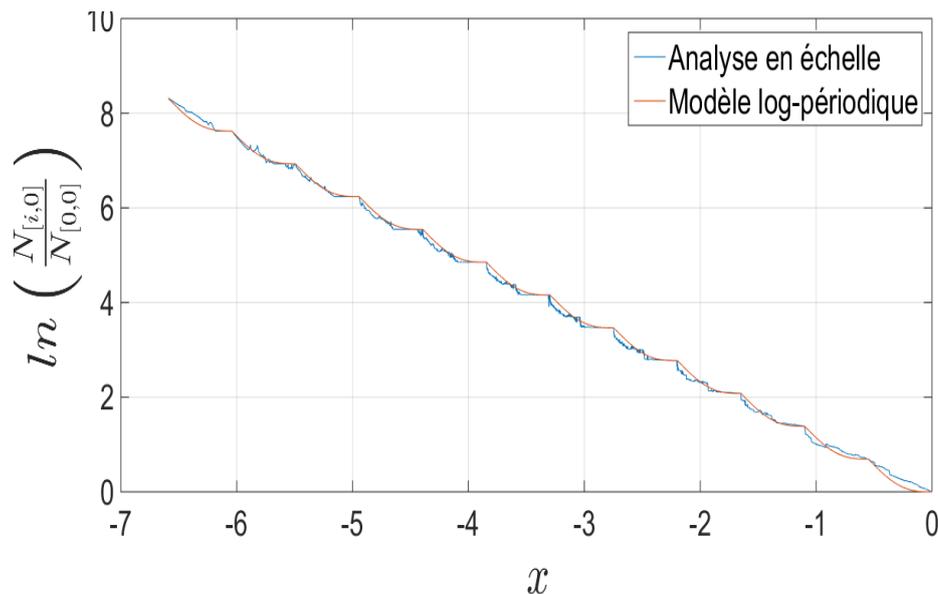


FIGURE 3.34 – Log-périodicité et approximation par l'entropie d'échelle du Von Koch

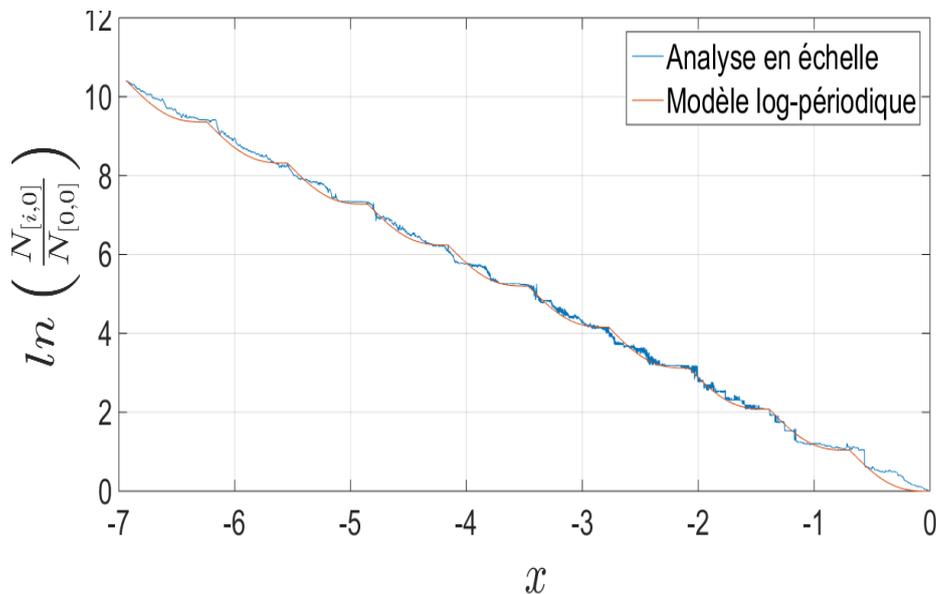


FIGURE 3.35 – Log-périodicité et approximation par l’entropie d’échelle du Minkowski

### Théorème de Moran pour la création de fractals dissipatifs

Dans le cadre de la généralisation précédente, on choisit de construire plusieurs géométries fractales déterministes paraboliques, celles-ci étant des géométries ayant une dépendance en échelle simple. Plusieurs exemples de géométries simples "dissipatives" seront ainsi construites :

1. Von Koch de rang 6 avec une dimension variant de 1,5 à 1.
2. Von Koch quadratique de rang 6 avec une dimension variant de 1,5 à 1.
3. Une courbe de Minkowski de rang 5 avec une dimension variant de 1,5 à 1.

Ces différentes géométries liées à une variation de dimension dans l’espace des échelles n’ont pas été explorées. Des idées proches ont été développées, [Tricot \[1995\]](#) étudia l’influence de la variation de l’angle d’une courbe de Von Koch sur sa dimension. Un autre travail proche de la dépendance en échelle est la création de fractals composites de [Lanoiselee et al. \[2014\]](#), menant à ce que l’on peut appeler des "plurifractals". Notre raisonnement nécessite une variation dans l’espace des échelles se traduisant de prime abord par une variation du ratio de similarité en fonction de l’échelle.

Les ratios de similarité ( $a$ ) qu’ils soient égaux entre eux ou pas, sont liés à la dimension fractale de similarité ( $d_s$ ) par l’équation de Moran [[Fernández-Martínez et al., 2016](#)] :

$$d_s = \frac{\ln(N)}{\ln(1/a)} \Rightarrow 1 = Na^d \Rightarrow 1 = \sum_i a_i^d \quad (3.64)$$

Pour contrôler la dimension, il est donc nécessaire de faire varier la taille des similarités en fonction de l’échelle. Dans le cas de la courbe de Von Koch par exemple, il s’agit d’une variation de la taille du pic du Von Koch, influençant la taille des similarités liées à celui-ci. La dimension de similarité du Von Koch classique est donnée par :

$$4 \left(\frac{1}{3}\right)^\Delta = 1 \Rightarrow \Delta = 1.2618 \quad (3.65)$$

Lorsque l’on fait varier la taille du pic (sans changer les autres similarités), on obtient deux similarités ayant un ratio  $\left(\frac{1}{3}\right)$  et deux autres ayant un ratio  $\left(\frac{a}{3}\right)$ . Ainsi, en utilisant le

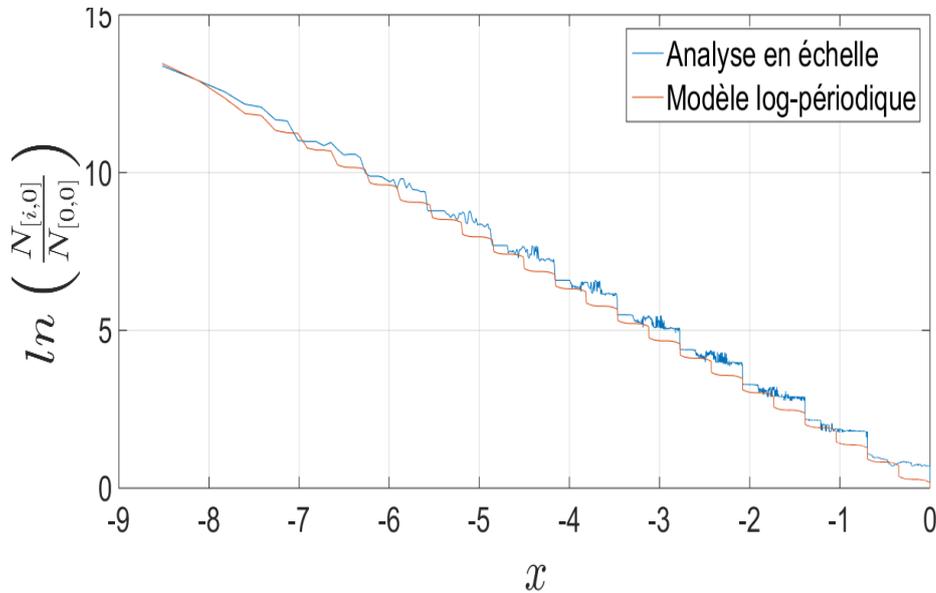


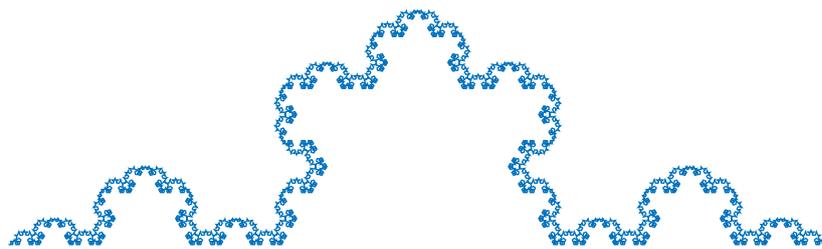
FIGURE 3.36 – Log-périodicité et approximation par l'entropie d'échelle du Sierpiński

théorème de Pythagore, on peut relier la hauteur du pic  $h$  et la taille de la similarité  $a^4$  :

$$2\left(\frac{1}{3}\right)^\Delta + 2\left(\frac{a}{3}\right)^\Delta = 1 \quad a^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + h^2\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 \quad (3.67)$$

Lorsque  $a = 1$ , on retrouve bien la courbe de Von Koch classique.

On considère ainsi une courbe bifractale de type Von Koch (figure 3.37) possédant deux dimensions fractales suivant l'échelle d'observation. À grandes échelles, la dimension fractale est  $\Delta \approx 1.2618$ , et à petites échelles (après trois gammes d'échelle), la dimension fractale devient  $\Delta \approx 1.6055$  ( $a = 1.5$ ) comme le montre l'analyse en échelle (figure 3.38).


 FIGURE 3.37 – Courbe bifractale de type Von Koch avec  $a = 1.5$  pour trois gammes d'échelle et  $a = 1$  ensuite

Nous construisons maintenant une courbe de type Von Koch parabolique, respectant (théoriquement) une équipartition du puits d'entropie d'échelle à travers les échelles et une

4. On pourrait être tenté d'écrire la dimension comme ;

$$\Delta = \frac{\ln(2 + 2s)}{\ln 3} \quad (3.66)$$

Cependant, ce Von Koch n'a pas une taille de similarité qui change, mais c'est son nombre de similarités (avec le coefficient  $s$ ) qui change d'où l'utilisation de la formule de Moran

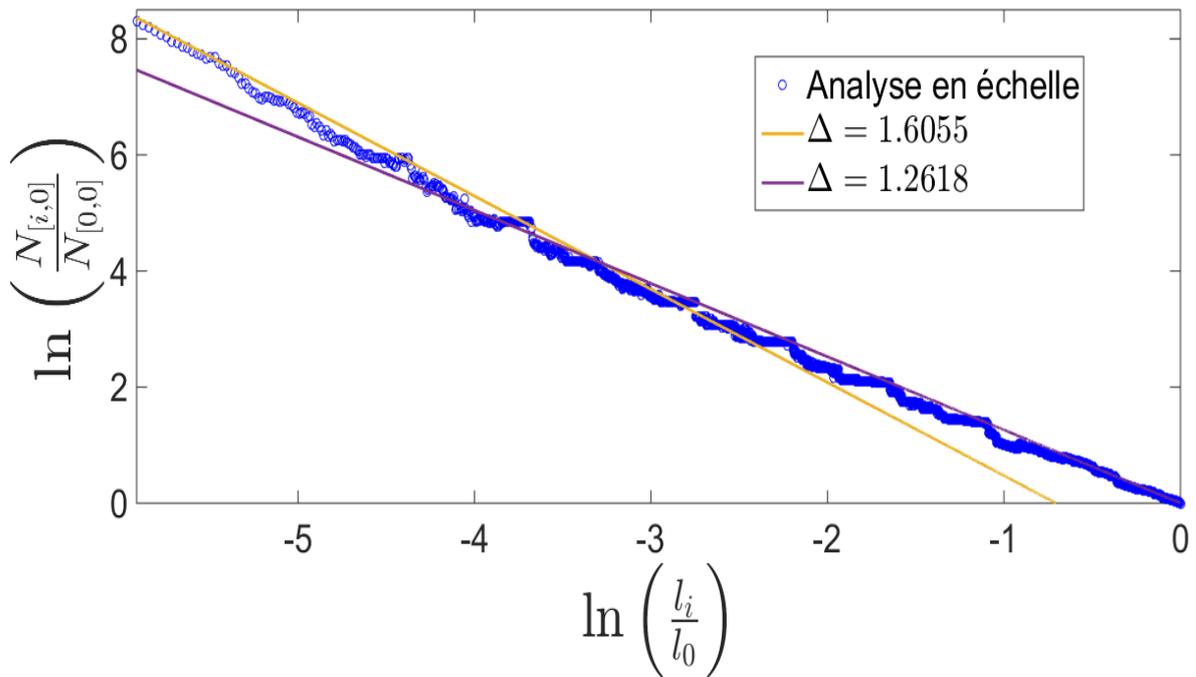


FIGURE 3.38 – Analyse en échelle de la courbe bifractale de type Von Koch montrant l’existence des deux dimensions différentes

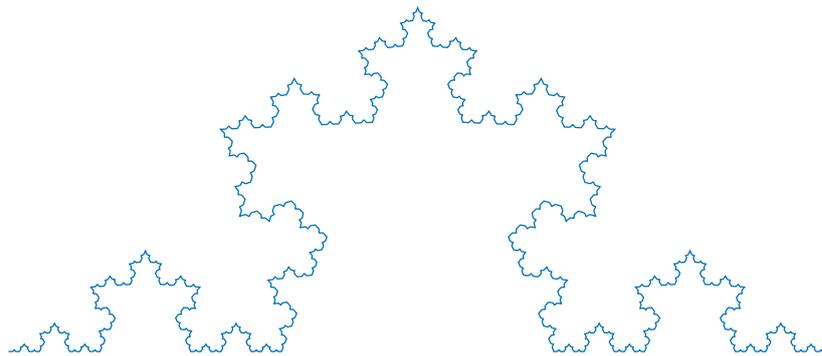


FIGURE 3.39 – Von Koch dont la dimension varie de  $\Delta = 1.5$  à  $\Delta = 1$

dimension fractale linéairement dépendante de l’échelle. Pour ce faire, on attribue une taille de pic changeant à chaque échelle et conduisant à une variation de la dimension de  $\Delta = 1.5$  à grande échelle jusque  $\Delta = 1$  à petite échelle (figure 3.39). On calcule d’abord l’invariant d’échelle en accord avec l’équation de diffusion d’entropie d’échelle :

$$\ln\left(\frac{N_{[i,0]}}{N_{[0,0]}}\right) = -\frac{\beta}{2}x^2 - \Delta_{[0,0]}x \quad \beta = \frac{\Delta_{[c,0]} - \Delta_{[0,0]}}{x_c} = \frac{1 - 1.5}{\ln(1/3^6)} \approx 0.0759 \quad (3.68)$$

Puis, on effectue une analyse en échelle de la géométrie. Les résultats obtenus montrent dans ce cas précis un parfait accord entre la prédiction donnée par l’équation de diffusion de l’entropie d’échelle et la mesure de la géométrie (voir figure 3.40).

De manière analogue pour le Von Koch quadratique (figure 3.41) et pour le Minkowski (figure 3.42), des résultats comparables sont obtenus en figure 3.43 et figure 3.44. Avec pour le Von Koch quadratique :

$$\ln\left(\frac{N_{[i,0]}}{N_{[0,0]}}\right) = -\frac{\beta}{2}x^2 - \Delta_{[0,0]}x \quad \beta = \frac{\Delta_{[c,0]} - \Delta_{[0,0]}}{x_c} = \frac{1 - 1.5}{\ln(1/3^6)} \approx 0.0759 \quad (3.69)$$

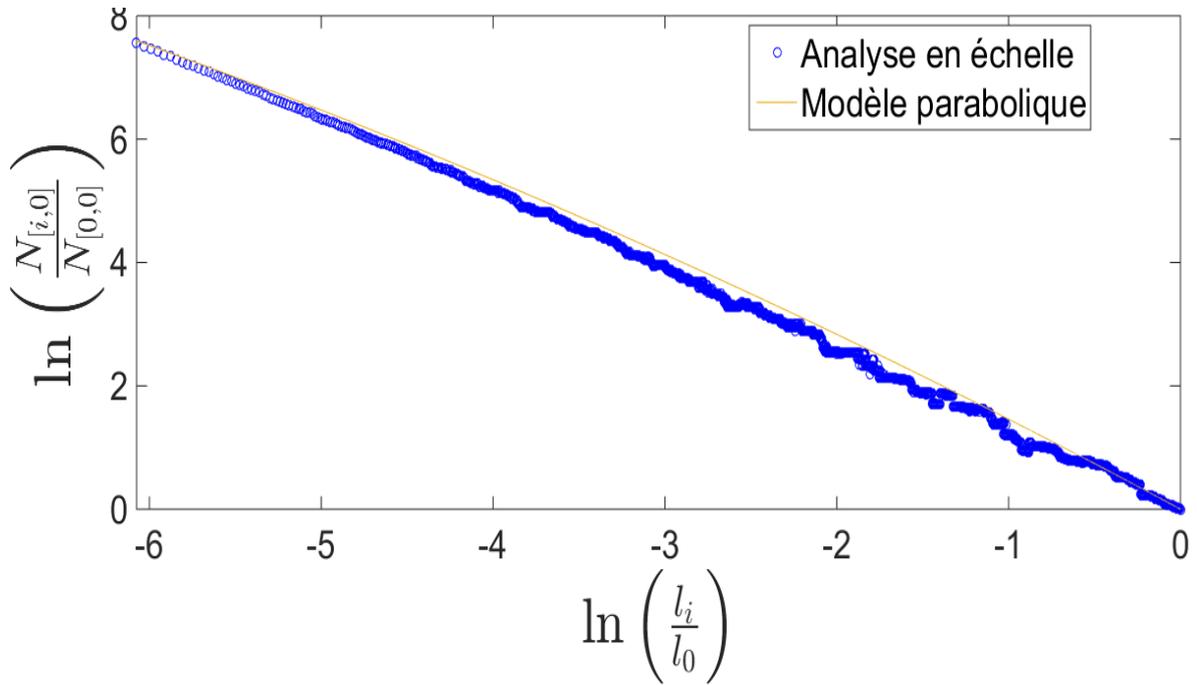
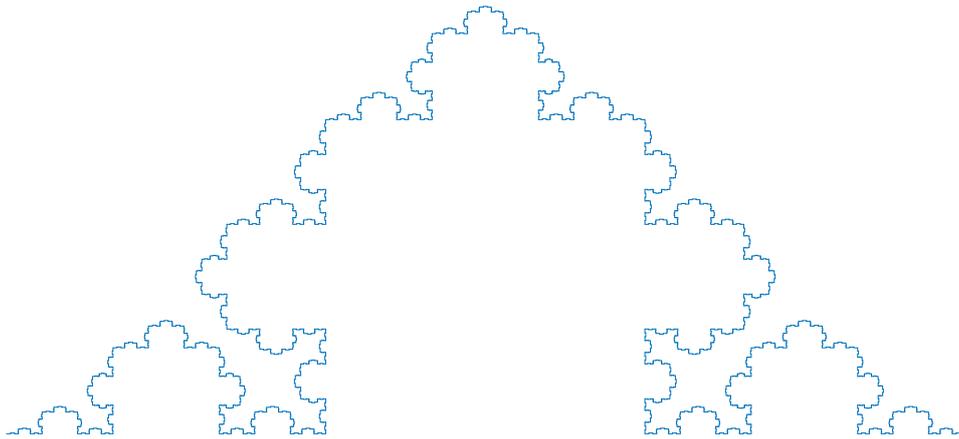


FIGURE 3.40 – Analyse en échelle et résultat de l'équation de diffusion pour un Von Koch parabolique


 FIGURE 3.41 – Von Koch quadratique dont la dimension varie de  $\Delta = 1.5$  à  $\Delta = 1$ 

Et pour le Minkowski :

$$\ln\left(\frac{N_{[i,0]}}{N_{[0,0]}}\right) = -\frac{\beta}{2}x^2 - \Delta_{[0,0]}x \quad \beta = \frac{\Delta_{[c,0]} - \Delta_{[0,0]}}{x_c} = \frac{1 - 1.5}{\ln(1/4^5)} \approx 0.0721 \quad (3.70)$$

Des géométries dépendantes d'échelle peuvent ainsi être construites en utilisant l'équation de Moran (locale), et être vérifiées par l'équation de diffusion d'entropie d'échelle comme on peut le voir pour des dimensions linéairement dépendantes d'échelle.

La méthode présentée pour calculer la variation de dimension se base sur l'équation de Moran de façon locale à chaque échelle<sup>5</sup>, la hauteur du pic étant liée à la taille de la similarité. Si l'on veut rendre compte d'une dimension moyenne de l'objet à travers les échelles, on utilisera le théorème de Moran sur toutes les échelles. Par exemple pour le cas du Von

5. On ne prend en compte dans l'estimation de la taille de la similarité à l'échelle crête que son rang d'itération sans tenir compte des effets des autres échelles. Cette hypothèse permet la considération d'un comportement euclidien sous cette échelle même si en réalité, ce n'est pas tout à fait vrai. Ainsi, de par son utilisation locale cette utilisation simple peut mener à des biais, nécessitant parfois une estimation plus précise de l'échelle crête.

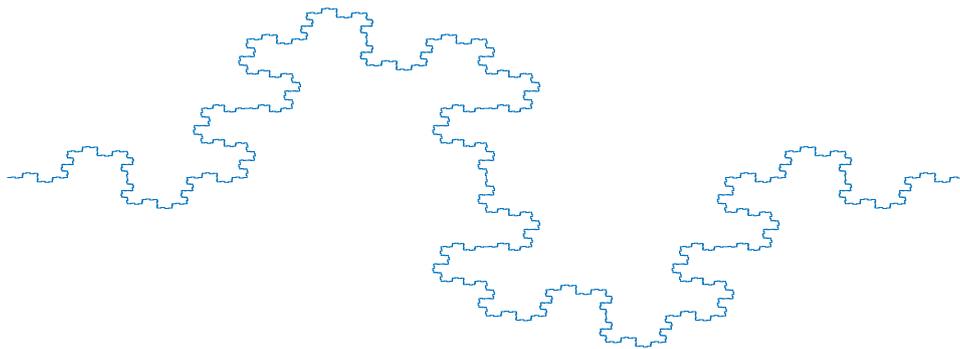


FIGURE 3.42 – Courbe de Minkowski dont la dimension varie de  $\Delta = 1.5$  à  $\Delta = 1$

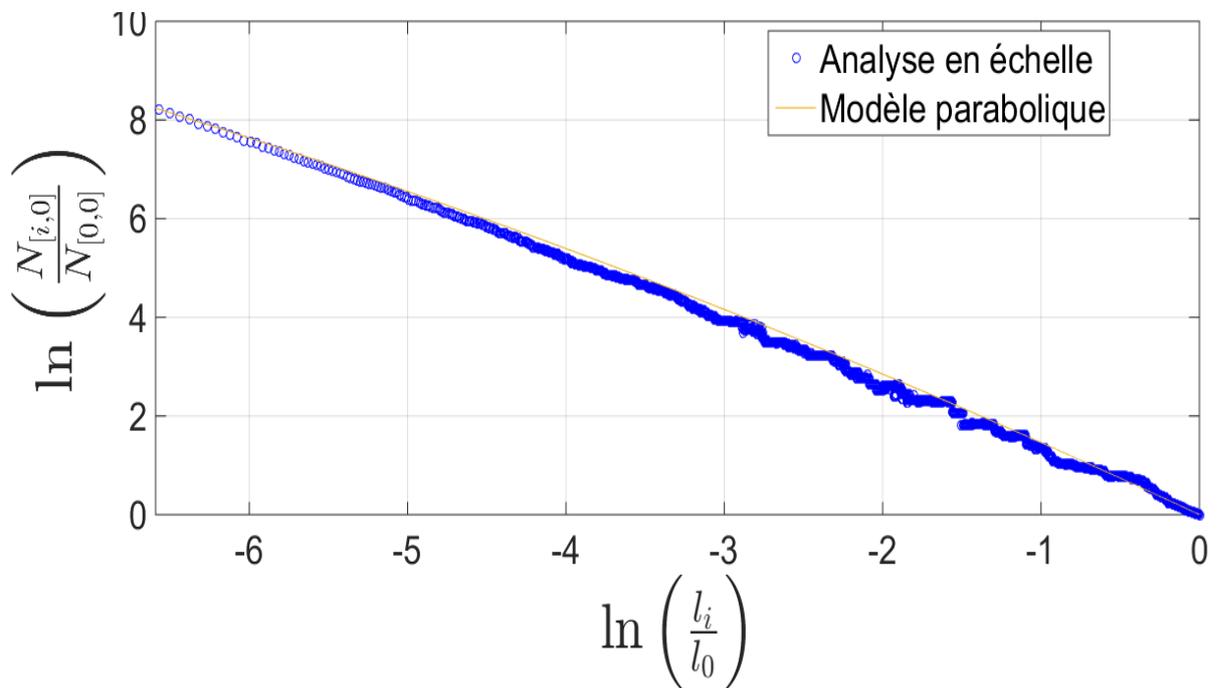


FIGURE 3.43 – Analyse en échelle et résultat de l'équation de diffusion pour le Von Koch quadratique parabolique

Koch, on a :

$$Mo_1 = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^\Delta + 2 \left(\frac{a_1}{3}\right)^\Delta \quad Mo_n = \left[ \frac{Mo_{n-1}}{3^{\Delta_n}} + Mo_{n-1} \left(\frac{a_n}{3}\right)^{\Delta_n} \right] 2^{n-1} \quad Mo_i := 1 \quad (3.71)$$

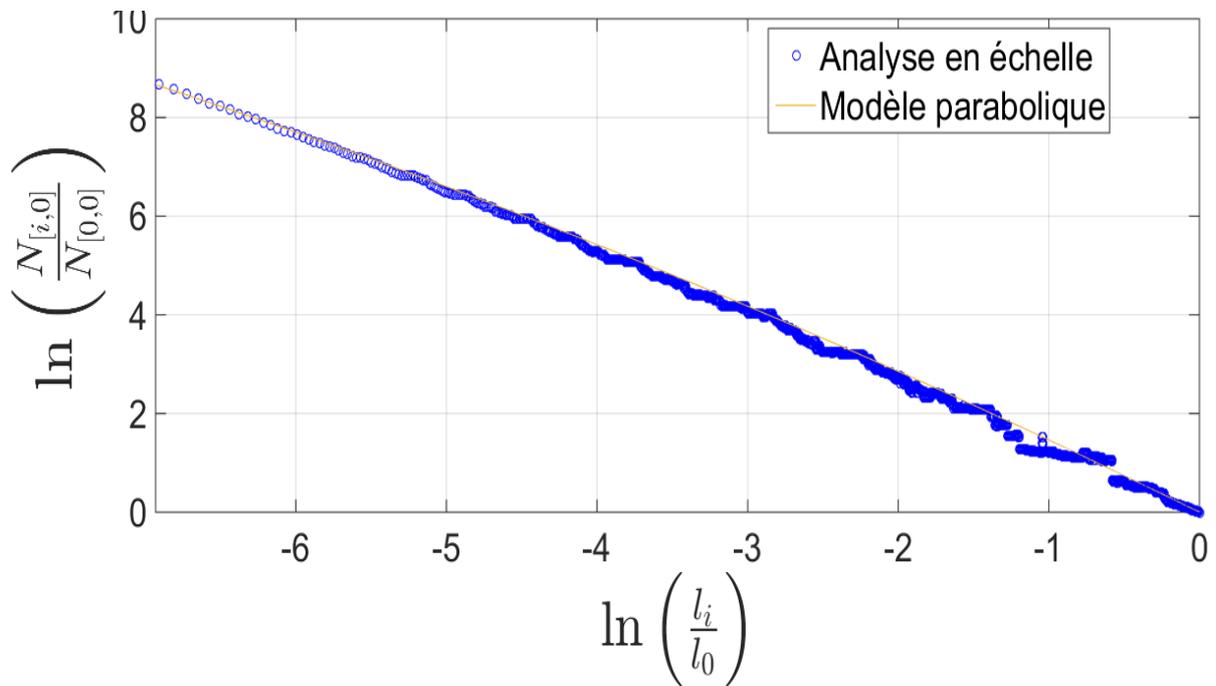


FIGURE 3.44 – Analyse en échelle et résultat de l'équation de diffusion pour le Minkowski parabolique

### 3.4 Géométrie fractale et entropie d'échelle en mécanique des solides

L'application de la géométrie fractale en mécanique a été majoritairement étudiée dans les axes classiques que sont la caractérisation auto-affine ou multifractale. L'utilité et la rigueur du formalisme introduit par l'entropie d'échelle permettront ainsi l'étude de plusieurs phénomènes mécaniques où la nécessité d'un cadre est souhaitable et où la simple géométrie fractale peut être mise en défaut.

#### 3.4.1 Caractérisation fractale des propriétés mécaniques

Les phénomènes de sollicitations mécaniques d'un matériau sont considérés de façon générale comme des phénomènes purement euclidiens. Les théories de [Weibull \[1939, 1951\]](#) (weakest link chain), de [Peterson \[1933\]](#) (effet de taille) et [Griffith \[1921\]](#) (intensité de contrainte critique) figurent ainsi parmi les théories très utiles en mécanique. En comparaison, le domaine de la mécanique des fluides a très tôt remarqué l'existence d'un lien entre petites échelles (échelle de Kolmogorov) et grandes échelles (échelle intégrale) à travers le travail de [Kolmogorov \[1991\]](#). Dans ce contexte, la géométrie fractale apporta de nombreuses réponses en fluide puis s'est portée sur l'étude des matériaux. L'effet de taille (ou size-effect) qui annoncerait le comportement d'un matériau comme non euclidien est un exemple d'application ([Griffith \[1921\]](#) la lui même mise en valeur par l'intermédiaire de ses expériences sur la fibre de verre). Un deuxième exemple provient de l'origine de l'utilisation de la géométrie fractale par [Mandelbrot \[1982\]](#) pour la caractérisation des faciès de rupture. Cette notion de géométrie non euclidienne s'est étendue à la caractérisation de divers paramètres matériaux qui était jusqu'à présent considérés comme constants et où la présence de lois de puissance apparaissent.

L'objet de l'étude est de poser une base géométrique s'appuyant sur la géométrie fractale de façon générale (avec l'entropie d'échelle) pour la caractérisation mécanique des matériaux. Un premier cas simple est la contrainte maximale admissible d'un matériau que l'on peut aussi appeler résistance mécanique. On observe un effet de taille sur la résistance mé-

canique [Carpinteri, 1994a], c'est-à-dire, une variation de cette caractéristique du matériau en fonction de la taille de celui-ci. Ce phénomène d'effet de taille pourrait être originaire d'un comportement fractal de la répartition de la force sur la section de sollicitation, où une section utile de sollicitation apparaît (la rugosité et les pores de la surface ne deviennent plus négligeables). Cette section utile pourrait ainsi être un support géométrique de type fractal comme le DLA (agrégation limitée par la diffusion) ayant une dimension fractionnaire. Une représentation claire de la différence entre une contrainte qui a comme support une surface purement euclidienne et un support fractal est présentée en figure 3.45, impliquant l'émergence de propriétés fractales.

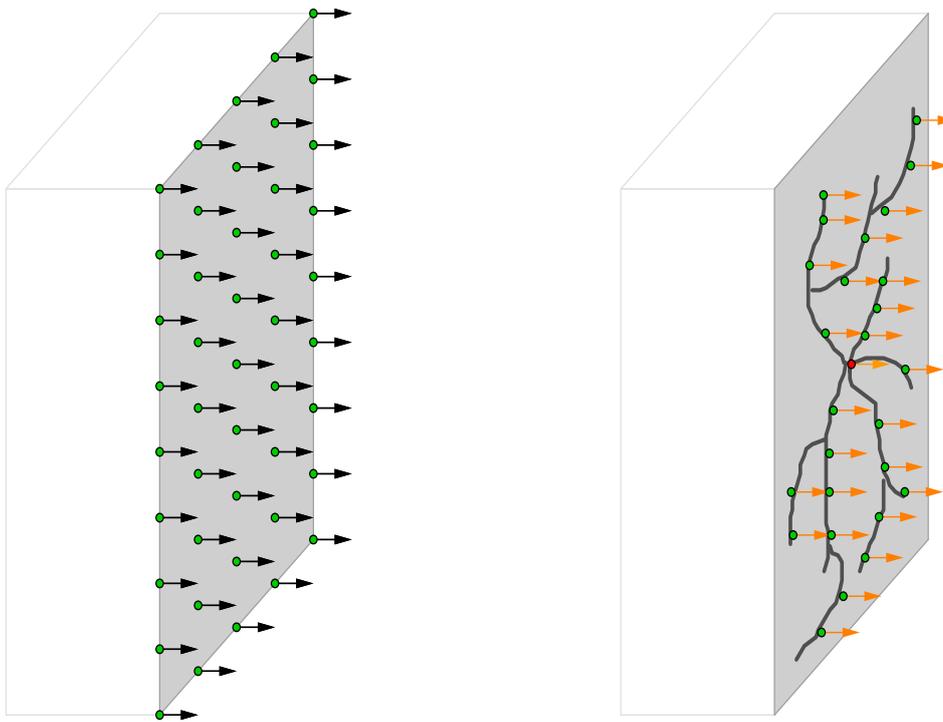


FIGURE 3.45 – Représentation des forces exercées sur la surface d'un matériau pour le cas euclidien (gauche) et le cas non euclidien (droite)

Lors de l'étude géométrique d'un phénomène ou d'un système, il est nécessaire de se donner deux échelles de coupure (cut-offs) afin de borner l'analyse. Ces deux échelles sont généralement limitées par l'expérimentateur ou par l'expérimentation elle-même (par la technologie, voir le phénomène), ce qui permet de connaître la gamme d'échelle que l'on va étudier. Cependant, il est nécessaire de rappeler que ces échelles peuvent n'avoir aucune réalité physique et mener à des résultats erronés, par exemple lorsque l'échelle de coupure maximale n'est pas assimilée à l'échelle intégrale d'un phénomène. Dans le cas d'un phénomène purement fractal à toute échelle, les échelles de coupure choisies sont sans importance, or, ce cas idéal n'existe que rarement. En effet, un comportement fractal n'est généralement vérifié que pour une certaine gamme d'échelle (lorsque celui-ci existe) et des comportements de type fractal dissipatif émergent nécessitant des échelles de coupure bien déterminées ou connues. Finalement, dans le cadre d'une composante économique, pour les géométries fractales impliquant de nombreuses gammes d'échelle, il est utile de définir des gammes d'échelle plus importantes à étudier que d'autres et ainsi fixer des échelles de coupure à imposer.

Le plus souvent en mécanique, on parle d'échelle de référence afin d'éviter le problème des échelles de coupure. Ainsi, dans Carpinteri [1994a], une échelle de référence égale à l'unité est utilisée, et une échelle  $b$  correspondant à un ratio avec l'échelle unité de référence permet de calculer une résistance mécanique invariante d'échelle. Le problème de

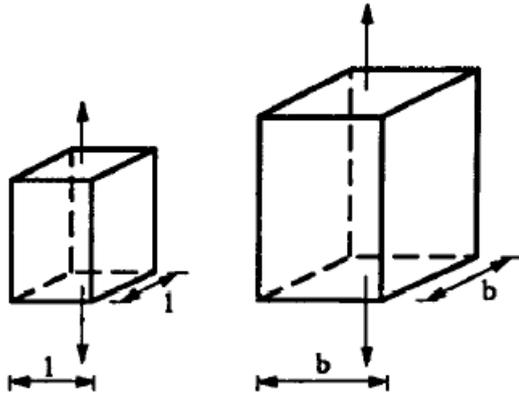


FIGURE 3.46 – Géométrie similaire où  $b$  est un ratio de similitude géométrique [Carpinteri, 1994a]

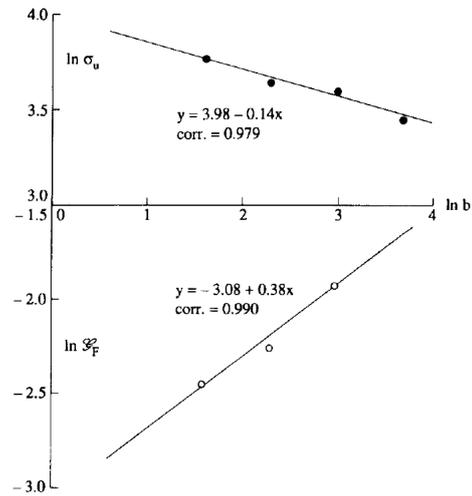


FIGURE 3.47 – Variation de la résistance mécanique (en kilogramme-force par  $cm^2$ ) et énergie de rupture (en kilogramme-force par  $cm$ ) en fonction de l'échelle  $b$  (en  $cm$ ) [Carpinteri, 1994a]

cette échelle de référence est l'absence de bornes physiques dans la description du phénomène, mais aussi et surtout, les unités de l'échelle. Bien qu'ici l'auteur travaille avec des rapports d'échelle, il est nécessaire de connaître la taille de référence permettant d'établir une gamme ou le comportement purement fractal est vérifié. Il est donc nécessaire de posséder une connaissance importante sur les échelles du phénomène pour en tirer des lois d'échelle pertinente ayant plus de poids du point de vue de la physique (voir figure 3.46, figure 3.47).

L'utilisation des géométries fractales dépendantes d'échelle et la bifurcation au fractal pur, nous amène à repenser les échelles de coupure comme des bornes physiques réelles (la turbulence est un des exemples qui renforce cette idée), où l'on distingue des régimes euclidien et fractal. Cependant, dans certains cas où la gamme d'échelle est relativement restreinte, la dépendance en échelle peut être assez faible pour que la déviation au comportement fractal pur soit perceptible ce qui peut suffire à utiliser le fractal pur localement (d'où l'attention aux échelles de coupure utilisées).

### Fractalité et résistance mécanique

Dans le cas de l'application d'une contrainte sur un matériau, la force exercée s'applique sur une section euclidienne. Dans l'hypothèse où cette section est fractale, lorsqu'on s'intéresse à diverses gammes d'échelle, la section efficace pourrait avoir une dimension non entière typiquement comme un mouvement brownien ( $\Delta = 1.5$ ) ou encore comme un DLA ( $\Delta \approx 1.7$ ). Pour pouvoir étudier, la fractalité de cette section utile, il est nécessaire d'obtenir des lois d'échelle des paramètres à étudier.

Les lois d'échelle avancées par Carpinteri [1994a], viennent de l'hypothèse de l'existence d'une résistance mécanique invariante d'échelle  $\sigma_u^*$ . Par conséquent, en postulant une surface d'application fractale, on obtient :

$$\sigma_u^* = \frac{F_1}{1^{2-d_\sigma}} = \frac{F_2}{b^{2-d_\sigma}} \quad (3.72)$$

Avec  $F_1$  et  $F_2$ , les chargements maximums sur deux corps de tailles 1 et  $b$ , et  $d_\sigma$  étant un décrétement de dimension par rapport à une surface euclidienne. On considère ensuite une

résistance mécanique apparente dépendante d'échelle telle que :

$$\sigma_u^{(1)} = \frac{F_1}{l^2} \quad \sigma_u^{(2)} = \frac{F_2}{b^2} \Rightarrow \sigma_u^{(2)} = \sigma_u^{(1)} b^{-d_\sigma} \quad (3.73)$$

En utilisant les équations précédentes, on obtient :

$$\ln \sigma_u = \ln \sigma_u(1) - d_\sigma \ln b \quad (3.74)$$

La résistance mécanique indépendante d'échelle obtenue possède les dimensions physiques d'une force par unité de longueur fractionnaire ce qui est peut-être gênant. Pour éviter cet aléa, l'entropie d'échelle permet un cadre plus rigoureux. On va ainsi étudier ce que l'on appelle la zone active du phénomène, ici considérée comme la surface potentiellement fractale d'application de la force. Il est donc nécessaire d'effectuer une analyse en échelle (pavage) de celle-ci. Pour chaque échelle  $i$ , le nombre de boules à l'échelle  $l_i$  varie comme une loi de puissance caractéristique des géométries fractales :

$$N(l_i) \sim l_i^{-\Delta_f} \quad l_c \leq l_i \leq l_0 \quad (3.75)$$

Avec  $\Delta_f$  la dimension fractale,  $l_c$  et  $l_0$ , les échelles de coupure.

$$\frac{N(l_i)}{N(l_0)} = \left( \frac{l_i}{l_0} \right)^{-\Delta_f} \quad (3.76)$$

La section utile devient en conséquence :

$$S(l_i) = N(l_i) l_i^2 = \left( \frac{l_i}{l_0} \right)^{-\Delta_f} l_i^2 = l_0^{\Delta_f} l_i^{2-\Delta_f} \quad (3.77)$$

La contrainte s'appliquant sur la surface devient donc :

$$\sigma(l_i) = \frac{F(l_i)}{S(l_i)} = \frac{F(l_i)}{l_0^{\Delta_f} l_i^{2-\Delta_f}} \quad \sigma(l_{i+1}) = \frac{F(l_{i+1})}{l_0^{\Delta_f} l_{i+1}^{2-\Delta_f}} \quad (3.78)$$

On voit de fait que poser une contrainte indépendante d'échelle  $\sigma(l_i) = \sigma(l_{i+1})$  implique nécessairement une force appliquée dépendante d'échelle (on adimensionne par  $l_0$  pour obtenir des dimensions physiques entières, et l'on utilise le décrement de dimension  $d_\sigma = 2 - \Delta_f$ ) :

$$\sigma^* = F(l_0) = \frac{F(l_i)}{\left( \frac{l_i}{l_0} \right)^{-d_\sigma}} = \frac{F(l_{i+1})}{\left( \frac{l_{i+1}}{l_0} \right)^{-d_\sigma}} \quad (3.79)$$

L'équation obtenue ne donne donc pas une contrainte qui évolue en fonction de l'échelle (puisque l'hypothèse précisément utilise l'indépendance en échelle) mais une force dépendante d'échelle. Par symétrie, au vu de l'équation précédente obtenue, pour pouvoir considérer une contrainte dépendante d'échelle, il est nécessaire de faire l'hypothèse d'une force indépendante de l'échelle.

### Conservation de la force à travers les échelles

La contrainte varie en fonction de l'échelle car la surface d'application de la force varie en fonction de l'échelle mais pas la force elle-même ( $F_i = F_{i+1}$ ). Ceci mène à la conservation de la force à travers les échelles, et se traduit par :

$$\sigma(l_i) l_i^{2-\Delta_f} = \sigma(l_{i+1}) l_{i+1}^{2-\Delta_f} \Rightarrow \sigma(l_i) = \sigma(l_{i+1}) \left( \frac{l_{i+1}}{l_i} \right)^{2-\Delta_f} \quad (3.80)$$

$$\ln \sigma(l_i) = \ln \sigma(l_{i+1}) + (2 - \Delta_f) \ln \left( \frac{l_{i+1}}{l_i} \right) \Rightarrow \ln \sigma(l_i) = \ln \sigma(l_{i+1}) - (d_\sigma) \ln \left( \frac{l_i}{l_{i+1}} \right) \quad (3.81)$$

L'expression obtenue est identique à celle de [Carpinteri \[1994a\]](#) en effet, la variation d'échelle dans notre équation est portée par  $l_i$  et montre que la résistance mécanique diminue avec l'échelle, en considérant une dimension fractale  $\Delta_f(l_i) = \Delta_f$ . L'utilisation de ce que l'on appelle l'entropie d'échelle permet une liberté des comportements géométriques et l'utilisation des échelles de coupure du phénomène, on l'utilise donc pour l'étude de la résistance mécanique. L'entropie d'échelle est par définition associée à un rapport logarithmique d'une quantité géométrique mesurée à deux échelles différentes, ainsi lorsqu'on applique l'entropie d'échelle à la résistance mécanique, on l'applique en réalité au support géométrique de la force associée à celle-ci :

$$R(l_i) = \ln \left( \frac{\sigma(l_i)}{\sigma(l_0)} \right) = (\Delta_f - 2) \ln \left( \frac{l_i}{l_0} \right) \Rightarrow \ln \left( \frac{S(l_0)}{S(l_i)} \right) = (\Delta_f - 2) \ln \left( \frac{l_i}{l_0} \right) \quad (3.82)$$

Avec  $S(l_i)$  la surface active à l'échelle  $l_i$ , c'est-à-dire la surface qui est contrainte par la force exercée à l'échelle intégrale se transmettant à l'échelle  $l_i$ .  $R(l_i)$  est l'entropie d'échelle, on pourra aussi utiliser le terme "entopie" (du grec "dans le milieu" [[Queiros-Condé et al., 2015b](#)]) qui traduit bien le rapport entre la zone étudiée et la zone active d'un phénomène, ici, le rapport entre la surface étudiée à l'échelle  $l_i$  et la surface contrainte à  $l_0$ .

Les résultats expérimentaux tirés de [Carpinteri \[1994a\]](#) sont présentés en figure [3.48](#). On confirme dans ce cas que le comportement fractal parabolique avec une dimension euclidienne à l'échelle intégrale ne paraît pas adapté dans cette gamme d'échelle (invariant  $\beta = 0.166$ ). Ainsi, à l'échelle intégrale la dimension de la zone active n'est pas 2. Cependant, le fractal pur semble concluant avec une dimension fractale  $\Delta_f = 1.8435$ , légèrement inférieure à sa dimension topologique  $d=2$ . D'autre part, le fractal parabolique sans contrainte paraît tout aussi adapté, mais requiert une dimension à l'échelle crête plus élevée qu'à grande échelle. Finalement, on peut s'interroger sur les échelles de coupure utilisées ou, pour une gamme d'échelle plus vaste, un comportement fractal dépendant d'échelle pourrait apparaître.

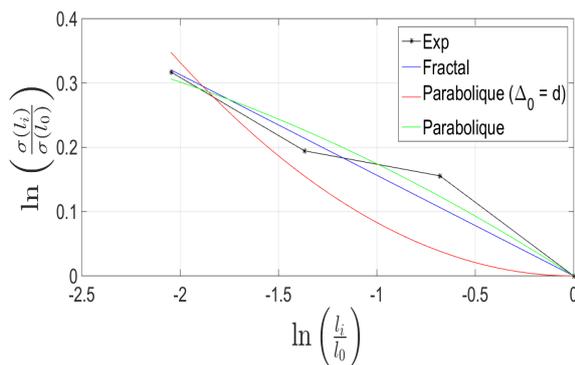


FIGURE 3.48 – Résultats expérimentaux de béton sollicités ayant quatre tailles différentes. Le fractal apparaît comme le cas le plus simple de dimension  $\Delta_f = 1.8435$ , les cas paraboliques montrent aussi des comportements plausibles avec  $\Delta_c = 1.6604$ ,  $\Delta_0 = d = 2$  et  $\beta = 0.166$  pour le parabolique euclidien (car on fait l'hypothèse d'une dimension euclidienne à l'échelle intégrale) et  $\Delta_c = 1.8985$ ,  $\Delta_0 = 1.8022$  et  $\beta = -0.0471$  dans le cas parabolique sans contrainte.

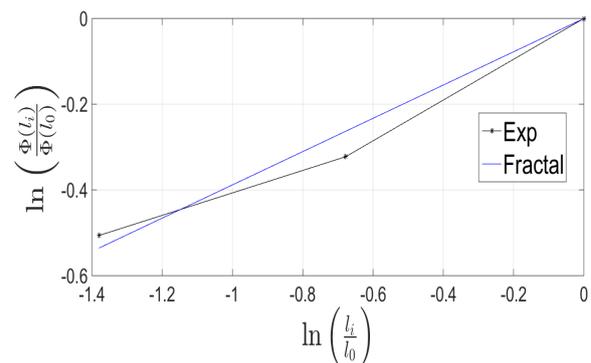


FIGURE 3.49 – On considèrera ici uniquement des comportements fractals pour la contrainte et la déformation vu le faible nombre de points expérimentaux. Ces considérations permettent ainsi d'évaluer une dimension de déformation de  $\Delta'_f = 0.4554$ .

### L'énergie de déformation

De manière analogue à la résistance mécanique, l'énergie de rupture est considérée fractale avec cette fois-ci non plus un décrétement, mais un incrément de dimension :

$$\ln E_u = \ln E_u(1) + d_E \ln b \quad (3.83)$$

L'énergie requise pour déformer un matériau peut se mettre sous une forme analogue à celle obtenue pour la résistance mécanique (en considérant la conservation de la force à travers les échelles) :

$$E(l_i) = \frac{1}{2} F(l_i) DL(l_i) = \frac{1}{2} F(l_i) N(l_i) l_i \Rightarrow \ln E(l_i) = \ln E(l_{i+1}) + (1 - \Delta'_f) \ln \left( \frac{l_i}{l_{i+1}} \right) \quad (3.84)$$

Il est bien sûr nécessaire de différencier les dimensions fractales des deux cas précédents, elles ne sont pas identiques,  $\Delta_f \neq \Delta'_f$  car le support géométrique contraignant la surface n'est pas nécessairement le même que le support géométrique de déformation du matériau. L'entropie d'échelle calculée sur la base de l'énergie de déformation s'écrit alors :

$$G(l_i) = \ln \left( \frac{E(l_0)}{E(l_i)} \right) = \ln \left( \frac{DL(l_0)}{DL(l_i)} \right) = (\Delta'_f - 1) \ln \left( \frac{l_i}{l_0} \right) \quad (3.85)$$

Dans le cas de **Carpinteri [1994a]**, c'est l'énergie de rupture rapportée à la section utile du matériau qui intéresse. En utilisant la force conservée à travers les échelles, on peut dans notre cas lier contrainte et énergie pour obtenir une énergie surfacique :

$$\sigma_i S_i = \frac{E_i}{L_i} \Rightarrow \sigma_i L_i = \frac{E_i}{S_i} \Rightarrow \sigma_i N(l_i)' l_i = \frac{E_i}{N(l_i) l_i^2} = \Phi_i \quad \sigma_{i+1} N(l_{i+1})' l_{i+1} = \Phi_{i+1} \quad (3.86)$$

Les différents nombres de boules proviennent simplement d'un support géométrique différent et donc d'une dimension différente. Pour simplifier les calculs, on considère que les échelles intégrales des deux phénomènes sont égales, ce qui reste admissible pour des fractals purs. Dans le cas où elles seraient différentes, il est obligatoire de séparer les différents phénomènes. Les lois d'échelle établies précédemment nous permettent d'obtenir en considérant les deux supports purement fractals pour simplifier<sup>6</sup> :

$$\frac{\Phi_i}{\Phi_{i+1}} = \left( \frac{l_i}{l_{i+1}} \right)^{(\Delta_f - 2) + (1 - \Delta'_f)} \Rightarrow \ln \left( \frac{\Phi_i}{\Phi_0} \right) = (\Delta_f - 1 - \Delta'_f) \ln \left( \frac{l_i}{l_0} \right) \quad (3.88)$$

En conservant la dimension fractale précédente pour la contrainte de  $\Delta_f = 1.8435$  on obtient  $\Delta'_f = 0.4554$  pour l'énergie de déformation à la rupture (voir figure **3.49**).

Maintenant, si l'on considère que l'énergie dissipée dans le volume du matériau provient uniquement de l'énergie de déformation mécanique (et en considérant des échelles intégrales identiques pour simplifier), un lien entre supports géométriques existe. L'énergie dissipée par unité de masse s'écrit simplement (à masse volumique constante à travers les échelles) :

$$\frac{Ed(l_i)}{\rho V_i} = \frac{Ed(l_{i+1})}{\rho V_{i+1}} \Rightarrow \frac{Ed(l_0)}{Ed(l_i)} = \left( \frac{l_i}{l_0} \right)^{\Delta_d - 3} \quad \left( \frac{l_i}{l_0} \right)^{\Delta_d - 3 - \Delta'_f + 1} = 1 \Rightarrow \Delta_d - \Delta'_f = 2 \quad (3.89)$$

**6.** Si l'on considère des comportements se basant sur des fractals de types paraboliques, (conservant l'hypothèse d'échelles intégrales identiques) on obtiendrait :

$$\ln \left( \frac{\Phi_i}{\Phi_0} \right) = (\Delta_0 - 1 - \Delta'_0) x + \frac{(\beta_R - \beta_G)}{2} x^2 \quad (3.87)$$

Avec  $\Delta_0$  et  $\beta_R$  (resp.  $\Delta'_0$  et  $\beta_G$ ), la dimension à l'échelle intégrale et l'invariant parabolique de la contrainte (resp. déformation). Si le fractal parabolique ne suffit plus, on pourra utiliser un fractal dissipatif de type modal ou global.

**Note sur les groupes de renormalisations de Carpinteri [1994b]**

Les lois d'échelle déduites précédemment partent d'une clarification faite par l'entropie d'échelle qui était nécessaire. Une alternative a été utilisée par Carpinteri [1994b] à travers l'exploitation de ce que l'on appelle les groupes de renormalisations. Pour ce faire, une force, et une énergie de déformation à la rupture sont postulées comme constantes à travers les échelles (les indices 1 représentant les grandes échelles et  $\infty$  les plus petites).

$$F = \sigma_1 A_1 = \sigma_2 A_2 = \sigma_{n-1} A_{n-1} = \sigma_\infty A_\infty \quad W = \phi_1 A_1 = \phi_2 A_2 = \phi_{n-1} A_{n-1} = \phi_\infty A_\infty \quad (3.90)$$

Cependant, dans le cadre de la conservation de la force à travers les échelles, si l'on considère une énergie de déformation à la rupture indépendante de l'échelle, celle-ci implique irrémédiablement une déformation euclidienne :

$$\frac{E(l_i)}{E(l_0)} = \frac{F(l_i)}{F(l_0)} \frac{DL(l_i)}{DL(l_0)} \Rightarrow DL(l_i) = DL(l_0) \quad (3.91)$$

Et implique une énergie rapportée à la surface, uniquement dépendante de la dimension liée à la contrainte.

**3.4.2 Multifractal Scaling Law et dépendance en échelle****Lien entre Multifractal Scaling Law et entropie d'échelle**

Les phénomènes mécaniques étant complexes favorisant comportement chaotique et apparition de loi de puissance, leur littérature abonde permettant de les étudier de façon plus ou moins approfondie et générale. Il apparait ainsi lorsque plus de gammes d'échelle sont prises en compte, que le comportement fractal pur ne suffit plus et que la dépendance en échelle soit nécessaire pour caractériser le matériau. Pour répondre à cette dépendance en échelle, la Size effect law et la Multi Fractal Scaling Law (qui n'a de multifractal que son nom, aucun spectre de singularité n'intervient [Bažant et Yavari, 2005, 2007]) ont été mises en avant pour la caractérisation des matériaux [Bažant, 1995, Carpinteri et al., 2007]. La première est basée sur des critères énergétiques de fissuration [Bažant, 1984, 1993, 1999], la deuxième se base quant à elle uniquement sur la géométrie [Carpinteri et Chiaia, 1995, 1997, Carpinteri et al., 1995]. Nous allons dans notre cas nous orienter sur la deuxième afin de la comparer à l'utilisation de l'entropie d'échelle.

La MFSL est une loi d'échelle inspirée de la relativité d'échelle de Nottale [2010] qui fait intervenir un changement de régime de la dimension en fonction de l'échelle. La contrainte est donnée par une équation de la forme :

$$\sigma = a_c + \frac{b_c}{t_c}^{1/2} \quad (3.92)$$

$\sigma$  : Résistance mécanique

$t_c$  : Taille caractéristique

$a_c, b_c$  : Constantes

Ce postulat est dans la majorité des cas plus fidèle à l'expérience qu'une loi fractale simple paraissant être une confirmation que la rupture d'un matériau est soumise à la relativité d'échelle. La MFSL donne ainsi contrainte et énergie de rupture :

$$\sigma(b) = f_t \left[ 1 + \frac{l_{ch}}{b} \right]^{1/2} \quad \phi(b) = \phi_f \left[ 1 + \frac{l_{ch}}{b} \right]^{1/2} \quad (3.93)$$

Dans le cadre des géométries dépendantes d'échelle, les fractals dissipatifs utilisant l'entropie d'échelle permettent des transitions de dimensions à travers les échelles. On va donc

comparer dans un premier temps la loi précédente postulée par la MFSL pour la contrainte, à l'entropie d'échelle (rapport logarithmique de la contrainte en fonction des échelles  $l_i$  et  $l_0$ ) :

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_0} = \left[ \frac{l_i + l_{ch}}{l_0 + l_{ch}} \right]^{1/2} \Rightarrow \ln\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0}\right) = \frac{1}{2} \left( \ln\left(\frac{l_i + l_{ch}}{l_0 + l_{ch}}\right) + \ln\left(\frac{l_0}{l_i}\right) \right) \quad (3.94)$$

$l_{ch}$  étant un paramètre de la MFSL, échelle caractéristique où à lieu la bifurcation du régime fractal au régime euclidien. Cette échelle est toujours inférieure à  $l_0$ , de telle sorte que l'on puisse considérer  $l_0 \gg l_{ch}$  et ainsi écrire :

$$\ln\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0}\right) = \frac{1}{2} \left( \ln\left(\frac{l + l_{ch}}{l_0}\right) + \ln\left(\frac{l_0}{l}\right) \right) \quad (3.95)$$

On peut ainsi distinguer trois régimes en fonction de l'échelle étudiée (en considérant dans un deuxième temps  $l_0 = \kappa^* l_{ch}$ ) :

—  $l_i \gg l_{ch}$  :

$$\ln\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0}\right) = 0 \quad \ln\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\kappa^*}{\kappa^* + 1} \left[ 1 + \frac{l_{ch}}{l_i} \right] \right) \rightarrow 0 \quad (3.96)$$

—  $l_i \approx l_{ch}$  :

$$\ln\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0}\right) = \frac{1}{2} \ln(l_{ch}) \quad \ln\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2\kappa^*}{\kappa^* + 1}\right) \quad (3.97)$$

—  $l_i \ll l_{ch}$  :

$$\ln\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{l_{ch}}{l_i}\right) \quad \ln\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\kappa^* l_{ch}}{(\kappa^* + 1) l_i}\right) \quad (3.98)$$

Ainsi, l'échelle  $l_{ch}$  agit comme une échelle perturbatrice (perturbant la symétrie), au-dessus de laquelle la contrainte devient constante euclidienne et en dessous de laquelle la contrainte devient fractale. Cette loi d'échelle en la comparant à l'entropie d'échelle, force une codimension  $\Delta - d = -1/2$ , cependant la différence majeure réside dans le fait qu'il apparait une constante non nulle.

### Entropie d'échelle et biais expérimentaux

Pour simplifier l'écriture, on pourra écrire dans les développements postérieurs :

$$\Delta_{[0,0]} = \Delta_0 \quad \Delta_{[i,0]} = \Delta_i \quad \Delta_{[c,0]} = \Delta_c \quad (3.99)$$

Le cas le plus simple auquel nous puissions comparer la MFSL est un fractal parabolique. Dans ce cas, on a une équipartition de la production d'entropie d'échelle s'exprimant par un nombre de boules égal à :

$$N_{[i,0]} = \left(\frac{l_i}{l_0}\right)^{-\left(\frac{\Delta_0 + \Delta_i}{2}\right)} = N(l_i) \quad (3.100)$$

Ce qui permet de décrire l'évolution de la contrainte :

$$\sigma(l_i) = \sigma(l_0) \left(\frac{l_0}{l_i}\right)^{2 - \left(\frac{\Delta_0 + \Delta_i}{2}\right)} \quad \beta = \frac{\Delta_c - \Delta_0}{\ln\left(\frac{l_c}{l_0}\right)} \quad (3.101)$$

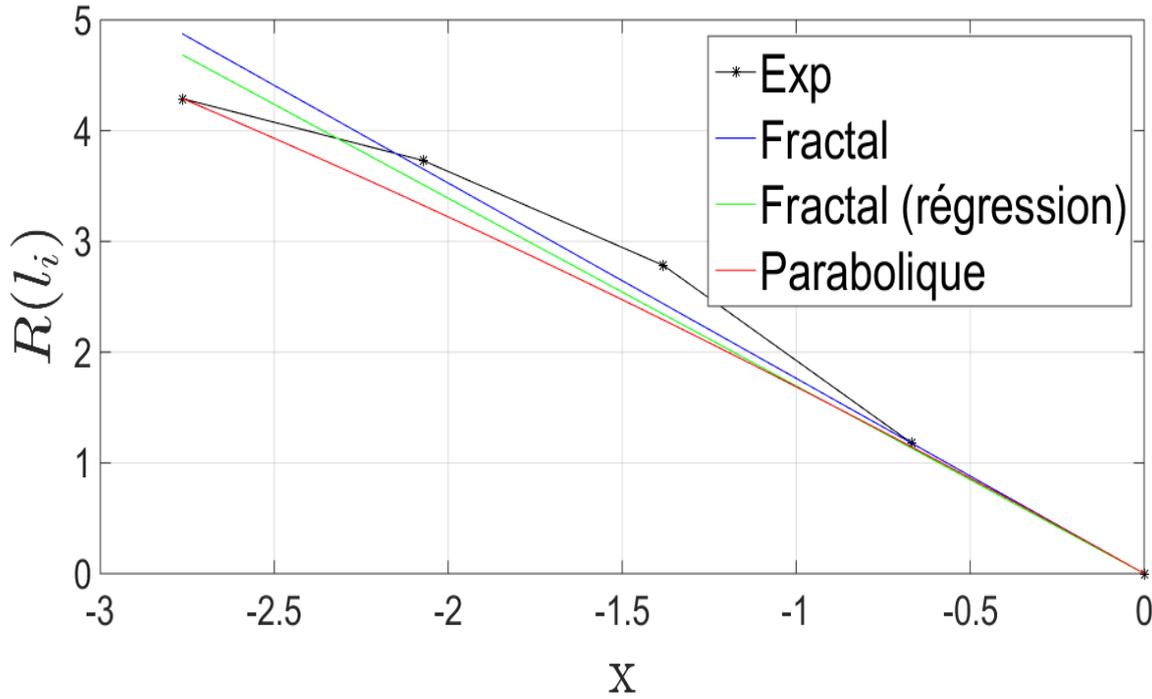


FIGURE 3.50 – Résultats expérimentaux dont le comportement présente une loi d'échelle

Les expériences menées dans [Carpinteri et al. \[1995\]](#) montrent une dispersion des résultats de traction (ou d'énergie de rupture) pour les mêmes conditions d'essais. De plus, les propriétés géométriques et la section sur laquelle s'applique la force est inhomogène dans l'espace ce qui peut amener à des résultats de dimension peu fiables.

Néanmoins, pour les expériences suivantes il est possible de déterminer des dimensions fractales plausibles. Les résultats obtenus pour des contraintes appliquées sur un cylindre de béton en compression sont présentés en figure 3.50. Dans un premier temps, une régression linéaire correspondant au fractal simple est utilisée donnant une dimension  $\Delta_f^{fit} = 0.305$ . On peut d'autre part se baser sur les valeurs de dimensions mesurées à grande échelle (à partir de  $dS/dX = \Delta_i - d$ ), donnant ainsi à partir des grandes échelles une dimension pour un comportement fractal pur  $\Delta_f = 0.237$ . Pour le comportement parabolique, il est nécessaire d'estimer les dimensions aux échelles de coupure afin de déterminer laquelle est la plus fiable. On trouve ainsi  $\Delta_0 = 0.237$  et  $\Delta_c = 1.192$  ce qui nous permet d'utiliser en supposant un fractal parabolique :

$$R(l_i) = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta_c - \Delta_0}{x_c} \right) x^2 + (\Delta_0 - d) x \quad (3.102)$$

$R$  étant l'entropie d'échelle,  $x$  l'échelle logarithmique et  $d$  la dimension topologique de 2. Cependant, on obtient un invariant  $\beta_{exp} = -0.346$  assez loin des points expérimentaux. Pour contraindre, le comportement parabolique, on utilise le lien entre dimension et échelles :

$$\Delta_c = 2 * (R(l_c)/x_c) + d - (\Delta_0/2) \quad \Delta_0 = 2 * (R(l_c)/x_c) + d - (\Delta_c/2) \quad (3.103)$$

Ainsi, dans le cas de la mesure à l'échelle intégrale, il en découle :  $\Delta_c = 0.659$  (le support fractal augmente à travers les échelles) qui est proche de l'expérience et implique un  $\beta = -0.15304$  (pour la mesure à l'échelle crête, une dimension fractale négative est obtenue ( $\Delta_0 = -0.296$ ) ce qui est impossible).

Ces résultats restent approximatifs du fait de la dispersion expérimentale, mais des dimensions fractales émergent pour le cas fractal pur et le cas fractal parabolique (très proches).

L'explication de cette dimension fractale à l'échelle intégrale (et l'augmentation de dimension à l'échelle crête) est que la force s'applique sur une partie réduite du cylindre, constante, quel que soit le diamètre du cylindre. On peut de façon analogue, continuer par la vérification de comportement fractal parabolique dans des cas de fléchissements à partir des résultats de **Carpinteri et Chiaia [1997]**. Les dimensions fractales obtenues par régression donnent  $\Delta_f^{fit} = 1.5349$  dans le premier cas (figure 3.51) et  $\Delta_f^{fit} = 1.6887$  dans le deuxième (figure 3.52). Les résultats semblent de meilleures qualités d'autant plus qu'ils semblent plus en phase avec l'idée d'un comportement parabolique. En effet, on constate dans les deux cas que les pentes locales aux échelles de coupure respectent l'équation contraignant les dimensions (équation 3.103). On obtient ainsi pour le premier cas, un invariant parabolique  $\beta = -0.1429$  donnant  $\Delta_0 = 1.4578$  et  $\Delta_c = 1.6518$  et pour le deuxième cas,  $\beta = -0.2146$  avec  $\Delta_0 = 1.5701$  et  $\Delta_c = 1.8667$ .

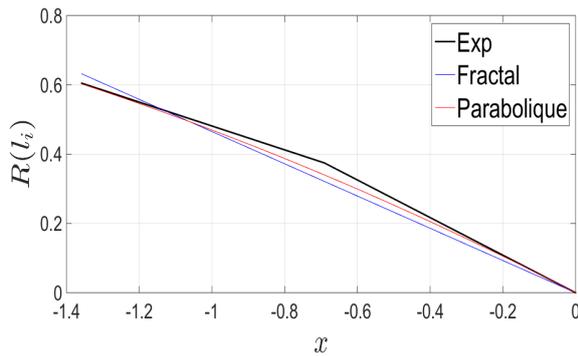


FIGURE 3.51 – Première série de tests de flexion tirés de **Carpinteri et Chiaia [1997]**, **Perdikaris et Romeo [1992]** montrant un comportement parabolique

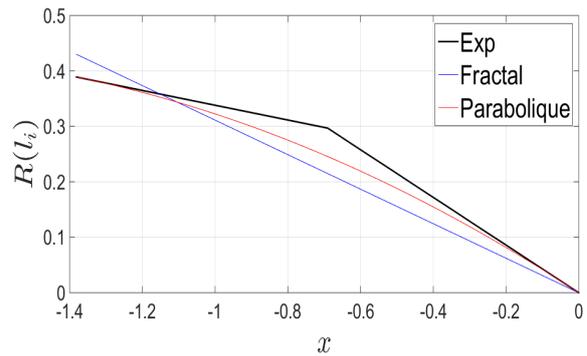


FIGURE 3.52 – Seconde série de tests de flexion tirés de **Carpinteri et Chiaia [1997]**, **Perdikaris et Romeo [1992]** montrant un comportement parabolique

À partir de ces résultats, on peut obtenir des résultats pour les énergies surfaciques de fléchissements (figure 3.53 et figure 3.54) dans les cas parabolique et fractal pur (sans comportement intermédiaire, c'est-à-dire, qu'un comportement fractal de la contrainte implique nécessairement un comportement fractal pour l'énergie de rupture surfacique et idem pour le comportement parabolique). Dans le premier cas, on obtient  $\Delta_{cG} = 0.1616$  et  $\Delta_{0G} = 0.5139$  pour la dimension associée à l'énergie, avec un invariant  $\beta_R = -0.2517$  ( $\Delta_f^{fit} = 0.3075$  pour le comportement fractal) et dans le deuxième cas, on a  $\Delta_{cG} = 0.0505$  et  $\Delta_{0G} = 0.741$  avec un  $\beta_R = -0.4968$  ( $\Delta_f^{fit} = 0.2272$  pour le comportement fractal).

Ces résultats sont basés sur l'équation 3.87 et sur l'échelle crête du phénomène (hypothèse) de telle sorte que :

$$\Delta_{cG} = 2 \left[ \frac{(\Delta_{0R} - 1)x_c + \frac{\beta_R}{2}x_c^2 - \Phi_c}{x_c} \right] - \Delta_{0G} \quad \beta_G = \frac{\Delta_{cG} - \Delta_{0G}}{x_c} \quad (3.104)$$

Les indices G étant liés à l'énergie de rupture, les indices R à la résistance mécanique, et  $\Phi_c$  étant l'entropie d'échelle pour l'énergie surfacique en  $x_c$ .

Les résultats précédents montrent dans une moindre mesure que les caractéristiques mécaniques d'un matériau sont dépendantes d'échelle. Dans un premier temps, la géométrie fractale semble suffisante mais sur des gammes d'échelle élargies, un fractal parabolique semble plus adapté.

L'étude des phénomènes dans l'espace des échelles semble ainsi légitime. On observe d'ailleurs des comportements dépendants d'échelle plus marqués que les précédents (semblant même inévitables) dans l'analyse de faciès de rupture et de surface fracturées.

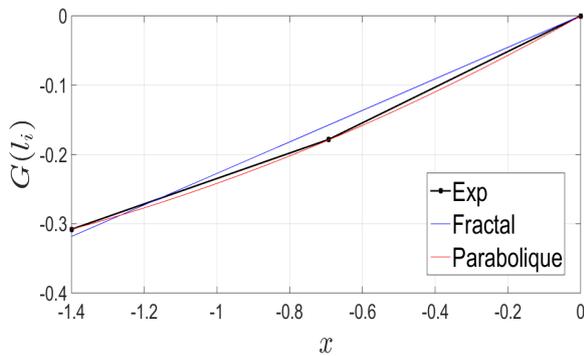


FIGURE 3.53 – Première série de tests de flexion tirés de [Carpinteri et Chiaia \[1997\]](#), [Perdikaris et Romeo \[1992\]](#) montrant un comportement parabolique pour l'énergie surfacique de rupture

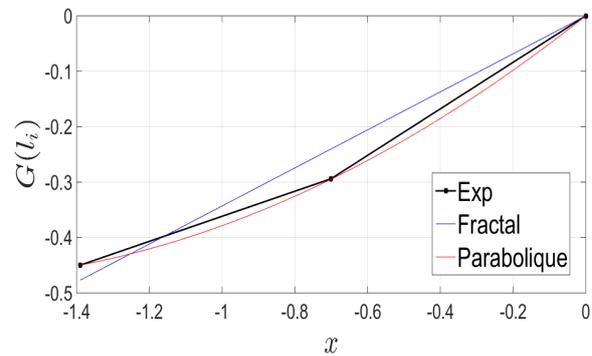


FIGURE 3.54 – Deuxième série de tests de flexion tirés de [Carpinteri et Chiaia \[1997\]](#), [Perdikaris et Romeo \[1992\]](#) montrant un comportement parabolique pour l'énergie surfacique de rupture

### 3.4.3 Analyse de faciès de rupture

Dans un contexte d'étude de la rupture, [Mandelbrot et al. \[1984\]](#), développa des méthodes permettant de trouver la dimension fractale d'un faciès de rupture, mais certaines méthodes de détermination n'ont pas la capacité de produire des estimations fiables [[Bigelle et Iost, 2004](#), [Charkaluk et al., 1998](#), [Cox et Wang, 1993](#), [Imre, 1992](#), [Mazurek et Oszutowska-Mazurek, 2014](#), [Meisel, 1991](#), [Secrieru, 2009](#)]. Pour palier à ces problématiques, l'auto-affinité et la multifractalité ont été utilisées [[Bouchaud et al., 1990](#), [Mandelbrot, 2006](#), [Stach et Cybo, 2003](#), [Stach et al., 2001](#), [Xie et Wang, 1999](#), [Xie et al., 1998](#), [Yavari et al., 2002](#)], cependant, l'utilisation de l'équation de diffusion de l'entropie d'échelle paraît suffisante.

#### La limite du fractal dans la longueur de rupture

L'entropie d'échelle prend en compte la déviation au comportement linéaire, mais ce comportement (bien que récurrent) est à l'origine d'une gêne de certains chercheurs :

"In each case, a line, roughly straight is obtained. On closer inspection it is found that there is in fact a systematic departure from linearity, and the points can be seen to on an arc of a circle... One can also fit data to parabolic forms... The curvature is continuous and hence cannot be dismissed as **"noise"**." ... " The relation between  $\log(\text{length})$  and  $\log(\text{scale})$  is not linear as it would be expected if the section profile examined were self similar with regard to scale..."

"Measurements using a range of scales which exceed both of these limits should give a curve which is **sigmoidal**. That is to say one for which  $(d \ln L / d \ln E) + 0$  at both extremes in  $\log(\text{scale})$ . An examination of the present data (Figs 2 and 3) shows that the range of scales employed has not exceeded the upper limit. It would seem however that this is not so at lower limit and it is tempting to adduce the observed deviation from linearity at small scale to this cause. It should be noted that a systematic departure from linearity has been noted previously by Coster and Chermant, and by Underwood and Banerji. Mandelbrot et al. has dismissed these departures from linearity as **"noise"** and of no consequence. We disagree with this interpretation since our own results show these systematic deviations in a majority of fractured specimens. As stated above there is a underlying cause, which needs careful consideration and which challenges the naive notion of self-similarity in fractured surfaces. The fact is, that a single parameter  $D$ , is insufficient to characterize the curves shown in Figs 2 and 3."

Dans ces deux passages de [Pande et al. \[1987\]](#), la notion de fractal dépendant d'échelle est introduite. D'une part, par une déviation au fractal pur observé qui semblait être considéré

comme bruit aux yeux de Mandelbrot. Et d'autre part, par la notion de sigmoïde où il existerait deux échelles de coupure euclidiennes. C'est précisément dans ce but que l'équation de diffusion d'entropie d'échelle existe et justifie l'existence de lois d'échelle non plus nécessairement fractales strictes, mais dépendantes d'échelle. Nous utiliserons par conséquent, un fractal parabolique pour étudier la longueur d'un faciès de rupture impliquant une variation de la dimension fractale, de fractionnaire à grande échelle à euclidienne à petite échelle (exemple de représentation en figure 3.55).

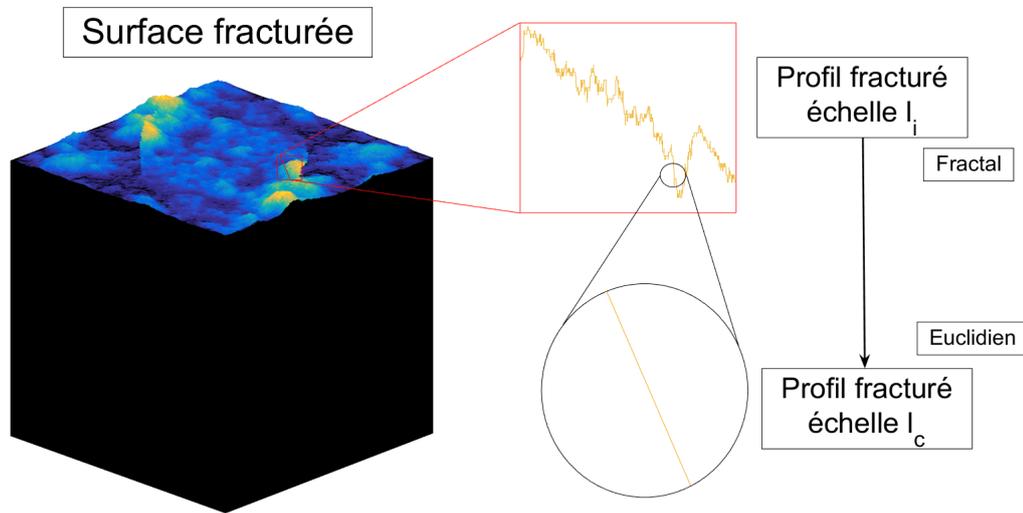


FIGURE 3.55 – Représentation de la déviation au fractal pur d'une surface fracturée

Dans le cadre de l'équation de diffusion d'entropie d'échelle, on introduit une entropie d'échelle ( $s$ ) associée à la rugosité linéaire de la surface fracturée et un comportement parabolique à travers les échelles :

$$s = \ln\left(\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_i}\right) \quad s = \frac{\beta}{2}x^2 + (\Delta_0 - 1)x \quad (3.105)$$

Ce qui donne une évolution linéaire de la dimension :

$$\frac{ds}{dx} = \Delta_i - 1 = \beta x + (\Delta_0 - 1) \quad (3.106)$$

Pour obtenir  $\beta$ , une régression sur l'analyse en échelle peut être utilisée mais ceci peut mener à des résultats impossibles du point de vue de la dimension. De fait, il est souvent nécessaire d'utiliser des hypothèses ou contraintes physiques afin de pouvoir déterminer correctement les propriétés physiques étudiées. Notre hypothèse s'oriente, dans le cadre de l'étude de la longueur de fissure, sur une rugosité apparaissant à grande échelle  $\Delta_0 > d$  et s'atténuant à mesure que l'on s'approche des petites échelles  $\Delta_c = d = 1$  à  $l_c$ . Cette hypothèse permet de simplifier fortement l'estimation de l'invariant  $\beta$ .

Les méthodes expérimentales pour estimer la dimension fractale comme la méthode aire-périmètre peuvent être biaisées, on utilise donc les résultats de [Pande et al. \[1987\]](#) utilisant la méthode de section verticale permettant d'estimer une mesure de la longueur d'un profil de rupture. Les spécimens étudiés sont des alliages de titane avec différentes concentrations de zirconium :  $Zr = 0\%$ ,  $Zr = 2\%$  and  $Zr = 5\%$ .

À partir de l'hypothèse de rupture lisse à petite échelle (dimension euclidienne), on peut estimer la dimension à l'échelle intégrale et l'invariant d'échelle  $\beta$  :

$$\Delta_0 = 2\left(\frac{s_c}{x_c} + 1 - \frac{\Delta_c}{2}\right) \quad \beta = \frac{\Delta_c - \Delta_0}{x_c} \quad (3.107)$$

Les résultats semblent être de bonne qualité pour  $Zr = 0\%$  et  $Zr = 2\%$  mais pour  $Zr = 5\%$ , l'hypothèse doit être affinée. En effet, il semble que la gamme d'échelle de mesure soit petite et que l'hypothèse d'une rupture lisse à petite échelle soit trop contraignante. L'échelle crête  $l_c$  dans le cas de  $Zr = 5\%$  semble imposée par l'expérimentateur et non liée au phénomène alors que pour les deux autres cas cette échelle apparaît naturellement avec une saturation de l'entropie d'échelle. Deux possibilités apparaissent : la première consiste à estimer la dimension locale à l'échelle crête  $l_c$  basée sur l'expérience (correspondant à une régression linéaire sur quelques points autour de l'échelle  $l_c$ ) :

$$\Delta_c^{exp} = 1.0432 \Rightarrow \beta_{exp} = \frac{\Delta_c^{exp} - \Delta_0}{x_c^{exp}} \quad (3.108)$$

L'autre possibilité est de considérer la fracture des spécimens comme un phénomène fractal parabolique où l'invariant  $\beta$  serait conservé (en effet, les deux premiers  $\beta$  sont très proches). Par conséquent, on peut émettre l'hypothèse suivante :

$$\beta_{th} = \frac{\beta^{Zr=0\%} + \beta^{Zr=2\%}}{2} \quad (3.109)$$

Ce qui donne :

$$\Delta_c^{th} = \frac{\beta_{th} x_c}{2} + \frac{s_c}{x_c} + 1 \quad \Delta_0^{th} = \Delta_c^{th} - \beta_{th} x_c \quad (3.110)$$

Les résultats sont présentés sur la figure 3.56 où le comportement parabolique semble satisfaisant. Le dernier cas ( $Zr = 5\%$ ) nécessite une étude plus approfondie du phénomène où nous traduisons le comportement comme une échelle trop petite, ou une invariance d'échelle liée au phénomène de fracture. Il est pratique d'ajouter que les deux visions peuvent être superposées puisqu'elles produisent des résultats similaires ( $\Delta_c^{exp} = 1.0432$ ,  $\Delta_0^{exp} = 1.1773$  pour la première méthode et  $\Delta_c^{th} = 1.0491$ ,  $\Delta_0^{th} = 1.1714$  pour la deuxième).

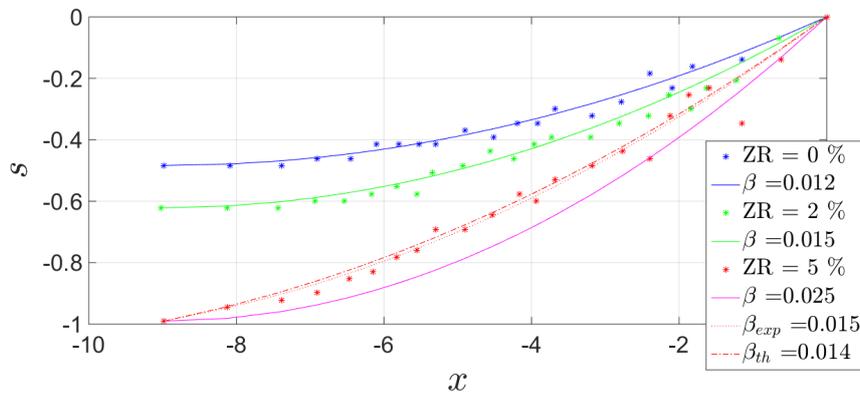


FIGURE 3.56 – Modèle fractal parabolique pour la fracture d'alliages de titane

D'autres tests complémentaires peuvent être analysés en utilisant la fractalité parabolique pour un phénomène partiel. Plusieurs profils fracturés ont été obtenus sur le même spécimen et pour éviter la dispersion nous rassemblons les données dans un seul comportement moyen. Une méthode de Levenberg-Marquardt ou de région de confiance est utilisée pour obtenir  $\beta$  et  $\Delta_0$  à travers la minimisation conjointe des équations (voir figure 3.57) :

$$\min [s - (\beta/2)x^2 + (\Delta_0 - 1)x]^2 \quad \min [ds/dx - \beta x^2 + (\Delta_0 - 1)]^2 \quad (3.111)$$

Pour ce qui est des mesures présentées dans la figure 3.58, on observe encore une fois que le  $Zr = 2\%$  semble être suffisamment caractérisé dans l'espace d'échelle alors que le  $Zr$

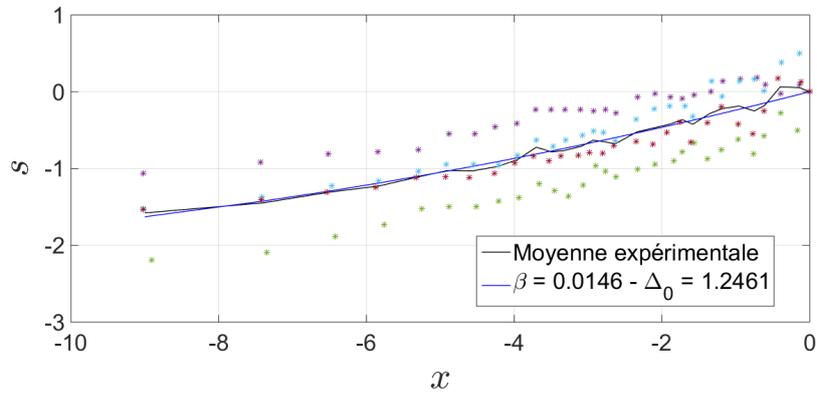


FIGURE 3.57 – Rugosité linéaire en fonction de l’échelle pour le Ti-6Al-2Nb-1Ta-0.9Mo et comportement parabolique obtenu par minimisation de l’entropie d’échelle et flux d’entropie d’échelle

= 5% pose le problème d’une gamme d’échelle insuffisante. Cette fois, c’est l’échelle intégrale  $l_0$  qui semble être restreinte par l’expérimentateur. Malgré la tendance parabolique, une constante indiquant une mauvaise évaluation de l’échelle intégrale est nécessaire pour corriger le modèle parabolique.

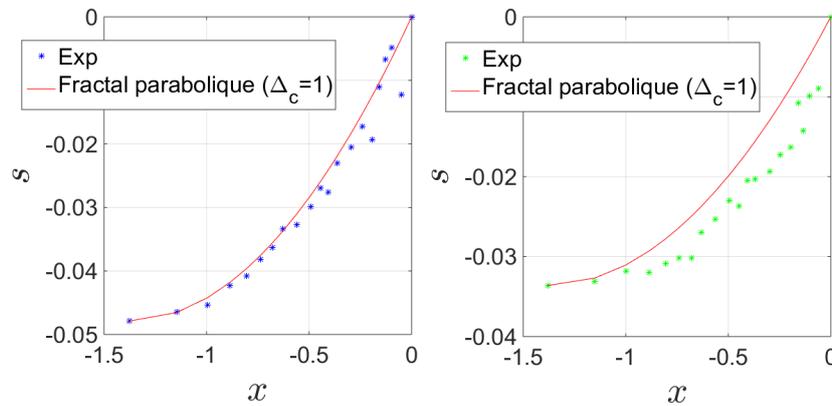


FIGURE 3.58 – Comportement parabolique du Ti-6Al-2V-xZr (Zr=2% gauche ( $\beta = 0.0506$ ) et Zr=5% droite ( $\beta = 0.0353$ ))

Le comportement parabolique dans l’espace d’échelle semble convaincant (même avec l’existence de dispersion expérimentale) en utilisant l’hypothèse de simplification ou en utilisant une mesure locale de dimension  $\Delta_c$  (le choix des petites échelles est naturel puisque nous observons moins de dispersion). Cependant, il est important de souligner que l’estimation du profil fracturé est basée sur une section verticale arbitraire. Par conséquent, une dispersion statistique au niveau des mesures existe lorsqu’on utilise différentes sections verticales pour estimer la rugosité linéaire. Pour résoudre ce problème sans faire la moyenne sur de nombreux profils, on peut utiliser une rugosité de surface.

On peut par conséquent convertir la rugosité linéaire ( $\Lambda_i$ ) obtenue expérimentalement par [Pande et al. \[1987\]](#) sur un matériau fracturé en une rugosité surfacique ( $\Gamma_i$ ) en utilisant la formule de [Coster et Chermant \[1985\]](#) :

$$\Lambda_i = \frac{\mathfrak{L}_i}{\mathfrak{L}_0} \quad \Gamma_i = \sqrt{2\Lambda_i^2 - 1} = \frac{\mathfrak{S}_i}{\mathfrak{S}_0} \quad (3.112)$$

Une entropie d’échelle basée sur la surface de rupture est introduite :

$$s^* = \ln\left(\frac{\mathfrak{S}_0}{\mathfrak{S}_i}\right) \quad s^* = \frac{\beta^*}{2} x^2 + (\Delta_0^* - 2)x \quad (3.113)$$

Les résultats sont présentés en figure 3.59 et figure 3.61 où l'hypothèse  $\Delta_c^* = 2$  a été utilisée (aucune autre correction n'est nécessaire). Et de même, une méthode de Levenberg-Marquardt ou de région de confiance est utilisée pour obtenir  $\beta^*$  et  $\Delta_0^*$  (voir figure 3.60).

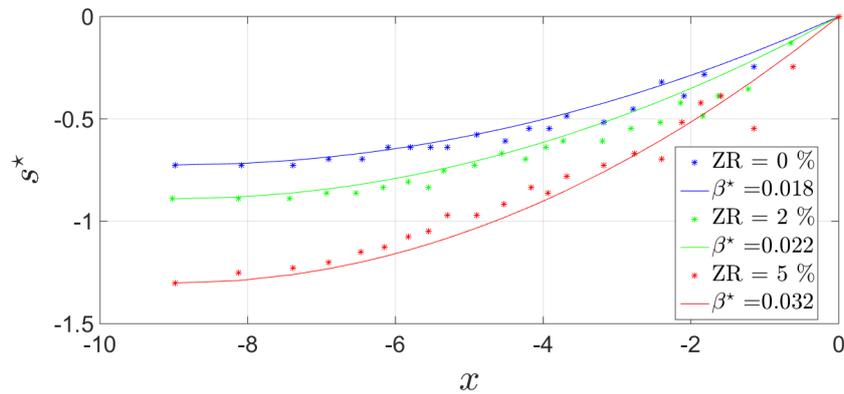


FIGURE 3.59 – Modèle fractal parabolique pour la rugosité superficielle d'alliages de titane

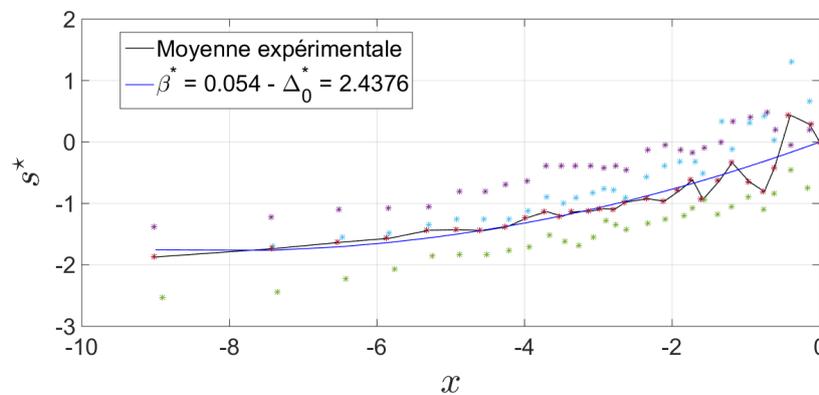


FIGURE 3.60 – Rugosité superficielle en fonction de l'échelle pour le Ti-6Al-2Nb-1Ta-0.9Mo et comportement parabolique obtenu par minimisation de l'entropie d'échelle et flux d'entropie d'échelle

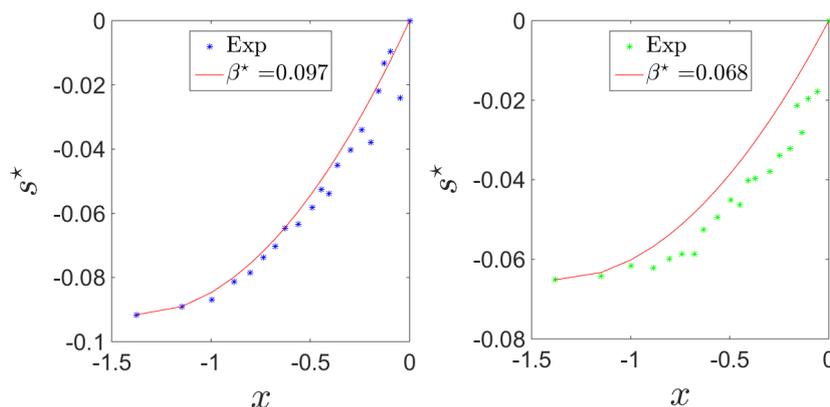


FIGURE 3.61 – Comportement parabolique du Ti-6Al-2V-xZr (Zr=2% gauche ( $\beta = 0.097$ ) et Zr=5% droite ( $\beta = 0.068$ ))

Le comportement fractal parabolique des surfaces fracturées est observé dans ces cas. En outre, on peut déduire l'influence de la concentration de zirconium sur la rugosité des surfaces fracturées, et plus précisément la dépendance des propriétés d'échelle (à travers  $\beta$  ou  $l_0$ ) sur la caractéristique du phénomène.

De façon générale, on observe ici la présence de comportements fractals paraboliques, néanmoins, il est nécessaire d'être prudent sur l'estimation des dimensions aux échelles de

coupure. Pour ce faire, des corrections peuvent être utilisées pour éviter les dispersions et erreurs expérimentales dues aux gammes d'échelle de l'étude.

### Du parabolique au cubique : Longueur de rupture dépendante de la température

La non-linéarité a été décelée par d'autres chercheurs travaillant dans l'analyse des faciès de rupture. En effet, **Banerji et Underwood [1984]**, **Underwood et Banerji [1986]** proposèrent des modèles orientés sur une sigmoïde et non plus une simple pente associée à un comportement fractal pur :

$$\ln \ln \left[ \frac{R_L(l_i \rightarrow 0) - 1}{R_L(l_i) - 1} \right] = \ln \left( \frac{\alpha}{2.3} \right) \pm \beta \ln(l_i) \quad (3.114)$$

La quantité classiquement analysée dans l'analyse des faciès de rupture étant ce que l'on appelle la rugosité, définie comme :

$$R_L(l_i) = \underbrace{\frac{L_0}{L'}}_{cste} l_i^{-(D-1)} \quad (3.115)$$

Avec :

$$R_L = \frac{L_{True}}{L'} \quad (3.116)$$

$l_i$  : Échelle

$L_0$  : Longueur mesurée à l'échelle intégrale

$R_L$  : Rugosité

$L_{True}$  : Longueur mesurée à l'échelle  $l_i$

$L'$  : Longueur projetée du profil de rupture

On peut observer automatiquement que le rapport de rugosité entre deux échelles,  $L'$  étant constant, permet de retrouver simplement une entropie d'échelle. On va montrer ici toute l'étendue possible de l'entropie d'échelle, à commencer simplement par le cas le plus simple, le mode 0 fractal, puis le mode 1. On va ainsi dans un premier temps mesurer la dimension locale à l'échelle de coupure minimale, puis calculer la dimension à l'échelle intégrale correspondante et l'invariant parabolique dans ces deux cas.

— Cas parabolique (mode 0(c)) :

$$\frac{S_c - S_{c-1}}{x_c - x_{c-1}} + d = \Delta_c \quad \Delta_0 = 2 \left[ \left( \frac{S_c}{x_c} \right) + d - \left( \frac{\Delta_c}{2} \right) \right] \quad \beta = \frac{\Delta_c - \Delta_0}{x_c} \quad S(x) = \left( \frac{\beta}{2} \right) x^2 + (\Delta_0 - d) x \quad (3.117)$$

— Cas cubique (mode 1) :

$$\Delta_0 = \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{S_c}{x_c} \right) + d - \left( \frac{\Delta_c}{3} \right) \right] \quad \alpha = 2 \left( \frac{\Delta_c - \Delta_0}{x_c^2} \right) \quad S(x) = \left( \frac{\alpha}{6} \right) x^3 + (\Delta_0 - d) x \quad (3.118)$$

Les résultats obtenus en figure **3.62** montrent un gain en précision du mode 1 sur le mode 0, cependant, on conserve une incapacité à s'approcher de l'expérience aux grandes échelles.

Pour pouvoir approximer correctement les données expérimentales, on remarque la nécessité d'avoir un point d'inflexion, ce qui est possible le plus simplement en utilisant un puits d'entropie d'échelle global d'ordre 1. Le problème en présence ici est la détermination des différents coefficients intervenants au niveau de l'entropie d'échelle associée à un puits

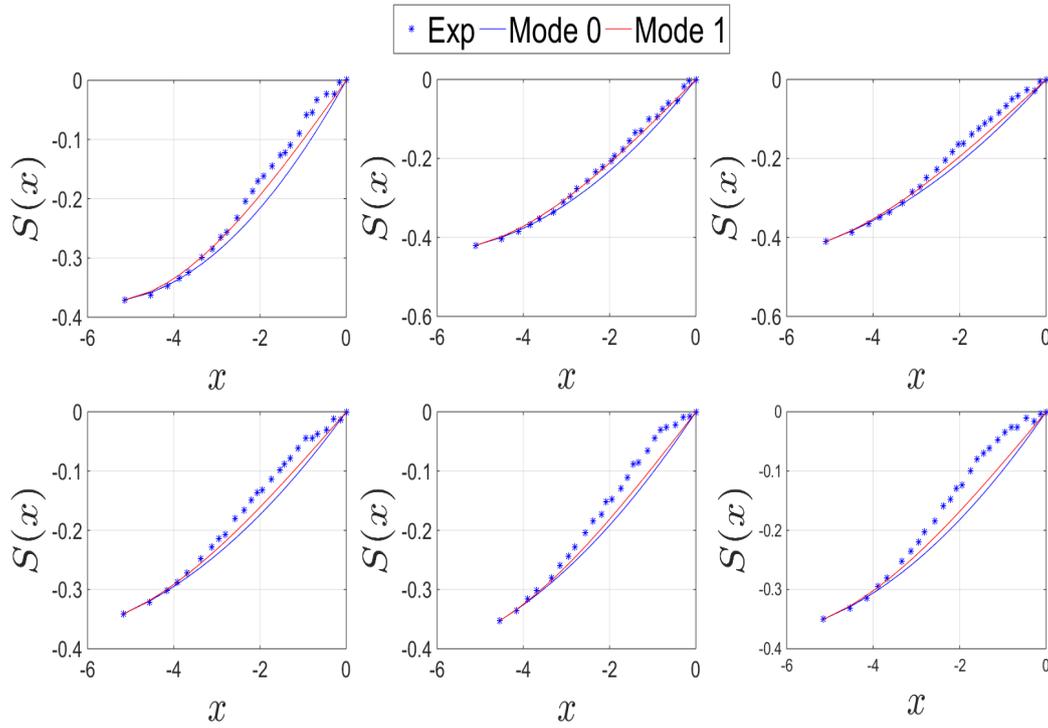


FIGURE 3.62 – Modes 0 et 1 pour la détermination de la longueur de fissure de l'acier 4340 de gauche à droite  $T = 200^\circ\text{C}$ ,  $T = 300^\circ\text{C}$  et  $T = 400^\circ\text{C}$  (haut) et  $T = 500^\circ\text{C}$ ,  $T = 600^\circ\text{C}$  et  $T = 700^\circ\text{C}$  (bas)

d'entropie d'échelle global d'ordre 1. On utilise à cet effet une minimisation de type moindre carré non linéaire :

$$S(x) = \left(\frac{\alpha}{6}\right)x^3 + \left(\frac{\beta}{2}\right)x^2 + (\Delta_0 - d)x \Rightarrow \min \sum_i (S_i - f(x_i, \kappa_c)) \quad (3.119)$$

Où  $S_i$  représente les mesures expérimentales et  $f(x_i, \kappa_c)$  représente la fonction analytique  $S(x)$ . On cherche les  $\kappa_c$  coefficients minimisant la différence entre expérience et modèle.

Les phénomènes mécaniques étant très dispersés, il est possible de considérer  $\Delta_0 - d$  comme l'un des paramètres à estimer dans la minimisation. Il est nécessaire de préciser que les moindres carrés non linéaires basés sur l'algorithme de région de confiance permettent l'obtention de minimums locaux suivant les points d'initialisation, on randomise les paramètres initiaux, puis on cherche les minimums locaux donnant une dimension à l'échelle crête nécessairement supérieure à  $d = 1$ . Les résultats obtenus (voir figure 3.63) donnent des résultats bien supérieurs aux résultats précédents apportés par les modes simples, sachant que l'on illustre les résultats où  $\Delta_c$  est maximale et minimale. Il apparaît ainsi que lors de l'optimisation le cas où la dimension à l'échelle crête est minimale (le plus proche de  $d = 1$ ) est l'optimum véritable (nous donne a priori un minimum global, le meilleur de tous les minimums locaux), ce qui conforte l'idée de l'hypothèse  $\Delta_c = d$ .

Les résultats obtenus sont satisfaisants, néanmoins, on peut chercher à vérifier l'hypothèse du comportement de type sigmoïde soulevé précédemment. Ce comportement est tout à fait possible du point de vue de la diffusion d'entropie d'échelle puisque le puits d'entropie d'échelle peut prendre toutes les formes possibles, les plus intéressantes (en dehors des formes étudiées précédemment) étant les fonctions hyperboliques et exponentielles. Par conséquent, on va considérer une entropie d'échelle de type sigmoïde où l'on cherche deux coefficients soumis aux contraintes de dimensions aux échelles de coupure :

$$S(x) = \frac{1}{B + C e^x} - \frac{1}{B + C} \quad \Delta_c - d = \frac{-C e^{x_c}}{(B + C e^{x_c})^2} \quad \Delta_0 - d = \frac{-C}{(B + C)^2} \quad (3.120)$$

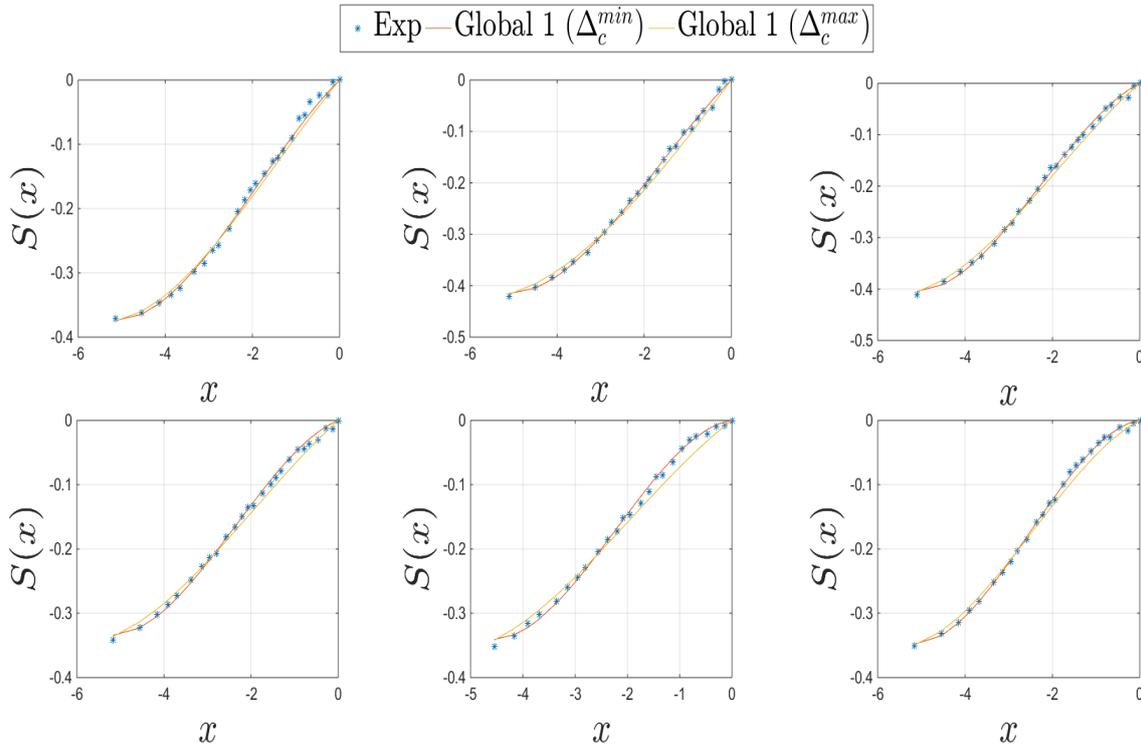


FIGURE 3.63 – Puits d’entropie d’échelle global d’ordre 1 pour la détermination de la longueur de fissure de l’acier 4340 de gauche à droite  $T = 200^{\circ}\text{C}$ ,  $T = 300^{\circ}\text{C}$  et  $T = 400^{\circ}\text{C}$  (haut) et  $T = 500^{\circ}\text{C}$ ,  $T = 600^{\circ}\text{C}$  et  $T = 700^{\circ}\text{C}$  (bas)

Les résultats obtenus (figure 3.64) semblent en accord avec les résultats expérimentaux<sup>7</sup>.

Afin de différencier les résultats obtenus avec le puits d’entropie d’échelle global et le puits d’entropie d’échelle de type sigmoïde, on observe l’évolution de la dimension à travers l’espace des échelles. Cependant, les deux formes semblent avoir des comportements admissibles (figure 3.65). On voit ainsi toute la difficulté dans le choix du puits d’entropie d’échelle adapté aux résultats, tout en sachant que les erreurs de mesures liées à l’expérience influencent les modèles utilisés (notamment par l’utilisation de la dérivation pour obtenir la dimension locale qui augmente l’erreur).

Dans le cas présent où les deux résultats semblent cohérents, on choisit la forme la plus simple, à savoir, le puits d’entropie d’échelle global d’ordre 1. De plus, il possède la possibilité de contraindre plus facilement les dimensions locales. En effet, dans le cas du comportement de type sigmoïde, si l’on souhaite utiliser l’hypothèse d’un retour à la dimension euclidienne à l’échelle crête ( $\Delta_c - d = 0$ ), il est nécessaire de rajouter un terme linéaire dans l’expression de l’entropie d’échelle<sup>8</sup>. On pourra ajouter le fait que le modèle global 1 est aussi plus simple à contraindre pour obtenir une dimension strictement monotone dans l’espace des échelles.

7. On peut légèrement améliorer la précision en utilisant plus de coefficients donnant une entropie d’échelle :

$$S(x) = \frac{A}{B + Ce^x} - \frac{A}{B + C} \quad \Delta_c - d = \frac{-ACe^{x_c}}{(B + Ce^{x_c})^2} \quad \Delta_0 - d = \frac{-AC}{(B + C)^2} \quad (3.121)$$

8. Le terme linéaire ajouter au modèle de type sigmoïde permet d’obtenir un retour à la dimension euclidienne en  $x_c$  :

$$S(x) = \frac{A}{B + Ce^x} - \frac{A}{B + C} + \frac{ACe^{x_c}}{(B + Ce^{x_c})^2} x \quad \Delta_0 - d = \frac{-AC}{(B + C)^2} + \frac{ACe^{x_c}}{(B + Ce^{x_c})^2} \quad (3.122)$$

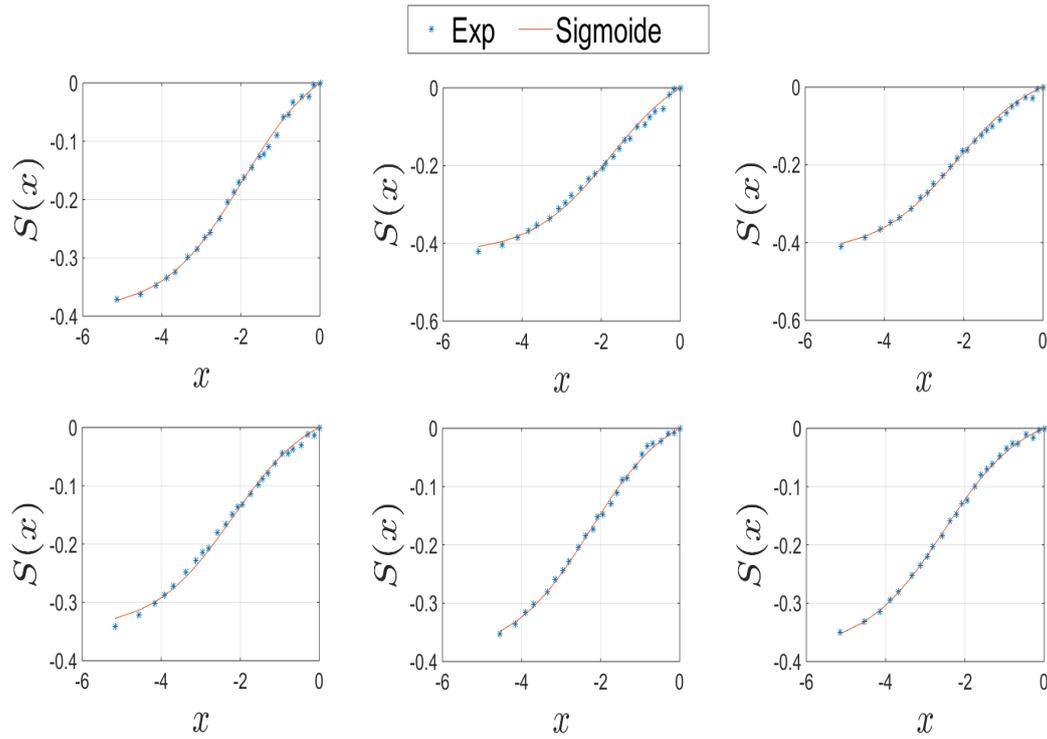


FIGURE 3.64 – Puits d'entropie d'échelle de type sigmoïde pour la détermination de la longueur de fissure de l'acier 4340 de gauche à droite  $T = 200^{\circ}\text{C}$ ,  $T = 300^{\circ}\text{C}$  et  $T = 400^{\circ}\text{C}$  (haut) et  $T = 500^{\circ}\text{C}$ ,  $T = 600^{\circ}\text{C}$  et  $T = 700^{\circ}\text{C}$  (bas)

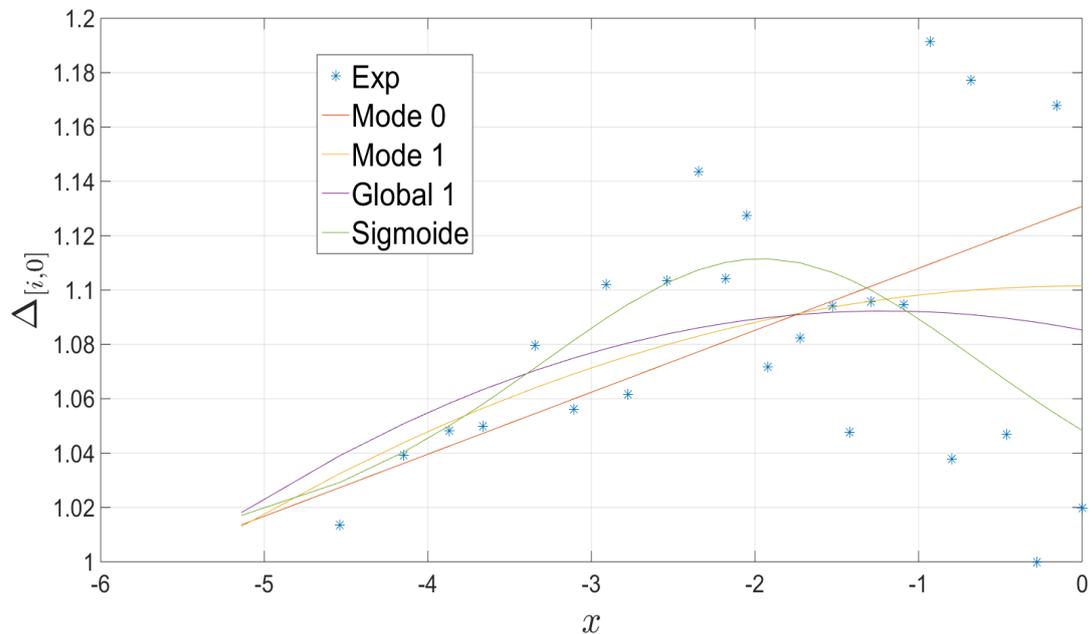


FIGURE 3.65 – Variations de la dimension à travers les échelles (pour  $T = 200^{\circ}\text{C}$ ) et les différents modèles utilisant l'entropie d'échelle

Les résultats obtenus jusqu'ici montrent l'existence de comportements fractals dissipatifs. D'autres phénomènes mécaniques font intervenir cette diversité de comportement, comme la fragmentation qui sera étudiée ci-après.

### 3.4.4 Fragmentation mécanique

La fragmentation est un phénomène complexe composé de trois composantes superposées, une composante de cisaillement, une composante d'impact et une composante de compression. Pour décrire la complexité des phénomènes, on utilise très souvent la géométrie fractale, ainsi, [Turcotte \[1989\]](#) a obtenu des résultats en accord avec son modèle de fragmentation fractale. L'idée simple était de se placer dans un cube en considérant des défauts de forme cubique suivant une loi polynomiale récursive pour chaque échelle, la fragmentation à l'échelle macroscopique étant la conséquence d'une accumulation de rupture à plus petite échelle. Une extension à la géologie [[Allègre et al., 1982](#), [Davy et al., 1990](#), [Turcotte, 1997](#)], et à la fragmentation de coques [[Hernández et Herrmann, 1995](#), [Herrmann et al., 2006](#), [Kun et Herrmann, 1996](#), [Wittel et al., 2004](#)] a été menée montrant l'apparition de fractalité. D'autres schémas récursifs ont aussi été explorés donnant des résultats complémentaires par [Steacy et Sammis \[1991\]](#).

#### Le modèle fractal pur pour la distribution des fragments

À partir de la méthode de maximisation d'entropie [[Englman et al., 1988](#)], un test de fragmentation peut être considéré comme un phénomène créant une distribution de particules respectant une loi de probabilité en puissance (que l'on appelle loi de Pareto, utilisée à l'origine pour la répartition des revenus). On écrit la probabilité de rencontrer un fragment de taille inférieure à  $r$  tel que :

$$P(< r) = 1 - \left( \frac{r_{min}}{r} \right)^\Delta \quad (3.123)$$

Avec pour  $r_{min} \ll r_{max}$  :

$$P(< r_{min}) = 0 \quad P(< r_{max}) = 1 \quad (3.124)$$

La densité de probabilité associée à P est obtenue simplement par :

$$p(r) = \frac{dP(< r)}{dr} = \Delta \frac{r_{min}^\Delta}{r^{\Delta+1}} \quad (3.125)$$

On peut de fait, quantifier le volume total des particules (en considérant  $(3 - \Delta) > 0$  et  $r_{min} \ll r_{max}$  permettant de négliger le  $r_{min}$ ) :

$$V = \int_{r_{min}}^{r_{max}} N_p \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right) p(r) dr \cong \frac{4}{3} \pi N_p \frac{\Delta}{3 - \Delta} r_{min}^\Delta r_{max}^{3-\Delta} \quad (3.126)$$

En multipliant simplement par la masse volumique, on obtient :

$$M(< r) \cong \rho_m \frac{4}{3} \pi N_p \frac{\Delta}{3 - \Delta} r_{min}^\Delta r_{max}^{3-\Delta} \Rightarrow \frac{M(< r)}{M_T} \cong \left( \frac{r}{r_{max}} \right)^{3-\Delta} \quad (3.127)$$

Ainsi, un modèle fractal pour la répartition des fragments d'une fragmentation dans un volume a été obtenu par [Carpinteri et Pugno \[2002a\]](#), puis étendu aux fragmentation 1D et 2D [[Carpinteri et Pugno, 2002b](#)]. Cependant ce modèle ne traduit pas correctement les courbures obtenues par l'expérience (deux dimensions sont utilisées).

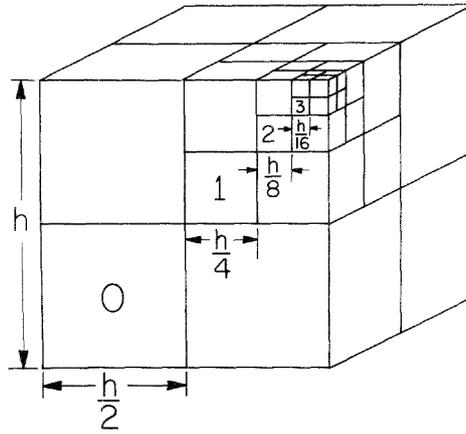


FIGURE 3.66 – Modèle idéaliste pour la fragmentation, le cube initial de taille  $h$  se fragmente en 8 éléments avec une certaine probabilité  $f$ , puis le processus est itéré à l'infini

### De Turcotte à Carpinteri : Fractal dépendant d'échelle

Le modèle fractal de **Turcotte [1989]** est un schéma récursif partant d'un cube qui à chaque étape a une probabilité  $f$  de se fragmenter en 8 cubes de même taille (figure 3.66), on écrit donc à l'étape  $n$  :

$$V_n = \frac{1}{8^n} V_0 \quad N_n = (8f)^n N_0 \quad (3.128)$$

L'étape 0 correspond à ce qu'on appelle l'échelle intégrale, on peut construire un nouveau modèle fractal :

$$\frac{N_n}{N_0} = \left(\frac{V_n}{V_0}\right)^{-\frac{\ln 8f}{\ln \frac{V_0}{V_1}}} = \left(\frac{r_n}{r_0}\right)^{-3 \frac{\ln \frac{V_0}{V_1} f}{\ln \frac{V_0}{V_1}}} \quad (3.129)$$

En effet, à chaque étape on produit un nombre  $V_0/V_1 = 8$  nombre de cubes et  $V_n = r_n^3$ . Or on sait que la dimension d'un objet fractal s'écrit :

$$N_n = \frac{C}{r_n^D} \Rightarrow D = 3 \frac{\ln \frac{V_0}{V_1} f}{\ln \frac{V_0}{V_1}} \quad N_n V_n = N_0 V_0 (f^n) \Rightarrow f^n = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{n(\Delta-3)} \quad (3.130)$$

Ici le chiffre 8 utilisé peut être remplacé par un paramètre quelconque, c'est le nombre de volumes créés par la fragmentation à chaque itération.  $f$  et 8 sont des constantes indiquant un fractal pur,  $f$  étant la probabilité de rupture entre 0 et 1.

Comme il est observé expérimentalement deux dimensions différentes à petite et grande échelles, et que le modèle précédent admet une variation de la dimension à partir du paramètre  $f^9$ , **Carpinteri et Pugno [2003]** ont proposé une dimension dépendant de l'échelle à travers :

$$\Delta(r) = 3 - \frac{r_{min}}{r} \Rightarrow \frac{M(< r)}{M_T} \cong \left(\frac{r}{r_{max}}\right)^{\frac{r_{min}}{r}} \quad (3.131)$$

9. Par exemple, pour des dimensions  $\Delta_{min} \cong 2$  et  $\Delta_{max} \cong 3$ , on aura  $f$  variant entre  $f_{min} \cong r_1/r_0$  et  $f_{max} \cong 1$ .

Avec  $M_T$  : masse totale et  $M$  la fraction massique de particules de taille inférieure à  $r$ . C'est précisément dans l'optique de la dépendance en échelle que l'entropie d'échelle intervient et donc que l'étude de la fragmentation est possible à travers l'utilisation des fractals dissipatifs.

### Diffusion d'entropie d'échelle pour la fragmentation

En se basant sur les résultats expérimentaux de [Carpinteri et Pugno \[2003\]](#) obtenus par diffraction Fraunhofer 0.1-8750 $\mu\text{m}$ , on peut s'orienter vers une loi multi-échelle plus proche des résultats expérimentaux. Nous utiliserons ensuite une hypothèse simple, une masse volumique moyenne constante et indépendante de l'échelle. Cette hypothèse permet de remplacer le rapport de fraction massique par un rapport de fraction volumique. Par conséquent, l'entropie d'échelle prend la forme :

$$\mathfrak{F} = \ln \left( \frac{\Sigma_0}{\Sigma_i} \right) \quad x = \ln \left( \frac{r_i}{r_0} \right) \quad (3.132)$$

$\Sigma_i$  la fraction de volume occupée à l'échelle  $r_i$  correspondant à une taille de particule inférieure ou égale à  $r_i$  et  $\Sigma_0$  la fraction de volume occupée à l'échelle intégrale correspondant à une taille de particule  $r_0$ . Avec  $r_c \leq r_i \leq r_0$  où  $r_c$  est une échelle crête.

La problématique posée par cette expression vient du fait que les quantités étudiées sont des fractions volumiques et non des volumes. C'est pourquoi il est nécessaire de construire un nombre de boules alternatif compatible avec l'analyse fractale. Ce nombre de boules équivalent permet de facto la dépendance en échelle des fractions de volume telles que :

$$\ln \left( \frac{M}{M_T} \right) = \ln \left( \frac{\Sigma_i}{\Sigma_0} \right) = \ln \left( \frac{N_{[i,0]}^* r_i^d}{N_{[0,0]}^* r_0^d} \right) = -\mathfrak{F} \quad (3.133)$$

La dimension topologique euclidienne  $d$  est celle d'un volume, et  $N_{[i,0]}^*$  le nombre de boules équivalent  $r_i$  pavant l'objet à l'échelle  $r_0$ .

Le nombre de boules équivalent est lié au nombre de boules classique par la relation :

$$N_{[i,0]}^* = \sum_{j=i}^c N_{j,0} \left( \frac{r_j}{r_i} \right)^d \quad (3.134)$$

$N_{j,0}$  représente le nombre de boules classique d'échelle  $r_j$  pavant l'objet à l'échelle  $r_0$ . À partir de considération d'objet fractal, on peut démontrer que le nombre de boules équivalent est proche du nombre de boules classique. En rappelant :

$$N_{[i,0]} \sim l_i^{-\Delta} \quad N_{[0,0]} \sim l_0^{-\Delta} \quad N_{[i,0]} = N_{[0,0]} \left( \frac{l_i}{l_0} \right)^{-\Delta} \quad (3.135)$$

Pour un fractal dépendant d'échelle  $\Delta$  deviendra  $\Delta_i$ , dimension associée à  $l_i$ . Il vient pour la relation entre nombre de boules classique et nombre de boules équivalent à une échelle  $r_i$  :

$$N_{[i,0]}^* = N_{[i,0]} [1 + \epsilon(r)] \quad (3.136)$$

Où  $\epsilon(r)$  est une fonction rassemblant la sommation sur les échelles inférieures à  $r_i$ . Elle est considérée ici comme négligeable devant 1 (de par la finitude du phénomène). En illustrant, par exemple à l'échelle intégrale :

$$N_{[0,0]}^* = \sum_{\substack{j=0 \\ i=0}}^c N_{j,0} \left( \frac{r_j}{r_0} \right)^d = N_{[0,0]} \left( \frac{r_0}{r_0} \right)^d + N_{1,0} \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^d + \dots + N_{[c,0]} \left( \frac{r_c}{r_0} \right)^d \quad (3.137)$$

$N_{[0,0]} \left[ 1 + \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^{d-\Delta_1} + \dots + \left( \frac{r_c}{r_0} \right)^{d-\Delta_c} \right]$  or  $\forall i \in [0, c] : 0 < \left( \frac{r_i}{r_0} \right) \leq 1$  et  $d - \Delta_i > 0$ , ce qui implique que le rapport d'échelle  $r_i$  sur  $r_0$  à la puissance  $d - \Delta_i$  est compris entre 0 et 1, et qui s'approche de 0 pour des termes de plus en plus proches de l'échelle crête. D'où l'utilisation de l'hypothèse que la somme (ici représentée par les termes à la droite du chiffre 1) représentée dans l'équation **3.136** comme  $\epsilon(r)$  devient "epsilonesque" devant l'unité<sup>10</sup>. La fonction  $\epsilon(r)$  est aussi dépendante d'échelle, on le voit simplement, car on ne commet aucune erreur à l'échelle crête où  $N_{[c,0]}^* = N_{[c,0]}$ .

Dans le cas du fractal simple, on retrouve :

$$\frac{M}{M_T} = \left( \frac{r_i}{r_0} \right)^{-\tilde{\Delta}} \left( \frac{r_i}{r_0} \right)^d = \left( \frac{r_i}{r_0} \right)^{d-\tilde{\Delta}} \quad (3.138)$$

Où  $\tilde{\Delta}$  est la dimension fractale liée au nombre de boules équivalent. Cependant, le comportement du phénomène comme l'ont constaté **Carpinteri et Pugno [2003]** semble dépendant d'échelle. Lorsque l'on trace le flux d'entropie d'échelle  $\phi$ , en fonction de l'échelle, une courbure apparaît (malgré la dispersion forte des données expérimentales) laissant penser à un flux d'entropie d'échelle parabolique. Ceci nous permet de faire l'hypothèse d'un mode global d'ordre 1 (sans perte de généralité) pour l'expression de l'entropie d'échelle.

$$\phi(x) = \frac{d\mathfrak{F}}{dx} = \frac{\ln\left(\frac{\Sigma_i}{\Sigma_{i+1}}\right)}{\ln\left(\frac{l_i}{l_{i+1}}\right)} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)x^2 + \beta x + \tilde{\Delta}_0 - d \quad (3.139)$$

Afin de réduire la dispersion dans les résultats, on utilise une entropie d'échelle et un flux d'entropie d'échelle moyen, puis, on minimise à la fois l'écart à l'entropie d'échelle et l'écart au flux d'entropie d'échelle tel que l'on ait :

$$\min \sum_i (\mathfrak{F}_i - f_{\mathfrak{F}}(x_i, \kappa_c))^2 \quad \min \sum_i (\phi_i - f_{\phi}(x_i, \kappa_c))^2 \quad (3.140)$$

Plusieurs contraintes supplémentaires peuvent être utilisées afin de donner plus de sens physique au résultat obtenu (on peut donc utiliser suivant les cas une méthode de Levenberg-Marquardt ou une méthode de région de confiance). En effet, le premier modèle présente un maximum de dimension non pas à l'échelle intégrale mais à une échelle intermédiaire. Même si ce comportement peut être admissible puisque les dimensions atteintes ne sont pas impossibles, un deuxième modèle peut être présenté, une fonction strictement monotone ayant une dimension fractale à l'échelle intégrale égale à la dimension topologique<sup>11</sup> (un exemple avec une optimisation donnant une dimension à l'échelle intégrale supérieure à la dimension topologique est aussi présenté, voir figure **3.67**).

A titre de comparaison, la MFSL utilisée par **Carpinteri et Pugno [2003]** prend la forme :

$$\mathfrak{F}_{carp} = -\left(\frac{r_c}{r_i}\right) \ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right) = -Kxe^{-x} \Rightarrow \frac{d\mathfrak{F}_{carp}}{dx} = Ke^{-x}(x-1) \quad K = \left(\frac{r_c}{r_0}\right) \quad (3.141)$$

Ce modèle est très sensible aux paramètres imposés à savoir l'échelle minimale et maximale, de plus, il apparaît de qualité moindre par rapport aux résultats donnés par la diffusion de l'entropie d'échelle.

<sup>10</sup>. En utilisant la règle de d'Alembert sur le logarithme de la fonction, et en considérant  $\Delta_i \approx \Delta_{i+1}$  et  $r_i \approx r_{i+1}$ , on obtient une forme indéterminée. C'est à partir de la finitude de la somme et en considérant que  $\Delta_{i+1}$  généralement inférieur à  $\Delta_i$  que l'on considère qu'il y a convergence.

<sup>11</sup>. Le cas le plus simple peut être aussi retrouvé automatiquement à partir de l'hypothèse d'un mode 1 avec  $\tilde{\Delta}_0 = d$ .

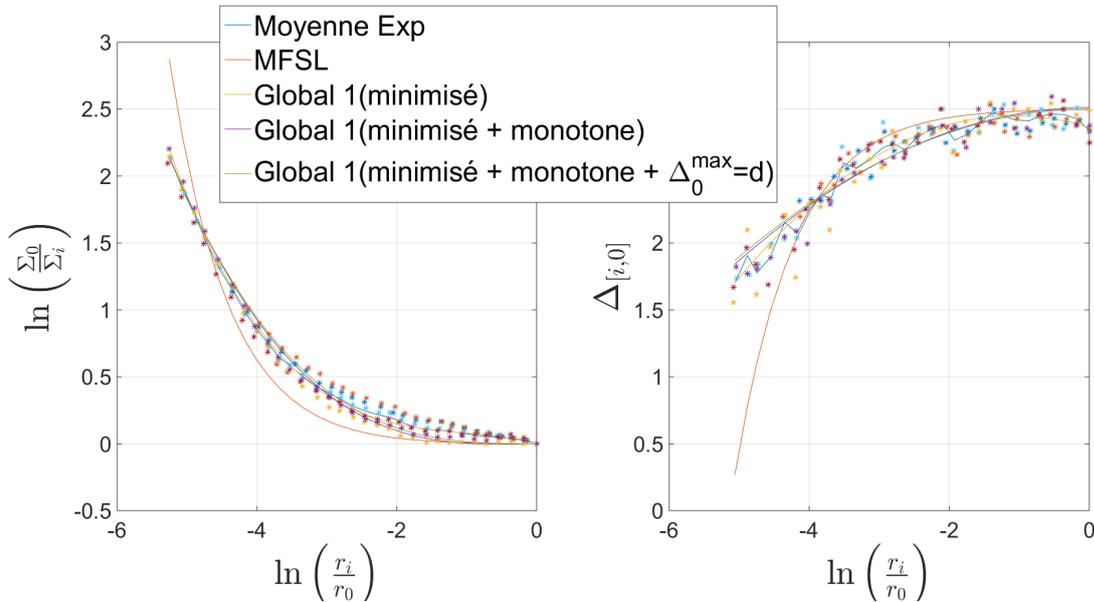


FIGURE 3.67 – Variations de la dimension à travers les échelles pour la fragmentation et les différents modèles globaux d'ordre 1

Une autre méthode est possible, en effet, il est utile de remarquer qu'il existe une certaine saturation aux grandes échelles du flux d'entropie d'échelle  $\phi$  jusqu'à environ  $x_1 \approx -2$ . Ce comportement annonce une dimension constante dans l'espace des échelles. A partir de cette échelle  $x_1$ , la dépendance en échelle opère à travers un comportement linéaire de la dimension entraînant un fractal de mode 0. Pour étudier correctement le phénomène, il est donc possible de repositionner l'échelle intégrale, c'est-à-dire redéfinir  $l_0$  en l'affectant à  $x_1$  (le plateau de saturation n'apparaissant plus dans la caractérisation du phénomène). De façon analogue à la méthode précédente, on minimise par moindres carrés donnant des résultats proches de l'expérience<sup>12</sup>. On aperçoit de même que lorsqu'on utilise une MFSL renormalisée :

$$\tilde{\mathfrak{F}}'_{carp} = -K' x' e^{-x'} \quad K' = \left( \frac{r_c}{r'_0} \right) \quad x' = \ln \left( \frac{r_i}{r'_0} \right) \quad r'_0 = e^{x_1} l_0 \quad (3.142)$$

Les résultats donnés par le mode 0 semblent tout aussi satisfaisants que ceux provenant des modes globaux d'ordre 1 et apparaissent toujours meilleurs que la MFSL (figure 3.68).

Il est aussi utile de voir que la dimension à l'échelle crête<sup>13</sup> n'est pas  $\tilde{\Delta}_c = \Delta_c = 2$  mais légèrement inférieure, ce qui laisse supposer une rupture non pas suivant un plan mais plutôt suivant la dimension d'une agrégation limitée par diffusion puisque l'on obtient  $\tilde{\Delta}_c = \Delta_c \approx 1.8$  et que l'on sait que pour un DLA ( $\Delta \approx 1.7$ ). Cette dimension semble admissible puisque on retrouve une dimension similaire dans le cadre de travaux expérimentaux sur la fragmentation de la glace [Weiss, 2001].

### Résistance mécanique à partir des résultats sur la distribution des fragments

Les résultats obtenus pour la distribution des particules lors de la fragmentation sont réutilisés dans l'estimation de la résistance à la fragmentation du matériau étudié. En effet,

<sup>12</sup>. Le cas le plus simple peut être retrouvé comme précédemment à partir de l'hypothèse d'un mode 0 avec  $\tilde{\Delta}_0 = d$ .

<sup>13</sup>. Lorsque l'on parle d'échelle crête ici, on parle du phénomène lui-même. En effet, puisque l'on ne commet pas d'erreur sur le nombre de boules à l'échelle crête, par extension l'erreur sur la dimension à l'échelle crête est nulle.

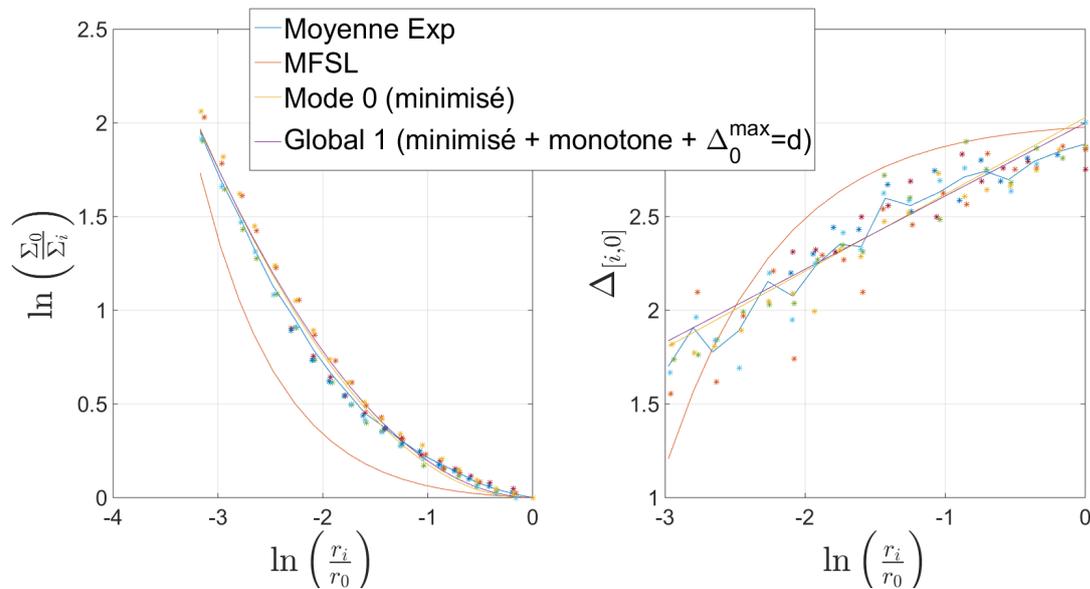


FIGURE 3.68 – Variations de la dimension à travers les échelles pour la fragmentation et les différents modèles de mode 0 avec renormalisation de l'échelle intégrale

**Carpinteri et Pugno [2002a]** annoncent l'existence d'un quantum de fragment qui correspond aux échelles crêtes utilisées précédemment. De fait, on utilise la dimension mesurée à l'échelle crête que l'on transporte à la résistance à la fragmentation. C'est à dire que la résistance mécanique d'un matériau sous sollicitation à une dimension identique (à l'échelle crête  $r_c$ ) à la dimension associée à sa distribution de fragments. **Carpinteri et Pugno [2003]** préfèrent utiliser une nouvelle MFSL propre à la résistance à la fragmentation, s'écrivant :

$$R = R_\infty \left( 1 + \frac{l_{ch}}{l} \right) \quad (3.143)$$

$R_\infty$  étant la résistance à la fragmentation à grande échelle et  $l_{ch}$ , une longueur caractéristique (de l'ordre du plus grand fragment) qui modélise la transition entre deux régimes de fractalité (obtenue par régression).

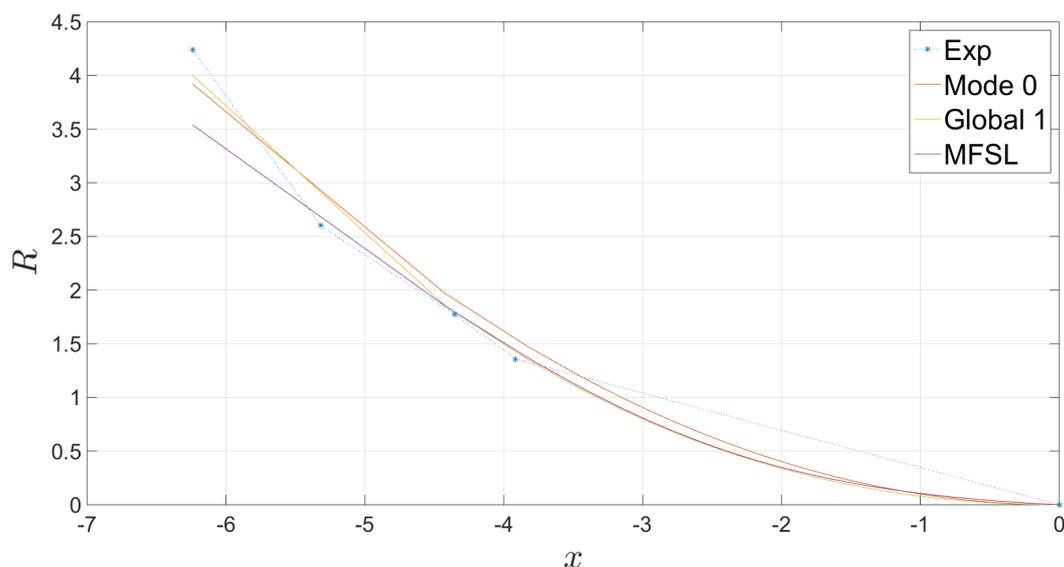


FIGURE 3.69 – Comparaison des modèles liés à l'entropie d'échelle et la MFSL vis-à-vis de la résistance mécanique en fragmentation

Les résultats présentés en figure 3.69 montrent la possibilité des liens entre les deux comportements fractals, ceux-ci présentant d'ailleurs des résultats plus précis que la MFSL. Attention néanmoins, un petit détail sur la liaison des deux phénomènes est à noter. C'est la détermination de l'échelle intégrale qui, dans les deux cas, pourrait être évaluée de façon plus précise et permettre d'obtenir des lois plus proches de l'expérience.

### 3.5 Fractal parabolique et lien constructal

L'application de la géométrie multi-échelle à la mécanique permet l'observation de structure à travers les échelles. Cependant un lien avec la physique des phénomènes est nécessaire. La théorie constructale est une théorie basée sur la thermodynamique impliquant une loi d'évolution géométrique réunissant thermodynamique et géométrie multi-échelle.

#### 3.5.1 Introduction

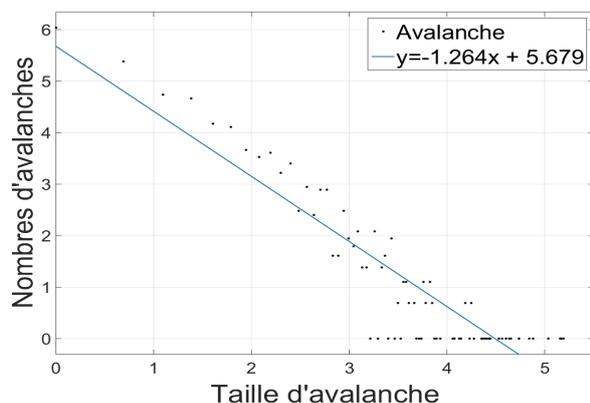


FIGURE 3.70 – Simulation d'avalanche (criticalité auto-organisée), un nouveau grain est ajouté sur une grille 100x100 avec un niveau d'accumulation limite égale à 4

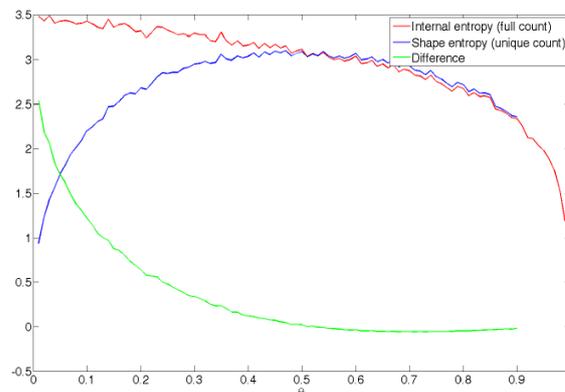


FIGURE 3.71 – Entropie de Gibbs-Shannon obtenue pour différents mouvements browniens dépendant du facteur de Carnot [Canivet et al., 2016]

Le lien entre géométrie (fractale) et thermodynamique existe notamment par l'intermédiaire de ce que l'on appelle l'exposant critique et son lien avec la dimension fractale dans les phénomènes critiques [Tang et Bak, 1988] (figure 3.70). D'autres liens ont été réalisés par Dupain et al. [1986] associant la température à une dimension, ou encore par Le Méhauté et al. [1998] se concentrant sur les processus de diffusion liés à la dérivation fractionnaire et impliquant un temps irréversible. Récemment, l'analyse fractale a permis la représentation de la notion d'exergie par Canivet et al. [2016] (figure 3.71).

La théorie constructale est basée sur la thermodynamique classique montrant à la fois l'importance de la géométrie et de la topologie en physique [Bejan et Lorente, 2010, 2013, Lorente et Bejan, 2005, Lorente et al., 2002]. Elle permet l'étude des processus impliquant une finitude des échelles aux antipodes de la fractalité [Avnir et al., 1998], et peut faire émerger des fractals paraboliques [Queiros-Condé et Feidt, 2008b, Queiros-Condé et al., 2007, Queiros-Condé et Feidt, 2010] (figure 3.72).

Le but est ici de vérifier si des comportements fractals paraboliques existent dans les processus mécaniques que l'on pourrait lier à la théorie constructale.

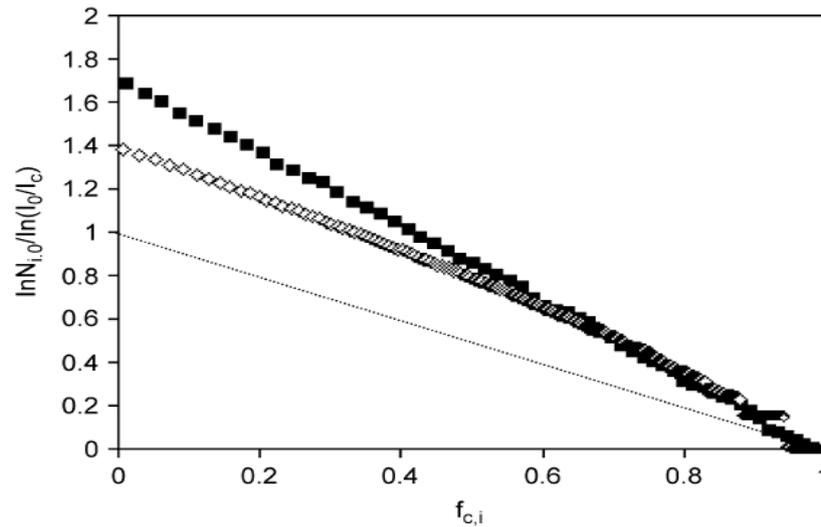


FIGURE 3.72 – Analyse en échelle d'un drain de fluide montrant la variation du nombre de boîtes devant l'objet en fonction de l'échelle, linéaire dans le cas fractal et parabolique dans le cas constructal [Queiros-Condé et al., 2007]

### Lien constructal en mécanique

La déformation est très étudiée car elle requiert une physique élaborée. Il est ainsi possible de déterminer une entropie d'un matériau constitué de défauts de Shottky ou encore utiliser les équations de l'hydrodynamique dans l'étude des dislocations et phonons [Lubensky et al., 1985]. Cependant, les liens entre les différentes échelles sont difficiles sachant que les phénomènes mécaniques restent très diversifiés [Groma et Bakó, 2001]. Des approches thermodynamiques en mécanique invoquent l'utilisation classique de l'énergie libre avec des modèles dynamiques des dislocations [Svendsen, 2002], l'utilisation de modèles de coagulation-fragmentation [Wattis, 2006] mais aussi des modèles couplés au comportement macroscopique [Serajzadeh, 2005, Silbermann et al., 2014, W. E et Z. Huang, 2002, Zhou et al., 2010]. Dans le cas des milieux granulaires, on utilise même une température granulaire et une entropie de contact (contactopie) de façon analogue à un gaz de particules élastique [Behringer, 2015, H.J. Herrmann, 1993, Langer et al., 2010].

La vue constructale de la fatigue provient conjointement de l'analyse exergétique précédente évoquant une qualité dans la déformation plastique et d'une organisation géométrique apparente [Johnson et al., 1964] qui est comparable géométriquement à une distribution optimale de dissipation visqueuse dans un écoulement [Luo et Tondeur, 2005, Tondeur et al., 2009], organisation qui apparaît aussi pour des milieux granulaires [Geng et al., 2001]. Cette vue constructale est appuyée par une analogie entre chaleur et contrainte suggérée par Lorente et al. [2010] et appuie l'hypothèse constructale pour la déformation mécanique comme la rupture ductile [Chatterjee, 2012]. D'autre part, des travaux sur la mécanique révèlent l'existence d'une description trans-échelle dans les phénomènes rapides par l'utilisation du nombre de Deborah, impliquant des échelles caractéristiques et la présence de diffusion [Bai et al., 2005, 2007, 2008, Haiying et al., 2004, Yilong et al., 2002]. Ces phénomènes liant diverses échelles peuvent faire apparaître des structures géométriques notamment la fractalité [Chen et al., 2013] et de l'intermittence (cascade d'énergie).

La réflexion originale de l'étude repose ainsi sur deux points :

La partie instationnaire peut être considérée comme un temps caractéristique de mise à l'équilibre, la montée en température étant associée à la génération de dislocations. En phase stationnaire la température se stabilise puis à un point critique, la température réaugmente car on a atteint une agrégation critique des dislocations.

Quelque soit la sollicitation, le matériau s'organise de manière à drainer la contrainte le

mieux possible. Deux gammes d'échelle sont mises en jeu, une gamme se basant sur l'échelle interatomique jusqu'à l'échelle du grain (ou de la macrofissure), puis une gamme allant du grain jusqu'à une échelle d'homogénéisation dans le volume.

On peut apercevoir lorsqu'on observe le faciès de rupture de tests en fatigue gigacyclique un réseau veineux témoignant de la structure géométrique complexe de la fatigue (voir figure 3.73).

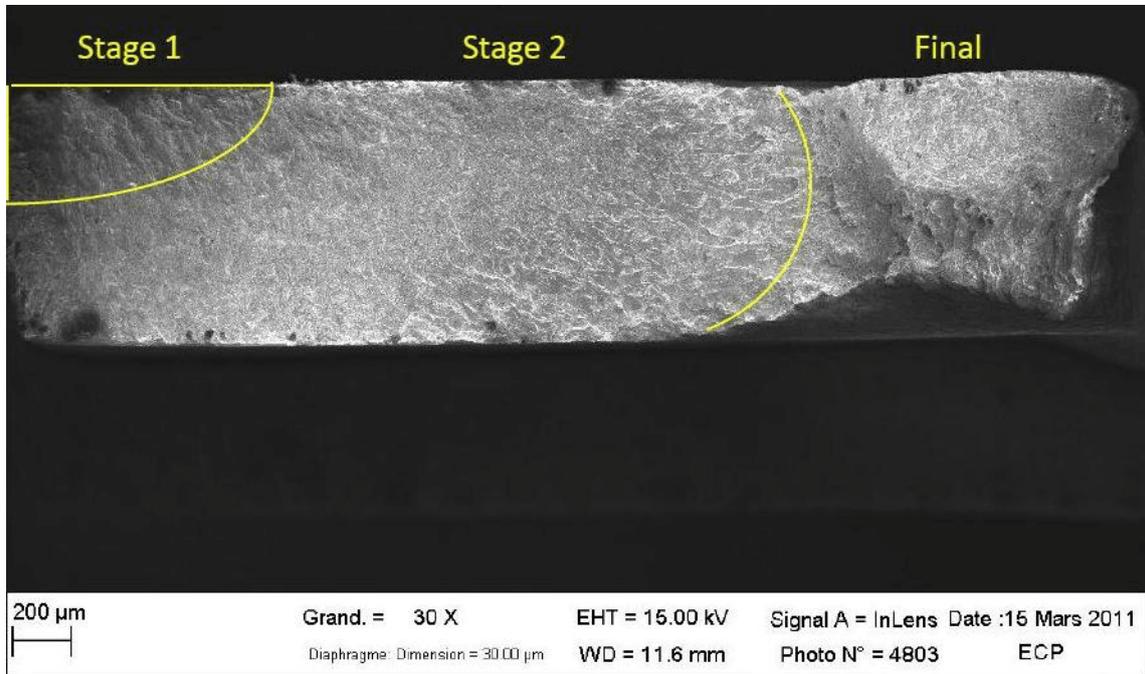


FIGURE 3.73 – Faciès de rupture d'un fer armco sollicité à 20kHz et R=-1 provenant de Wang [2013]

### Estimation des échelles caractéristiques

Il est nécessaire de déterminer les échelles où le comportement fractal dissipatif (de type parabolique correspondant au constructal) pourrait opérer (voir figure 3.74). Un comportement plutôt diffusif sur une première gamme d'échelle et plutôt ordonné à grande échelle (à priori), mais où l'échelle intermédiaire est assez difficile à estimer puisqu'elle apparaît dépendre de la structure des dislocations et du temps [Zbib et Aifantis, 2003]. L'observation des microstructures nous oriente vers des phénomènes de taille  $l_0 \in [10^{-6} - 10^{-9} m]$  pour des temps  $t_0 \in [s - min]$  [Bai et al., 2008]. La littérature utilise généralement une échelle liée à la densité de dislocation  $\rho$  et plus précisément une échelle proche de  $\rho^{-1/2} \sim \mu m$  [Gay et al., 1953, Hähner, 1996, Hordon et Averbach, 1961, Livingston, 1962] pouvant être indépendante de la vitesse de déformation [Edington, 1969], et symbolisant l'espace moyen entre dislocations. La distance entre dislocations estimée pour les matériaux étant autour du  $\mu m$  [Dean et Wilson, 1947, Koehler, 1941, 1942], et la taille maximale d'une ligne de dislocation étant aussi autour du  $\mu m$  [Bailey et Hirsch, 1960]. On peut tout aussi bien prendre une échelle liée aux structures en cellule  $\sim \mu m$  que l'on peut obtenir par autocorrélation d'images de dislocation [Nabarro et Duesbery, 2002]. Mais, suivant les amplitudes de déformation étudiées, celles-ci peuvent ne pas apparaître [Feltner et Laird, 1967a,b].

Une échelle de corrélation ( $l_{corr}$ ) entre dislocations peut être mise en équation à partir du fait que les dislocations ont un mouvement corrélé lorsqu'elles possèdent une contrainte de glissement ( $\tau$ ) suffisamment supérieure aux fluctuations dans le milieu effectif. Ces dislocations mouvantes en groupe sont ainsi liées à un temps de corrélation ( $t_{corr}$ ) à travers la

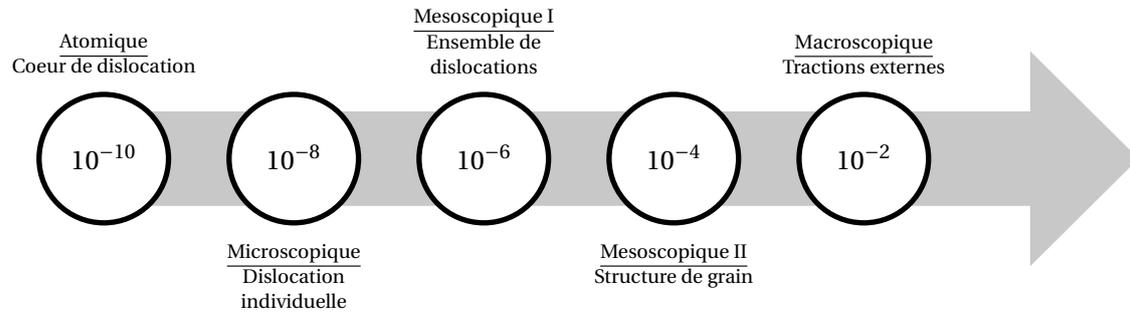


FIGURE 3.74 – Les différentes échelles (en mètres) mises en jeu en mécanique

densité de dislocation mobile ( $\rho_m$ ), la vitesse de déformation macroscopique ( $\dot{\gamma}$ ) et la longueur de glissement ( $L$ ) [Hähner et al., 1998] :

$$l_{corr} = \frac{Gb}{4\pi\sqrt{\delta\tau_{eff}^2}} \quad \tau_{eff} = \tau_{ext} - \tau_{int} \quad t_{corr} = \frac{\rho_m b L}{\dot{\gamma}} \quad (3.144)$$

Finalement, on peut aussi estimer une échelle intégrale en utilisant [Bai et al., 2005] :

$$l_0 \sim \sqrt{\frac{k(T_p - T_0)}{\sigma : D}} \quad (3.145)$$

L'échelle minimale naturelle quant à elle correspond au module du vecteur de Burgers. C'est une échelle caractéristique que l'on retrouve en élasticité [Askes et Aifantis, 2011] représentant le quantum de déformation  $\sim 10^{-10} m$ . Il en découle une échelle temporelle microscopique pouvant être calculée à partir de :

$$t_\eta = \sqrt{\epsilon_\eta / mb} \sim 10^{-13} s \quad \text{Car l'énergie d'une dislocation est } \sim 10^{-19} J \quad (3.146)$$

### 3.5.2 Approche constructale en mécanique des milieux continus

#### Lien avec la thermodynamique des processus irréversibles

Notre orientation est dans un premier temps basée sur ce que l'on appelle le flux plastique qui apparaît homogène dans le matériau [Barlat et al., 2002] ou encore le gradient de déformation plastique. Les résultats précédents obtenus sur l'exergie induisent une diminution de la température de l'échantillon afin de diminuer le flux d'exergie plastique et rallonger la durée de vie. Le formalisme de la thermodynamique des processus irréversibles couplé à la théorie constructale a été appliqué avec succès au problème de drainage [Tescari et al., 2011]. Dans notre cas, il est possible de considérer la production volumique de chaleur (terme source  $\sigma_q$ ) comme étant le travail de déformation plastique. On écrira ainsi les deux principes en considérant tout d'abord une conduction uniquement suivant  $y$  :

$$\nabla(J_y) = \sigma_q \quad \nabla\left(\frac{J_y}{T}\right) = \frac{\sigma_q}{T} + \sigma_s \Rightarrow \sigma_s = J_y \nabla(1/T) \quad (3.147)$$

$J_y$  étant le flux de chaleur et  $\sigma_s$ , l'entropie créée. Les lois linéaires de la thermodynamique des processus irréversibles (impliquant une loi de Fourier pour la conduction avec  $k_y$  la conductivité) étant données par :

$$J_y = l_y \nabla(1/T) \quad l_y = k_y T^2 \quad (3.148)$$

La différence avec les résultats obtenus par [Tescari et al. \[2011\]](#) vient de l'utilisation d'une condition aux limites à flux constant suivant y, symbolisant des pertes énergétiques par convection et rayonnement :

$$\frac{d(1/T)}{dy} \Big|_{y=R} = \kappa \quad (3.149)$$

Amenant à une entropie produite intégrée sur le volume  $W \times L \times (R-r)$  égale à :

$$P_y = \left[ \frac{\sigma_q^2}{3l_y} (R-r)^3 + l_y(R-r)\kappa^2 - \sigma_q(r-R)^2\kappa \right] WL \quad (3.150)$$

Avec  $W$  l'épaisseur,  $L$  la longueur et  $(R-r)$  la hauteur du matériau produisant la chaleur et  $r$  la hauteur de matériau drainant la chaleur (voir figure 3.75). La première partie de l'équation représente la production d'entropie dans le cas où  $\kappa = 0$  correspondant au résultat avancé [Tescari et al. \[2011\]](#).

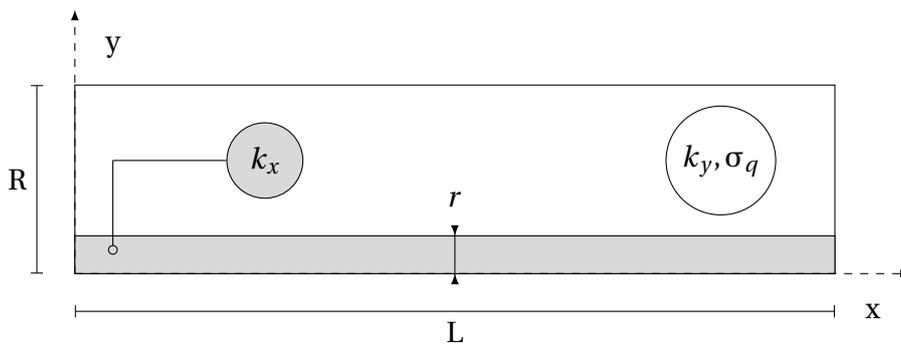


FIGURE 3.75 – Moitié de volume élémentaire (symétrie suivant axe  $x=0$ )

De même en poursuivant l'analyse en utilisant l'hypothèse d'une conduction uniquement suivant la direction  $x$  (opérant comme une ailette), l'entropie produite intégrée sur le volume  $W \times L \times r$ , devient :

$$P_x = \frac{[\sigma_q(R-r) + l_y\kappa]^2}{3l_x r} WL^3 \quad (3.151)$$

Ce qui donne finalement comme entropie produite totale (le deux provenant de la symétrie) :

$$P_T = 2(P_y + P_x) \quad (3.152)$$

La création d'entropie pouvant être mise sous la forme  $P_t = Q^2 Z_s$  avec  $Q$  la puissance chaleur générée dans le volume  $Q = 2\sigma_q(R-r)LW$ . Ceci permet de définir l'impédance entropique (sans oublier  $(R-r)^2 = (r-R)^2$ ) :

$$Z_s = \frac{(R-r)}{6l_y LW} + \frac{l_y\kappa^2}{2\sigma_q^2(R-r)LW} - \frac{\kappa}{2\sigma_q LW} + \frac{L}{6l_x r W} + \frac{(l_y\kappa)^2 L}{6l_x r \sigma_q^2 (R-r)^2} + \frac{l_y\kappa L}{3l_x r \sigma_q (R-r)} \quad (3.153)$$

$$Z_s = \frac{1}{6l_x W} \left[ \frac{l_x(R-r)}{l_y L} + \frac{3l_x l_y \kappa^2}{\sigma_q^2 (R-r)L} - \frac{3l_x \kappa}{\sigma_q L} + \frac{L}{r} + \frac{(l_y\kappa)^2 L}{\sigma_q^2 (R-r)^2 r} + \frac{2l_y \kappa L}{\sigma_q (R-r)r} \right] \quad (3.154)$$

La quantité importante ici étant le ratio entre matériau conducteur et échantillon ( $\epsilon = r/R$ ). Celle-ci mène lorsqu'on optimise l'impédance ( $dZ_s/d\epsilon = 0$ ), à plusieurs solutions possibles

pour  $\epsilon_{opt}$ . La suite de l'optimisation lorsqu'on peut maîtriser la géométrie de l'échantillon est dans la continuité constructale par l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange [Tescari et al., 2011].

Cette optimisation a l'avantage de drainer la chaleur dans l'optique de l'augmentation de la durée de vie en fatigue mais présente l'inconvénient de ne pas prendre en compte les propriétés mécaniques du matériau conducteur. De fait, ces propriétés mécaniques doivent être prise en compte a posteriori par des lois de comportements.

### Liens avec l'optimisation de dissipation visqueuse et la diffusion

Comme on peut voir la déformation plastique comme un flux de déformation, un rapprochement avec la distribution optimale d'un débit est possible. Sachant que la distribution optimale d'un débit minimisant les dissipations visqueuses fait émerger un rapport de diamètre respectant [Bejan, 2000] :

$$\frac{D_i}{D_{i+1}} = n^p \quad p = (1/3) \text{ laminaire} \quad p = (3/7) \text{ turbulent} \quad n : \text{nombre de subdivisions} \quad (3.155)$$

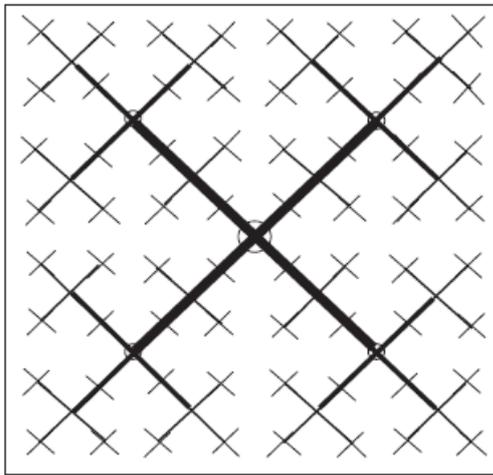


FIGURE 3.76 – Distribution optimale de fluide d'un point central à 256 points uniformément distribués [Luo et Tondeur, 2005]

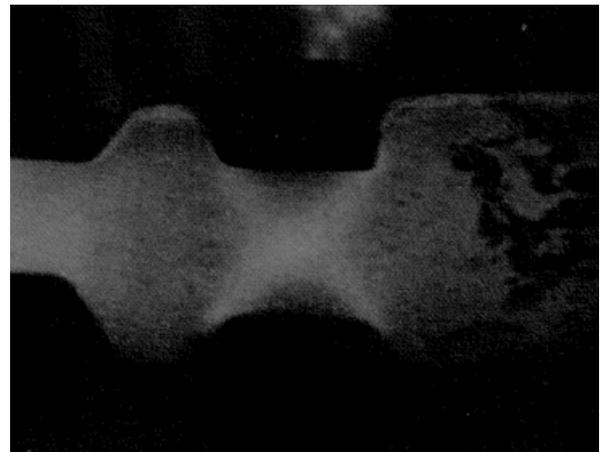


FIGURE 3.77 – Formation de lignes de discontinuité thermiques provoquées par sollicitation de type choc [Johnson et al., 1964]

Pour un solide, on pourrait se satisfaire d'une hypothèse menant à un rapport compris entre les deux puisque de l'intermittence existe. Toujours en lien avec les fluides et en sachant que des bandes de déformation apparaissent lors d'un choc [Johnson et al., 1964], la déformation plastique peut être rapprochée d'un réseau de distribution poreux faisant apparaître une géométrie fractale proche de la réalité [Luo et Tondeur, 2005] (voir figure 3.76 et figure 3.77), et où une fonction constructale utilisant une loi de Poiseuille pour le frottement visqueux amène à  $D_i/D_{i+1} = 2^{5/6}$  [Tondeur et al., 2009]. Celle-ci satisfaisant à l'équipartition de dissipation à travers les échelles et au théorème de densité de dissipation uniforme, aboutissant à une distribution du volume des pores dépendante d'échelle.

Par ailleurs, sachant que la théorie constructale a pour but initial l'optimisation des transferts de chaleur, celle-ci est fortement liée aux équations de diffusion. Or, il existe des modèles de diffusion de la déformation liés aux lois d'Orowan en plasticité [Jeanclaude et Fresengeas, 1993, Nabarro et Hirth, 2007] :

$$\dot{\epsilon} = \rho_M v b + D \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} \quad (3.156)$$

$\dot{\epsilon}$  : Vitesse de déformation plastique

$\rho_M$  : Densité de dislocation mobile

$b$  : Module de Burgers

$v$  : Vitesse moyenne des dislocations mobiles

$D$  : Coefficient de diffusion ( $10^{-5} m^2/s$  pour un alliage Al-5%Mg).

Une vitesse de déformation ne peut être constante toutefois, sa variation a lieu majoritairement dans la partie élastique. Ainsi, en considérant un effet moindre de la vitesse de déformation sur la réponse plastique du matériau, on pourra prendre la vitesse de déformation comme constante [Gary, 2017]. Cette hypothèse induit en phase stationnaire une forme parabolique du champ de déformation, en revanche, lorsqu'on ne peut plus la considérer constante comme en fatigue, on pourra utiliser des méthodes analytiques pour obtenir des solutions sur le champ de déformation<sup>14</sup>.

La superposition d'un matériau permettrait de drainer la déformation mais attention, celui-ci à la différence de la chaleur produirait aussi un terme source lié aux dislocations. Pour finir, afin de caractériser les bandes de glissement persistantes des modèles de diffusions de volume libre existent [Bai et al., 2008].

### Fractal parabolique et loi de Basquin

La fractalité des phénomènes est très répandue en mécanique, dans la continuité de la deuxième partie du manuscrit, une approche fractale de la fatigue a été étudiée où la contrainte associée à la limite de fatigue conventionnelle ( $10^6$  cycles) est considérée comme dépendante de la taille de l'échantillon [Carpinteri et al., 2002] et rapprochée de la loi de Basquin en fatigue à grand nombre de cycles pour les métaux [Carpinteri et al., 2009]. Dans le cadre de l'entropie d'échelle, on peut lier la loi de Basquin ( $C_i = N\sigma_i^b$ ) à une fractalité parabolique en considérant un nombre de cycles fixé et en réutilisant la conservation de la force à travers les échelles :

$$\frac{C_i}{C_0} = \left(\frac{S_0}{S_i}\right)^b \quad \ln\left(\frac{C_i}{C_0}\right) = b \left[ \frac{-\beta}{2} x^2 + (\Delta_0 - d)x \right] \quad x = \ln\left(\frac{l_i}{l_0}\right) \quad (3.158)$$

L'effet de taille est ainsi lié à l'échelle dans ce cas précis pour l'acier SCMn2A. La structure géométrique est par conséquent de nature fractale parabolique (figure 3.78). Cette structure complexe n'apparaît pas toujours, et le plus souvent seul un comportement fractal apparaît dans les gammes d'échelle restreintes étudiées (par exemple l'acier SF 50 dans Carpinteri et al. [2009]). Mais ce comportement fractal parabolique pourrait indiquer la présence sous-jacente de la théorie constructale.

### 3.5.3 Approche constructale microscopique

La fractalité apparaît en mécanique à toutes les échelles, en effet, le glissement d'une dislocation est dépendante des défauts rencontrés dans la structure cristalline des matériaux et implique une dimension fractale dépendante de la résistance au passage de celle-ci

<sup>14</sup>. Les fonctions de Green permettent par exemple d'aboutir à une solution de la forme [Cole et al., 2011] :

$$\begin{aligned} \epsilon(x, t) = & \int_{x'=0}^L G(x, t|x', 0)F(x') dx' && \text{Condition initiale} \\ & + \int_{\tau=0}^t d\tau \int_{x'=0}^L g(x', \tau)G(x, t|x', \tau) dx' && \text{Génération d'énergie} \\ & + CL && \text{Condition aux limites (type Dirichlet, Neumann ...)} \end{aligned} \quad (3.157)$$

Avec  $\epsilon(x, t=0) = F(x)$  et  $g(x, t) = \rho_m v b$ .

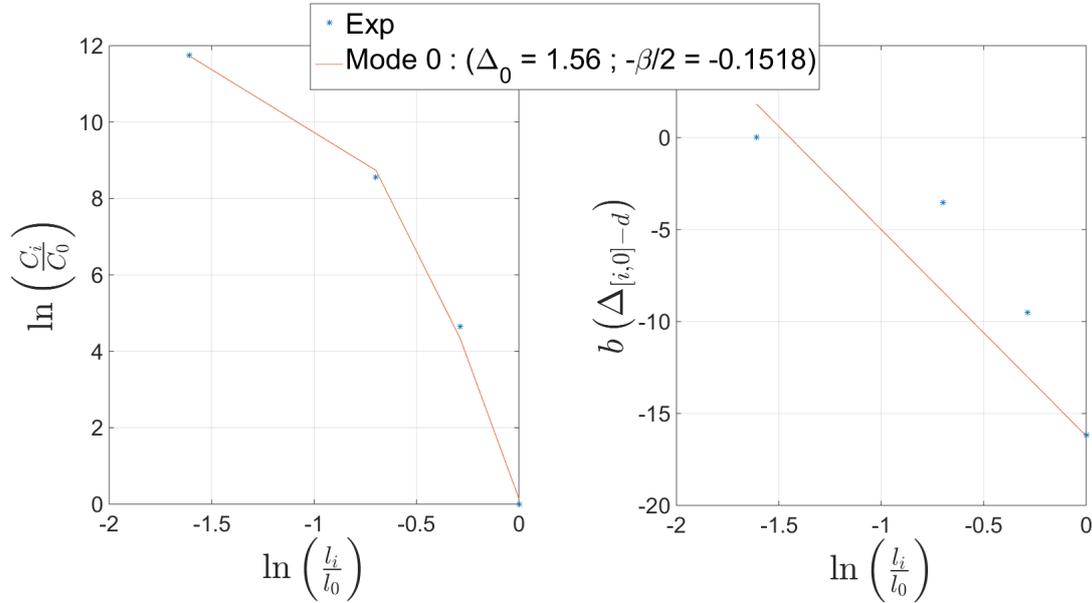


FIGURE 3.78 – Constante de Basquin en fonction de l'échelle montrant un comportement parabolique

[Sevillano et al., 1991]. De même, à plus grande échelle, les joints de grains présentent aussi des dimensions fractales augmentant lors de la déformation et diminuant après un recuit [Streitenberger et al., 1995]. La déformation d'autre part a été rapprochée du phénomène de percolation, phénomène critique impliquant une structure fractale [Chuang et Rudnicki, 2002]. L'approche constructale microscopique passe ici par le lien avec les géométries fractales paraboliques (car on est à la limite de la mécanique des milieux continus).

### Cellules de dislocation et fractals paraboliques

Des travaux sur les structures en cellules des dislocations font émerger un lien entre la dimension fractale obtenue de ces structures et la contrainte effective [Hähner et Zaiser, 1999, Zaiser et Hähner, 1999]. On observe également des fractions de volume de dislocation en loi de puissance. En analysant plus finement les résultats, on peut, à partir d'une minimisation sous contrainte ( $\Delta_0 \approx 1.85$ ) obtenir un comportement parabolique pour la structure en cellule des dislocations (voir figure 3.79).

À travers ce comportement fractal parabolique, on peut rapprocher de façon hypothétique pour l'instant la distribution des cellules de dislocation à la théorie constructale.

### Répartition aléatoire des défauts

On étudie maintenant la répartition des défauts dans un matériau. Les résultats avancés par Graça et al. [2008] utilisant un microscope à transmission donne une estimation de la densité de dislocation à environ  $5.10^9 \text{ cm}^{-2} = 5.10^{13} \text{ m}^{-2}$ . Cet ordre de grandeur de défaut peut être retrouvé simplement à partir d'un calcul simple et d'hypothèses concernant la répartition de défauts. En utilisant le formalisme fractal parabolique, le nombre de défauts est estimé par :

$$N_{[c,0]} = \left(\frac{l_0}{l_c}\right)^{\frac{\Delta_0 + \Delta_c}{2}} \quad (3.159)$$

Avec les hypothèses :

- $l_0$  ( $1\mu\text{m}$ )  $\Rightarrow \Delta_0 = 0$ , singularité à petite échelle
- $l_c$  ( $1\text{\AA}$ )  $\Rightarrow \Delta_c = 3$ , répartition homogène à grande échelle

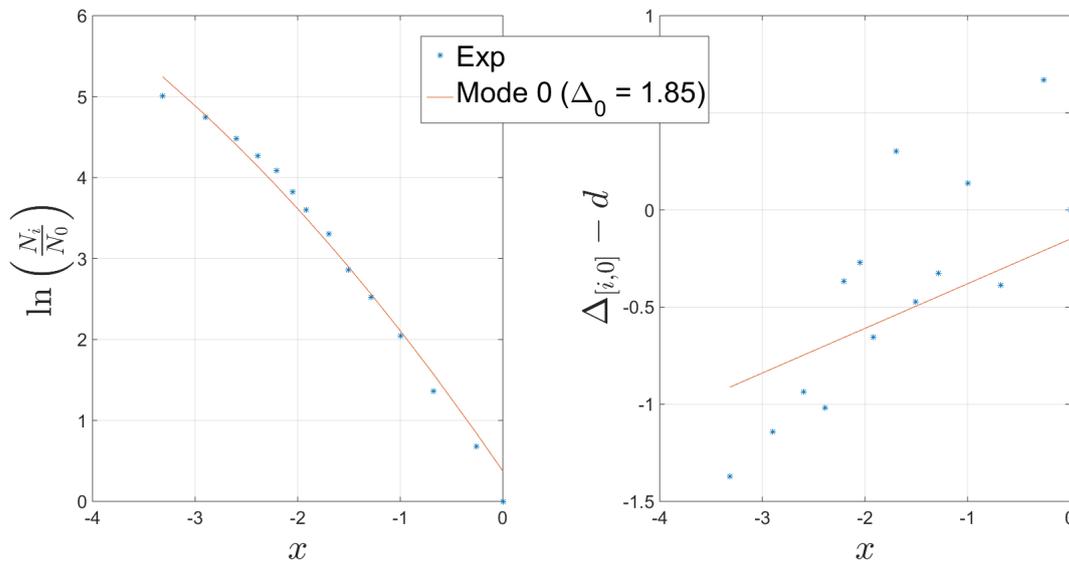


FIGURE 3.79 – Nombre de boules cumulées en fonction de l'échelle, un comportement parabolique apparaît avec  $\beta \approx 0.2298 \Rightarrow \Delta_c \approx 1.0884$  et une incertitude associée à l'échelle intégrale  $C_0 \approx -0.3733$

La densité de dislocation est donnée par :

$$dd = \frac{N_{[c,0]} l_c}{l_0^3} \approx 10^{14} m^{-2} \quad (3.160)$$

En étendant l'hypothèse d'un comportement parabolique, il est possible de majorer l'invariant d'échelle  $\beta$ . En effet, puisque l'on fait l'hypothèse que la structure fractale se déroule sur la gamme d'échelle  $[l_c; l_0] = [b; \sqrt{\rho}]$ , c'est à dire du module de Burgers jusqu'à une échelle étant la distance moyenne entre dislocations, puis en considérant que les dimensions sont au maximum la dimension topologique ( $\Delta_0 = 3$ ) et au minimum une singularité ( $\Delta_c = 0$ ), on obtient :

$$\beta = \frac{\Delta_c - \Delta_0}{\ln(l_c/l_0)} \Rightarrow \beta_{lim} \approx 0.3257 \quad (3.161)$$

Au premier abord cette approche semble à sa grande simplicité pouvoir être un bon modèle de répartition des défauts. Par contre, lorsqu'on mesure à partir d'une analyse en échelle la dimension, celle-ci apparaît quasi-constante.

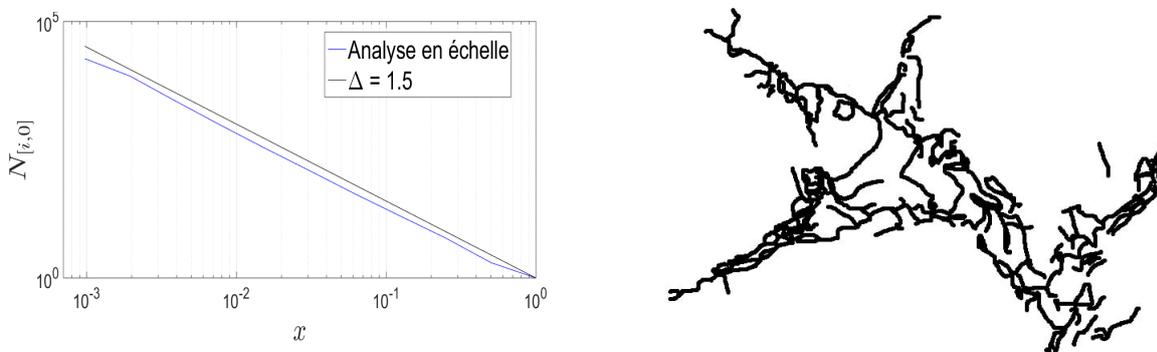


FIGURE 3.80 – Analyse en échelle des lignes de dislocations par la méthode du box-counting

On peut à partir de la densité de dislocation définir la longueur de dislocation absolue mesurée ( $Ld_c$ ) en utilisant le volume d'étude  $V = 2,25 \cdot 1,7 \cdot 0,157 \approx 0,6 \mu m^3$ . On obtient ainsi

le nombre de dislocations en considérant la longueur minimale étant de  $2,5 \cdot 10^{-10} m$  :

$$Ld_c = dd * V \approx 30 \mu m \quad N_{[c,0]} = \frac{Ld_c}{l_c} \approx 12 \cdot 10^4 \quad (3.162)$$

L'analyse en échelle effectuée sur la structure des dislocations (figure 3.80) permet la caractérisation fractale pure :

$$N_{[i,0]} = \left( \frac{l_0}{l_i} \right)^\Delta \quad \Delta = 1,5 \quad (3.163)$$

Un biais effectué sur l'analyse provient de l'estimation de  $N_{[c,0]}$  qui est en réalité effectué à  $l'_0 = \sqrt{(2,25^2 + 1,7^2)} \approx 2,82 \mu m$ , cependant ce biais reste faible puisque l'on a (en considérant que la loi d'échelle reste valable pour les échelles proches  $l_0$  et  $l'_0$ ), on a  $N_{[c,0]} \approx N_{[c,0']}$ .

Ici, les lignes de dislocations mesurées par microscopie TEM sont celles projetées sur un plan 2D, il est par conséquent nécessaire d'ajouter la troisième dimension à l'analyse  $\Delta_{3d} = \Delta + 1$ . La dimension ainsi obtenue bien que constante à travers les échelles, possède une valeur remarquable ( $\Delta_{3d} = 2,5$ ) que l'on retrouve pour des surfaces browniennes ou encore pour de l'agrégation limitée par la diffusion à trois degrés de liberté. C'est ce comportement qui est à l'origine même de l'effet de taille pour l'indentation. On voit donc dans ce cas que seule la fractalité pure apparaît mais pas la fractalité parabolique.

## 3.6 Conclusion

Dans un premier temps, une variété de géométries et de comportements fractals existant dans divers domaines allant de l'autosimilarité stricte à la dépendance en échelle ont été présentés. La dépendance en échelle est ainsi caractérisée à travers la diffusion d'une quantité, l'entropie d'échelle (ou encore "entopie").

Dans un deuxième temps, une étude du puits d'entropie d'échelle a été effectuée en régime stationnaire afin de pouvoir obtenir des modèles analytiques simples de comportements dépendants d'échelle. Des lois de puissance et des formes polynomiales du puits d'entropie d'échelle permettent d'obtenir des relations spécifiques sur la dimension fractale.

Pour obtenir la dimension fractale d'une courbe, on utilise ce que l'on appelle la méthode du compas (comptage de boîtes) qui permet d'obtenir des résultats à quelques pourcents près. Pour obtenir une dimension très précise (pour un fractal fini), il est possible d'utiliser la méthode des échelles de transition qui consiste à déterminer des échelles spécifiques associées à la géométrie (ou au phénomène) et permet d'obtenir de meilleurs résultats que la méthode classique.

Dans la continuité, on observe qu'une géométrie fractale déterministe finie n'est fractale que sur ses échelles de construction (et entropique entre celles-ci). Ainsi, par l'utilisation de l'équation de diffusion de l'entropie d'échelle, une étude de la structure géométrique de plusieurs fractals déterministes montre une log-périodicité dans l'espace des échelles. Cette log-périodicité est également observée à travers un diagramme DTF (departure to fractal). Ce diagramme représente la dimension et le puits d'entropie d'échelle en fonction de l'échelle. On peut en outre utiliser un facteur de déviation qui compare la dimension mesurée de la géométrie et le comportement théorique pour étudier la log-périodicité.

Par l'utilisation de l'équation de Moran, la création de géométries fractales déterministes dépendantes d'échelle est possible, ainsi, un Von Koch, un Von Koch quadratique et un Minkowski variants de façon parabolique ont été construits. Ces géométries peuvent être vérifiées par l'équation de diffusion d'entropie d'échelle pour déterminer leur invariant d'échelle.

L'application de ces outils en mécanique est possible, en effet, beaucoup de phénomènes mécaniques font apparaître fractalité voir même dépendance en échelle. On peut d'ailleurs considérer, comme dans l'espace réel, des lois de conservation dans l'espace des échelles. L'utilisation de l'entropie d'échelle nécessite une bonne connaissance du phénomène et notamment de sa zone active. Le formalisme géométrique de l'entropie d'échelle permet de regrouper plusieurs types de géométrie et permet son application à l'étude de paramètres matériaux, à l'analyse de faciès de rupture ou encore la fragmentation.

Des liens entre thermodynamique et géométrie existent et plus particulièrement avec la théorie constructale qui fait intervenir des fractals paraboliques. De ce fait, d'autres orientations énergétiques de la déformation ont été abordées du point de vue multi-échelle. En effet, diverses échelles importantes existent en mécanique notamment l'espace interatomique et l'espace moyen entre dislocations. Des liens avec la thermodynamique des processus irréversibles et la dissipation visqueuse sont possibles du point de vue physique. D'autres part des résultats du point de vue géométrique montrent qu'une approche constructale est possible en mécanique par l'intermédiaire de la présence de fractals paraboliques même si dans certains cas le fractal pur semble suffisant.

## Nomenclature - Analyse multiéchelle en mécanique

### Acronymes

DLA	Diffusion limited aggregation - Aggrégation limitée par la diffusion	–
DTF	Departure to fractal - Déviation à la fractalité	–
MFSL	Multifractal Scaling Law	–

### Autres

$\mathfrak{F}$	Entropie d'échelle liée à la fragmentation	–
$\mathfrak{F}_{carp}$	Entropie d'échelle calculée à partir du modèle de Carpinteri	–
$\mathfrak{F}'_{carp}$	Entropie d'échelle calculée à partir du modèle de Carpinteri puis renormalisée par $x_1$	–
$\mathfrak{F}_i$	Entropie d'échelle liée à la fragmentation à l'échelle $l_i$	–
$\mathcal{H}_\delta^s(F)$	Mesure s-dimensionnelle de Hausdorff de l'ensemble F	–
$\mathcal{L}(F)$	Mesure de Lebesgue de l'ensemble F	–
$\mathcal{L}_0$	Longueur de rupture à l'échelle $l_0$	m
$\mathcal{L}_i$	Longueur de rupture à l'échelle $l_i$	m
$\mathcal{S}_0$	Surface de rupture à l'échelle $l_0$	m <sup>2</sup>
$\mathcal{S}_i$	Surface de rupture à l'échelle $l_i$	m <sup>2</sup>

### Lettres Grecques

$\alpha$	Intensité des singularités	–
$\alpha_p$	Périodicité d'échelle	–
$\beta_G$	Invariant d'échelle constant lié à l'énergie de rupture	–
$\beta_k$	Invariant d'échelle unimodal lié à une gamme de déviation	–
$\beta_k^*$	Invariant d'échelle modal	–
$\beta_R$	Invariant d'échelle constant lié à la résistance mécanique	–
$\chi$	Diffusivité d'échelle	–
$\Delta$	Dimension fractale constante	–
$\delta$	Taille maximale des sous ensembles permettant de recouvrir un ensemble d'étude	–
$\Delta_{[i,0]}^{[\beta_k^*]}$	Dimension fractale associée à une déviation unique $\beta_k^*$	–
$\Delta_{[i,0]}^{[\beta_k, \beta_n]}$	Dimension fractale associée à une gamme de déviation $[\beta_k, \beta_n]$	–
$\Delta_{cG}$	Dimension fractale à l'échelle crête liée à l'énergie de rupture	–

### 3. ANALYSE MULTI-ÉCHELLE EN MÉCANIQUE

$\Delta_c, \Delta_{[c,0]}$	Dimension à l'échelle $l_c$ dans une géométrie d'échelle intégrale $l_0$	–
$\Delta_{cR}$	Dimension fractale à l'échelle crête liée à la résistance mécanique	–
$\Delta_d$	Dimension fractale associée à l'énergie dissipée	–
$\Delta_f$	Dimension fractale associée à la surface de contrainte	–
$\Delta_i, \Delta_{[i,0]}, \Delta_x$	Dimension à l'échelle $l_i$ dans une géométrie d'échelle intégrale $l_0$	–
$DL(l_i)$	Déformation à l'échelle $l_i$	–
$\Delta_0, \Delta_{[0,0]}$	Dimension à l'échelle intégrale $l_0$	–
$\Delta_{th}$	Dimension fractale théorique d'une géométrie	–
$\varepsilon$	Taille des boites ( $\sim$ échelle)	m
$E_i, E(l_i)$	Energie de déformation à l'échelle $l_i$	J
$F_i$	Force s'appliquant sur le matériau à l'échelle $l_i$	N
$F_{(1,2)}$	Chargements maximum sur les corps (1) et (2)	N
$\Gamma_i$	Rugosité surfacique à l'échelle $l_i$	–
$G(l_i)$	Entropie d'échelle liée à l'énergie de déformation	–
$\kappa$	Condition limite impliquant une irréversibilité par pertes énergétiques	$K^{-1} m^{-1}$
$\kappa^*$	Rapport entre $l_0$ et $l_{ch}$	–
$k$	Ordre du mode de déviation à la fractalité pure	–
$\kappa_c$	Coefficients estimés par minimisation	–
$\Lambda_i$	Rugosité linéaire à l'échelle $l_i$	–
$\mu$	Mesure mathématique d'un ensemble	–
$\mu(q, \varepsilon)$	Mesure généralisée (multifractal)	–
$N(l_i), N(l_i)'$	Nombre de recouvrements à l'échelle $l_i$ (le ' pour différencier les supports géométriques)	–
$\omega$	Puits d'entropie d'échelle	–
$\Phi_i$	Energie surfacique à l'échelle $l_i$	$J m^{-2}$
$\varphi_i$	Flux d'entropie d'échelle liée à la fragmentation à l'échelle $l_i$	–
$\rho$	Densité de dislocation	$m m^{-3}$
$R(l_i)$	Entropie d'échelle liée à la contrainte	–
$\rho_M$	Densité de dislocation mobiles	$m m^{-3}$
$\rho_m$	Masse volumique	$kg m^{-3}$
$\Sigma_i$	Fraction de volume à l'échelle $l_i$	–
$\sigma_i, \sigma(l_i)$	Contrainte s'appliquant sur une surface $S(l_i)$ à l'échelle $l_i$	$N m^{-2}$
$\sigma_u^*$	Résistance mécanique indépendante d'échelle	$N m^{-2+d_\sigma}$
$\sigma_u^{(1,2)}$	Résistance mécanique apparente dépendante d'échelle	$N m^{-2}$

### Lettres Romaines

$a$	Coefficient lié au rapport de similarité	–
A, B, C	Coefficients estimés par minimisation (loi de type sigmoïde)	–
$A_f$	Amplitude de dimension	–
$d$	Dimension euclidienne	–
$D_q$	Dimension généralisée (multifractal)	–
$dim_H(F)$	Dimension de Hausdorff de l'ensemble F	–
$dd$	Densité de dislocations	$m m^{-3}$
$d_E$	Incrément de dimension par rapport à la dimension euclidienne	–
$d_s$	Dimension de similarité	–
$d_\sigma$	Décrément de dimension par rapport à la dimension euclidienne	–
$E_d$	Energie dissipée dans la masse	$J kg^{-1}$
$E_u$	Energie de rupture	$J m^{-2}$
$f$	Spectre de singularité	–
FF	Distance servant à corriger le nombre de recouvrements	–
H	Exposant de Hurst	–
$I_q$	Information généralisée (multifractal)	–
$l_c$	Echelle crête	m
$l_{ch}$	Longueur caractéristique (modèle de Carpinteri)	m
$l_i$	Echelle d'observation	m
$l_i^*$	Echelle de construction	m
$L_0$	Longueur à l'échelle intégrale	m
$l_0$	Echelle intégrale	m
$L'$	Longueur projetée	m
$L_{True}$	Longueur à l'échelle $l_i$	m
$M_{[i,0]}$	Mesure d'une géométrie à l'échelle $l_i$ dans une géométrie d'échelle intégrale $l_0$	–
$M(< r)$	Fraction de masse	kg
$M_T$	Masse totale des fragments	kg
$N(\epsilon)$	Nombre de boîtes de taille $\epsilon$	–
$N_\delta(F)$	Plus petit nombre d'ensembles de diamètre au plus $\delta$	–
$Nb$	Nombre de recouvrements corrigés (non entier)	–
$N_{[i,0]}$	Nombre de recouvrements à l'échelle $l_i$ dans une géométrie d'échelle intégrale $l_0$	–

### 3. ANALYSE MULTI-ÉCHELLE EN MÉCANIQUE

$N_{[i,0]}^*$	Nombre de boules équivalents au nombre de boules classique	–
$N^m$	Nombre de recouvrements mesurés	–
$N_n$	Nombre de fragments à l'étape n	–
$N_{[0,0]}$	Nombre de recouvrements à l'échelle $l_0$ dans une géométrie d'échelle intégrale $l_0$ par définition égal à 1	–
$N_p$	Nombre de particules	–
$N^{th}$	Nombre de recouvrements théoriques	–
$P_i$	Mesure probabiliste d'un ensemble (multifractalité)	–
$P(< r)$	Probabilité de rencontrer un fragment	–
$p(r)$	Densité de probabilité associée à $P(< r)$	–
$r$	Taille du fragment	m
$R_\infty$	Résistance à la fragmentation à grande échelle (modèle de Carpinteri)	Pa
$R_L$	Rugosité linéaire	–
$S$	Entropie d'échelle	–
$s$	Entropie d'échelle associée à la rugosité linéaire	–
$S_i, S(l_i)$	Surface active à l'échelle $l_i$	m <sup>2</sup>
$s^*$	Entropie d'échelle associée à la rugosité surfacique	–
$V$	Volume total de particules	m <sup>3</sup>
$V_n$	Volume de fragments à l'étape n	m <sup>3</sup>
$W$	Pulsation d'échelle	–
$x$	Echelle logarithmique	–
$x_c$	Echelle logarithmique crête	–
$x_l$	Echelle logarithmique de renormalisation	–
$x'$	Echelle logarithmique renormalisée par $x_l$	–

---

## Références

- C.J. Allègre, J.L. Le Mouel, et A. Provost. Scaling rules in rock fracture and possible implications for earthquake prediction. *Nature*, 297(5861) :47 – 49, 1982. doi : 10.1038/297047a0. URL <http://dx.doi.org/10.1038/297047a0>. (p.150)
- F. Anselmet, Y. Gagne, E. J. Hopfinger, et R. A. Antonia. High-order velocity structure functions in turbulent shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 140 :63–89, 1984. doi : 10.1017/S0022112084000513. (p.105)
- H. Askes et E. C. Aifantis. Gradient elasticity in statics and dynamics : An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results. *International Journal of Solids and Structures*, 48(13) :1962 – 1990, 2011. ISSN 0020-7683. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.03.006>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768311001028>. (p.159)
- D. Avnir, O. Biham, D. Lidar, et O. Malcai. Is the geometry of nature fractal? *Science*, 279 (5347) :39–40, 1998. ISSN 0036-8075. doi : 10.1126/science.279.5347.39. URL <http://science.sciencemag.org/content/279/5347/39>. (p.156)
- Y. L. Bai, H. Y. Wang, M. F. Xia, et F. J. Ke. Statistical mesomechanics of solid, linking coupled multiple space and time scales. *Applied Mechanics Reviews*, 58 :372 – 388, 2005. ISSN 0003-6900. doi : 10.1115/1.2048654. URL <http://dx.doi.org/10.1115/1.2048654>. (p.157), (p.159)
- Y. L. Bai, H. Y. Wang, M. F. Xia, et F. J. Ke. “Deborah numbers”, coupling multiple space and time scales and governing damage evolution to failure, pages 1–10. Springer Netherlands, Dordrecht, 2007. ISBN 978-1-4020-5062-6. doi : 10.1007/978-1-4020-5062-6\_1. URL [http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4020-5062-6\\_1](http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4020-5062-6_1). (p.157)
- Y. L. Bai, H. Y. Wang, M. F. Xia, et F. J. Ke. Trans-scale mechanics : looking for the missing links between continuum and micro/nanosopic reality. *Acta Mechanica Sinica*, 24(2) :111–126, 2008. ISSN 1614-3116. doi : 10.1007/s10409-008-0147-0. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10409-008-0147-0>. (p.157), (p.158), (p.162)
- J. E. Bailey et P. B. Hirsch. The dislocation distribution, flow stress, and stored energy in cold-worked polycrystalline silver. *Philosophical Magazine*, 5(53) :485–497, 1960. doi : 10.1080/14786436008238300. URL <http://dx.doi.org/10.1080/14786436008238300>. (p.158)
- A. S. Balankin. Self-organization and dissipative structures in a deformable body. *Technical Physics Letters*, 16, 1990. (p.103)
- A. S. Balankin et F. J. Sandoval. Self-affine properties of fracture surfaces. *Revista Mexicana de Fisica*, 7, 1997. (p.105)
- K. Banerji et E.E. Underwood. Fracture profile analysis of heat treated 4340 steel\*. In S.R. VALLURI, D.M.R. TAPLIN, P. RAMA RAO, J.F. KNOTT, et R. DUBEY, editors, *Fracture 84*, pages 1371 – 1378. Pergamon, 1984. ISBN 978-1-4832-8440-8. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/B978-1-4832-8440-8.50125-3>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9781483284408501253>. (p.146)
- A.-L. Barabási, R. Bourbonnais, M. Jensen, J. Kertész, T. Vicsek, et Y.-C. Zhang. Multifractality of growing surfaces. *Phys. Rev. A*, 45 :R6951–R6954, May 1992. doi : 10.1103/PhysRevA.45.R6951. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.45.R6951>. (p.105)

- A.-L. Barabási et T. Vicsek. Multifractality of self-affine fractals. *Phys. Rev. A*, 44 :2730–2733, Aug 1991. doi : 10.1103/PhysRevA.44.2730. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.44.2730>. (p.105)
- A.-L. Barabási, P. Szépfalussy, et T. Vicsek. Multifractal spectra of multi-affine functions. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 178(1) :17 – 28, 1991. ISSN 0378-4371. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0378-4371\(91\)90072-K](http://dx.doi.org/10.1016/0378-4371(91)90072-K). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037843719190072K>. (p.105)
- G. I. Barenblatt. *Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics : Dimensional Analysis and Intermediate Asymptotics*. Cambridge University Press, Cambridge, 12 1996. ISBN 9781107050242. doi : 10.1017/CBO9781107050242. URL <https://www.cambridge.org/core/books/scaling-self-similarity-and-intermediate-asymptotics/3B56096C3B7E822794C81B51F7370B82>. (p.103)
- G. I. Barenblatt. *Flow, Deformation and Fracture : Lectures on Fluid Mechanics and the Mechanics of Deformable Solids for Mathematicians and Physicists*. Cambridge University Press, Cambridge, 12 2012. ISBN 9781139030014. doi : 10.1017/CBO9781139030014. URL <https://www.cambridge.org/core/books/flow-deformation-and-fracture/76251497EE09ACD754C917D6F0ED4152>. (p.103)
- F. Barlat, M.V. Glazov, J.C. Brem, et D.J. Lege. A simple model for dislocation behavior, strain and strain rate hardening evolution in deforming aluminum alloys. *International Journal of Plasticity*, 18(7) :919 – 939, 2002. ISSN 0749-6419. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0749-6419\(01\)00015-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0749-6419(01)00015-8). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0749641901000158>. (p.159)
- M. F. Barnsley. *Fractals everywhere*. Morgan Kaufmann, 2010. (p.101)
- Z. P. Bažant. Size effect in blunt fracture : Concrete, rock, metal. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 110 :518–538, 1984. doi : 10.1061/(ASCE)0733-9399(1984)110:4(518). (p.137)
- Z. P. Bažant. Scaling laws in mechanics of failure. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 119 :1828–1844, 1993. doi : 10.1061/(ASCE)0733-9399(1993)119:9(1828). (p.137)
- Z. P. Bažant. Scaling of quasi brittle fracture and the fractal question. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 117 :361 – 367, 10 1995. ISSN 0094-4289. doi : 10.1115/1.2804726. URL <http://dx.doi.org/10.1115/1.2804726>. (p.137)
- Z. P. Bažant. Size effect on structural strength : a review. *Archive of Applied Mechanics*, 69(9) : 703–725, 1999. ISSN 1432-0681. doi : 10.1007/s004190050252. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s004190050252>. (p.137)
- Z. P. Bažant et A. Yavari. Is the cause of size effect on structural strength fractal or energetic–statistical? *Engineering Fracture Mechanics*, 72(1) :1 – 31, 2005. ISSN 0013-7944. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2004.03.004>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794404000785>. (p.137)
- Z. P. Bažant et A. Yavari. Response to a. carpinteri, b. chiaia, p. cornetti and s. puzzi's comments on "is the cause of size effect on structural strength fractal or energetic-statistical?". *Engineering Fracture Mechanics*, 74(17) :2897 – 2910, 2007. ISSN 0013-7944. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2007.02.026>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794407002810>. (p.137)

- R. P. Behringer. Jamming in granular materials. *Comptes Rendus Physique*, 16(1) :10 – 25, 2015. ISSN 1631-0705. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.crhy.2015.02.001>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631070515000158>. Granular physics / Physique des milieux granulaires. **(p.157)**
- A. Bejan. *Shape and structure from engineering to nature*. Cambridge university press, 2000. ISBN 0 521 79049 2. **(p.161)**
- A. Bejan et S. Lorente. The constructal law of design and evolution in nature. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B : Biological Sciences*, 365(1545) : 1335–1347, 2010. ISSN 0962-8436. doi : 10.1098/rstb.2009.0302. URL <http://rstb.royalsocietypublishing.org/content/365/1545/1335>. **(p.156)**
- A. Bejan et S. Lorente. Constructal law of design and evolution : Physics, biology, technology, and society. *Journal of Applied Physics*, 113(15) :151301, 2013. doi : 10.1063/1.4798429. URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.4798429>. **(p.156)**
- R. Benzi et L. Biferale. Fully developed turbulence and the multifractal conjecture. *Journal of Statistical Physics*, 135(5) :977–990, 2009. ISSN 1572-9613. doi : 10.1007/s10955-009-9738-9. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10955-009-9738-9>. **(p.105)**
- M. Biggerelle et A. Iost. Statistical artefacts in the determination of the fractal dimension by the slit island method. *Engineering Fracture Mechanics*, 71(7–8) :1081 – 1105, 2004. ISSN 0013-7944. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0013-7944\(03\)00136-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00136-X). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001379440300136X>. **(p.141)**
- F. M. Borodich. Some applications of the fractal parametric-homogeneous functions. *Fractals*, 02(02) :311–314, 1994. doi : 10.1142/S0218348X94000399. URL <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218348X94000399>. **(p.104)**
- FM. Borodich. Some fractal models of fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(2) :239 – 259, 1997. ISSN 0022-5096. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0022-5096\(96\)00080-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-5096(96)00080-4). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509696000804>. **(p.104), (p.199)**
- FM. Borodich et A.B. Mosolov. Fractal roughness in contact problems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 56(5) :681 – 690, 1992. ISSN 0021-8928. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0021-8928\(92\)90054-C](http://dx.doi.org/10.1016/0021-8928(92)90054-C). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002189289290054C>. **(p.104)**
- E. Bouchaud, G. Lapasset, et J. Planès. Fractal dimension of fractured surfaces : A universal value? *EPL (Europhysics Letters)*, 13(1) :73, 1990. URL <http://stacks.iop.org/0295-5075/13/i=1/a=013>. **(p.141)**
- I. Brissaud. Un exemple de log-périodicité : la découverte des éléments chimiques. *Comptes Rendus Chimie*, 12(12) :1313 – 1318, 2009. ISSN 1631-0748. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.crci.2009.09.005>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631074809001544>. **(p.121)**
- Y. Canivet, D. Queiros-Condé, et L. Grosu. Fractal representation of exergy. *Entropy*, 18(2) : 56, 2016. ISSN 1099-4300. doi : 10.3390/e18020056. URL <http://www.mdpi.com/1099-4300/18/2/56>. **(p.156), (p.201)**

- A. Carpinteri. Fractal nature of material microstructure and size effects on apparent mechanical properties. *Mechanics of Materials*, 18(2) :89 – 101, 1994a. ISSN 0167-6636. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0167-6636\(94\)00008-5](http://dx.doi.org/10.1016/0167-6636(94)00008-5). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167663694000085>. Special Issue on Microstructure and Strain Localization in Geomaterials. **(p.132), (p.133), (p.135), (p.136), (p.200)**
- A. Carpinteri. Scaling laws and renormalization groups for strength and toughness of disordered materials. *International Journal of Solids and Structures*, 31(3) :291 – 302, 1994b. ISSN 0020-7683. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(94\)90107-4](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(94)90107-4). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768394901074>. **(p.137)**
- A. Carpinteri et B. Chiaia. Multifractal nature of concrete fracture surfaces and size effects on nominal fracture energy. *Materials and Structures*, 28(8) :435–443, 1995. ISSN 1871-6873. doi : 10.1007/BF02473162. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02473162>. **(p.137)**
- A. Carpinteri et B. Chiaia. Multifractal scaling laws in the breaking behaviour of disordered materials. *Chaos, Solitons and Fractals*, 8(2) :135 – 150, 1997. ISSN 0960-0779. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0960-0779\(96\)00088-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0960-0779(96)00088-4). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077996000884>. **(p.137), (p.140), (p.141), (p.201)**
- A. Carpinteri et N. Pugno. A fractal comminution approach to evaluate the drilling energy dissipation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26(5) :499–513, 2002a. ISSN 1096-9853. doi : 10.1002/nag.209. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nag.209>. **(p.150), (p.155)**
- A. Carpinteri et N. Pugno. One, two and three-dimensional universal laws for fragmentation due to impact and explosion. *Journal of Applied Mechanics*, 69 :854 – 856, 2002b. ISSN 0021-8936. doi : 10.1115/1.1488937. URL <http://dx.doi.org/10.1115/1.1488937>. **(p.150)**
- A. Carpinteri et N. Pugno. A multifractal comminution approach for drilling scaling laws. *Powder Technology*, 131(1) :93 – 98, 2003. ISSN 0032-5910. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0032-5910\(02\)00335-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0032-5910(02)00335-2). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0032591002003352>. **(p.151), (p.152), (p.153), (p.155)**
- A. Carpinteri, B. Chiaia, et G. Ferro. Size effects on nominal tensile strength of concrete structures : multifractality of material ligaments and dimensional transition from order to disorder. *Materials and Structures*, 28(6) :311, 1995. ISSN 1871-6873. doi : 10.1007/BF02473145. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02473145>. **(p.137), (p.139)**
- A. Carpinteri, B. Chiaia, P. Cornetti, et S. Puzzi. Comments on “is the cause of size effect on structural strength fractal or energetic-statistical?” by bažant andamp; yavari [engng fract mech 2005;72 :1–31]. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(17) :2892 – 2896, 2007. ISSN 0013-7944. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2007.02.006>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794407000823>. **(p.137)**
- An. Carpinteri, A. Spagnoli, et S. Vantadori. An approach to size effect in fatigue of metals using fractal theories. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 25 (7) :619–627, 2002. ISSN 1460-2695. doi : 10.1046/j.1460-2695.2002.00506.x. URL <http://dx.doi.org/10.1046/j.1460-2695.2002.00506.x>. **(p.162)**
- An. Carpinteri, A. Spagnoli, et S. Vantadori. Size effect in s–n curves : A fractal approach to finite-life fatigue strength. *International Journal of Fatigue*, 31(5) :927 – 933, 2009. ISSN 0142-1123. doi : <http://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2008.10.001>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142112308002351>. **(p.162)**

- H. J. Catrakis et P. E. Dimotakis. Scale distributions and fractal dimensions in turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :3795–3798, Oct 1996. doi : 10.1103/PhysRevLett.77.3795. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.3795>. (p.101), (p.199)
- H. J. Catrakis et P. E. Dimotakis. *Scale-Dependent Fractal Geometry*, pages 145–162. Springer US, Boston, MA, 1999. ISBN 978-1-4615-4697-9. doi : 10.1007/978-1-4615-4697-9\_5. URL [http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4615-4697-9\\_5](http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4615-4697-9_5). (p.106)
- E. Charkaluk, M. Bigerelle, et A. Iost. Fractals and fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 61(1) :119 – 139, 1998. ISSN 0013-7944. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0013-7944\(98\)00035-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0013-7944(98)00035-6). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794498000356>. (p.141)
- A. Chatterjee. Constructal hypothesis for mechanical deformation. *International Journal of Engineering and Technology*, 1(4) :352 – 355, 2012. ISSN 2227-524X. doi : <http://dx.doi.org/10.14419/ijet.v1i4.280>. URL <http://www.sciencepubco.com/index.php/ijet/article/view/280>. (p.157)
- Y. S. Chen, W. Choi, S. Papanikolaou, M. Bierbaum, et J. P. Sethna. Scaling theory of continuum dislocation dynamics in three dimensions : Self-organized fractal pattern formation. *International Journal of Plasticity*, 46 :94 – 129, 2013. ISSN 0749-6419. doi : <http://doi.org/10.1016/j.ijplas.2013.02.011>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0749641913000569>. Microstructure-based Models of Plastic Deformation. (p.157)
- T.-J. Chuang et J. W. Rudnicki, editors. *Solid mechanics and its applications*, volume 84. 2002. (p.163)
- K. D. Cole, A. Haji-Sheikh, J. V. Beck, et B. Litkouhi. *Heat conduction using green's functions*. CRC Press, 2 edition, 2011. ISBN 978-1-4398-1355-3. (p.162)
- M. Coster et J. L. Chermant. *Précis d'analyse d'image*. 1985. (p.144)
- B.L. Cox et S.Y. Wang. *Single fracture aperture patterns : Characterization by slit-island fractal analysis*. American Nuclear Society, Inc., La Grange Park, IL (United States), Dec 1993. (p.141)
- P. Davy, A. Sornette, et D. Sornette. Some consequences of a proposed fractal nature of continental faulting. *Nature*, 348 :56 – 58, 1990. doi : 10.1038/348056a0. URL <http://dx.doi.org/10.1038/348056a0>. (p.150)
- W. R. Dean et A. H. Wilson. A note on the theory of dislocation in metals. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 43(2) :205–212, 1947. doi : 10.1017/S0305004100023380. (p.158)
- F. C. del Angel. *Developments in Corrosion Protection*, chapter Fractal Effect of Corrosion on Mechanical Behavior of Unprotected Structural Steel. InTech, 2014. doi : 10.5772/57061. URL <http://www.intechopen.com/books/developments-in-corrosion-protection/fractal-effect-of-corrosion-on-mechanical-behavior-of-unprotected-structural-steel>. (p.103)
- P. E. Dimotakis et H. J. Catrakis. *Turbulence, Fractals, and Mixing*, pages 59–143. Springer US, Boston, MA, 1999. ISBN 978-1-4615-4697-9. doi : 10.1007/978-1-4615-4697-9\_4. URL [http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4615-4697-9\\_4](http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4615-4697-9_4). (p.106), (p.199)

- C. Dumouchel et S. Grout. Application of the scale entropy diffusion model to describe a liquid atomization process. *International Journal of Multiphase Flow*, 35(10) :952 – 962, 2009. ISSN 0301-9322. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2009.05.002>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932209000834>. **(p.106), (p.107), (p.199)**
- C. Dumouchel et S. Grout. On the scale diffusivity of a 2-d liquid atomization process analysis. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 390(10) :1811 – 1825, 2011. ISSN 0378-4371. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2011.01.011>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437111000744>. **(p.107)**
- C. Dumouchel, T. Ménard, et W. Aniszewski. Towards an interpretation of the scale diffusivity in liquid atomization process : An experimental approach. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 438 :612 – 624, 2015. ISSN 0378-4371. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2015.07.008>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437115006172>. **(p.107)**
- Y. Dupain, T. Kamae, et M. Mendés. Can one measure the temperature of a curve? *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 94(2) :155–163, 1986. ISSN 1432-0673. doi : 10.1007/BF00280431. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF00280431>. **(p.156)**
- D. Dutta, P. Barat, et S.N. Ganguly. Acoustic characterization of fractal crack surface. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 122(1) :155 – 160, 1998. ISSN 0167-2789. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0167-2789\(98\)00183-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0167-2789(98)00183-3). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278998001833>. **(p.104)**
- A. V. Dyskin. Self-similar pattern formation and continuous mechanics of self-similar systems. *Hydrology and Earth System Sciences*, 11(2) :665–676, 2007. doi : 10.5194/hess-11-665-2007. URL <http://www.hydrol-earth-syst-sci.net/11/665/2007/>. **(p.103)**
- J. W. Edington. The influence of strain rate on the mechanical properties and dislocation substructure in deformed copper single crystals. *Philosophical Magazine*, 19(162) : 1189–1206, 1969. doi : 10.1080/14786436908228644. URL <http://dx.doi.org/10.1080/14786436908228644>. **(p.158)**
- M.S. El Naschie. The theory of cantorion spacetime and high energy particle physics (an informal review). *Chaos, Solitons and Fractals*, 41(5) :2635 – 2646, 2009. ISSN 0960-0779. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2008.09.059>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077908004608>. **(p.103)**
- R. Englman, N. Rivier, et Z. Jaeger. Size-distribution in sudden breakage by the use of entropy maximization. *Journal of Applied Physics*, 63(9) :4766–4768, 1988. doi : <http://dx.doi.org/10.1063/1.340114>. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jap/63/9/10.1063/1.340114>. **(p.150)**
- K. Falconer. *Fractal geometry : Mathematical foundations and applications*. Wiley, 1990. **(p.101)**
- D. Fantazzini et P. Geraskin. Everything you always wanted to know about log periodic power laws for bubble modelling but were afraid to ask. *European journal of finance, forthcoming*, January 2011. URL <https://ssrn.com/abstract=1752115>. **(p.121)**
- C.E. Feltner et C. Laird. Cyclic stress-strain response of f.c.c. metals and alloys—i phenomenological experiments. *Acta Metallurgica*, 15(10) :1621 – 1632, 1967a. ISSN 0001-6160. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0001-6160\(67\)90137-X](http://dx.doi.org/10.1016/0001-6160(67)90137-X). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000161606790137X>. **(p.158)**

- C.E. Feltner et C. Laird. Cyclic stress-strain response of f.c.c. metals and alloys—ii dislocation structures and mechanisms. *Acta Metallurgica*, 15(10) :1633 – 1653, 1967b. ISSN 0001-6160. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0001-6160\(67\)90138-1](http://dx.doi.org/10.1016/0001-6160(67)90138-1). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001616067901381>. (p.158)
- M. Fernández-Martínez, J. L. G. Guirao, et M. A. Sánchez-Granero. Generalizing Moran's Theorem. *ArXiv e-prints*, January 2016. (p.126)
- M. Frame et J. Robertson. A generalized mandelbrot set and the role of critical points. *Computers and Graphics*, 16(1) :35 – 40, 1992. ISSN 0097-8493. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0097-8493\(92\)90068-7](http://dx.doi.org/10.1016/0097-8493(92)90068-7). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0097849392900687>. (p.100)
- U. Frisch et M. Vergassola. A prediction of the multifractal model : the intermediate dissipation range. *EPL (Europhysics Letters)*, 14(5) :439, 1991. URL <http://stacks.iop.org/0295-5075/14/i=5/a=009>. (p.105)
- G. Gary. Comportement des métaux à grande vitesse de déformation : modélisation. *Techniques de l'ingénieur Mise en forme des métaux : aspects rhéologiques et métallurgiques*, base documentaire : TIB476DUO.(ref. article : m3036), 2017. URL <http://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/materiaux-th11/mise-en-forme-des-metaux-aspects-rheologiques-et-metallurgiques-42476210/comportement-des-metaux-a-grande-vitesse-de-deformation-modelisation-m3036/>. (p.162)
- P. Gay, P.B. Hirsch, et A. Kelly. The estimation of dislocation densities in metals from x-ray data. *Acta Metallurgica*, 1(3) :315 – 319, 1953. ISSN 0001-6160. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0001-6160\(53\)90106-0](http://dx.doi.org/10.1016/0001-6160(53)90106-0). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001616053901060>. (p.158)
- Junfei Geng, D. Howell, E. Longhi, R. P. Behringer, G. Reydellet, L. Vanel, E. Clément, et S. Luding. Footprints in sand : The response of a granular material to local perturbations. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :035506, Jul 2001. doi : 10.1103/PhysRevLett.87.035506. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.035506>. (p.157)
- R.V. Gol'dshtein et A.B. Mosolov. Fractal cracks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 56(4) :563 – 571, 1992. ISSN 0021-8928. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0021-8928\(92\)90012-W](http://dx.doi.org/10.1016/0021-8928(92)90012-W). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002189289290012W>. (p.104)
- S. Graça, R. Colaço, P.A. Carvalho, et R. Vilar. Determination of dislocation density from hardness measurements in metals. *Materials Letters*, 62(23) :3812 – 3814, 2008. ISSN 0167-577X. doi : <http://doi.org/10.1016/j.matlet.2008.04.072>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167577X08004291>. (p.163)
- A. A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 221 (582-593) :163–198, 1921. ISSN 0264-3952. doi : 10.1098/rsta.1921.0006. URL <http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/221/582-593/163>. (p.131)
- I. Groma et B. Bakó. Linking different scales : discrete, self-consistent field, and stochastic dislocation dynamics. *Materials Science and Engineering : A*, 309–310 :356 – 359, 2001. ISSN 0921-5093. doi : [http://doi.org/10.1016/S0921-5093\(00\)01631-2](http://doi.org/10.1016/S0921-5093(00)01631-2). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921509300016312>. Dislocations 2000 : An International Conference on the Fundamentals of Plastic Deformation. (p.157)

- P. Hähner. On the foundations of stochastic dislocation dynamics. *Applied Physics A*, 62 (5) :473–481, 1996. ISSN 1432-0630. doi : 10.1007/BF01567120. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01567120>. (p.158)
- P. Hähner, K. Bay, et M. Zaiser. Fractal dislocation patterning during plastic deformation. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :2470–2473, Sep 1998. doi : 10.1103/PhysRevLett.81.2470. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.2470>. (p.159)
- W. Haiying, B. Yilong, X. Mengfen, et K.Fujiu. Spallation analysis with a closed trans-scale formulation of damage evolution. *Acta Mechanica Sinica*, 20(4) :400–407, 2004. ISSN 1614-3116. doi : 10.1007/BF02489378. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02489378>. (p.157)
- G. Hernández et H. J. Herrmann. Discrete models for two- and three-dimensional fragmentation. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 215(4) :420 – 430, 1995. ISSN 0378-4371. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0378-4371\(95\)00063-D](http://dx.doi.org/10.1016/0378-4371(95)00063-D). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037843719500063D>. (p.150)
- H. J. Herrmann, F. K. Wittel, et E. Kun. Fragmentation. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 371(1) :59 – 66, 2006. ISSN 0378-4371. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2006.04.087>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437106005097>. {LAWNP} 2005IX Latin American Workshop on Nonlinear Phenomena. (p.150)
- P. Hähner et M. Zaiser. Dislocation dynamics and work hardening of fractal dislocation cell structures. *Materials Science and Engineering : A*, 272(2) :443 – 454, 1999. ISSN 0921-5093. doi : [http://doi.org/10.1016/S0921-5093\(99\)00527-4](http://doi.org/10.1016/S0921-5093(99)00527-4). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921509399005274>. (p.163)
- H.J. Herrmann. On the thermodynamics of granular media. *J. Phys. II France*, 3(4) :427–433, 1993. doi : 10.1051/jp2:1993141. URL <https://doi.org/10.1051/jp2:1993141>. (p.157)
- M.J. Hordon et B.L. Averbach. X-ray measurements of dislocation density in deformed copper and aluminum single crystals. *Acta Metallurgica*, 9(3) :237 – 246, 1961. ISSN 0001-6160. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0001-6160\(61\)90073-6](http://dx.doi.org/10.1016/0001-6160(61)90073-6). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001616061900736>. (p.158)
- B.R. Hunt. The Hausdorff dimension of graphs of Weierstrass functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 126(3) :791–800, 1998. ISSN 0002-9939. doi : 10.1090/S0002-9939-98-04387-1. URL <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-98-04387-1>. (p.100)
- A. Imre. Problems of measuring the fractal dimension by the slit-island method. *Scripta Metallurgica et Materialia*, 27(12) :1713–1716, 12 1992. ISSN 0956-716X. doi : 10.1016/0956-716X(92)90007-2. (p.141)
- V. Jeanclaude et C. Fressengeas. Propagating pattern selection in the portevin-le chatelier effect. *Scripta Metallurgica et Materialia*, 29(9) :1177 – 1182, 1993. ISSN 0956-716X. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0956-716X\(93\)90105-2](http://dx.doi.org/10.1016/0956-716X(93)90105-2). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0956716X93901052>. (p.161)
- W. Johnson, G.L. Baraya, et R.A.C. Slater. On heat lines or lines of thermal discontinuity. *International Journal of Mechanical Sciences*, 6(6) :409 – IN4, 1964. ISSN 0020-7403. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7403\(64\)80001-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7403(64)80001-1). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740364800011>. (p.157), (p.161), (p.202)

- J. L. Kaplan, J. Mallet-Paret, et J. A. Yorke. The lyapunov dimension of a nowhere differentiable attracting torus. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 4(2) :261–281, 006 1984. doi : 10.1017/S0143385700002431. URL <https://www.cambridge.org/core/article/div-class-title-lyapunov-dimension-of-a-nowhere-differentiable-attracting-torus-div/97D75CD2E163BEF02B0E4A1F59D22FB5>. **(p.100)**
- B. Klinkenberg. A review of methods used to determine the fractal dimension of linear features. *Mathematical Geology*, 26(1) :23–46, 1994. ISSN 1573-8868. doi : 10.1007/BF02065874. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02065874>. **(p.115)**
- J. S. Koehler. On the dislocation theory of plastic deformation. *Phys. Rev.*, 60 :397–410, Sep 1941. doi : 10.1103/PhysRev.60.397. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.60.397>. **(p.158)**
- J. S. Koehler. On dislocation theory and the physical changes produced by plastic deformation. *American Journal of Physics*, 10(6) :275–285, 1942. doi : 10.1119/1.1990401. URL <http://dx.doi.org/10.1119/1.1990401>. **(p.158)**
- A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 434(1890) :9–13, 1991. ISSN 0962-8444. doi : 10.1098/rspa.1991.0075. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/434/1890/9>. **(p.131)**
- F. Kun et H. J. Herrmann. A study of fragmentation processes using a discrete element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 138(1) :3 – 18, 1996. ISSN 0045-7825. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01012-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01012-2). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782596010122>. **(p.150)**
- J. Laherrère. Distributions de type 'fractal parabolique' dans la nature. *Comptes Rendus Académies des Sciences, série Ila : Science de la terre et des planètes*, pages 535–541, 1996. **(p.107)**
- J.S. Langer, E. Bouchbinder, et T. Lookman. Thermodynamic theory of dislocation-mediated plasticity. *Acta Materialia*, 58(10) :3718 – 3732, 2010. ISSN 1359-6454. doi : <http://doi.org/10.1016/j.actamat.2010.03.009>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359645410001540>. **(p.157)**
- Y. Lanoiselee, L. Nivanen, A. El Kaabouchi, et Q. A. Wang. Composition of Fractals. *ArXiv e-prints*, July 2014. **(p.126)**
- A. Le Méhauté, R. Nigmatullin, et L. Nivanen. *Flèche du temps et géométrie fractale*. Hermes Science Publications, 1998. **(p.156)**
- A. Le Méhauté, A. El Kaabouchi, et L. Nivanen. Riemann's conjecture and a fractional derivative. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(5) :1610 – 1613, 2010. ISSN 0898-1221. doi : <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.08.022>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122109005367>. Fractional Differentiation and Its Applications. **(p.103)**
- L. Le Moyne. Atomisation, pulvérisation et aérosols théorie et modèles. *Techniques de l'ingénieur États de la matière*, base documentaire : TIB109DUO.(ref. article : af3621), 2010. URL <https://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/sciences-fondamentales-th8/etats-de-la-matiere-42109210/atomisation-pulverisation-et-aerosols-af3621/>. fre. **(p.107)**

- L. Le Moynes, V. Freire, et D. Queiros-Condé. Fractal dimension and scale entropy applications in a spray. *Chaos, Solitons and Fractals*, 38(3) :696 – 704, 2008. ISSN 0960-0779. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2007.01.004>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077907000227>. (p.107)
- B.-L. Li. *Fractal Dimensions*. John Wiley and Sons, Ltd, 2014. ISBN 9781118445112. doi : 10.1002/9781118445112.stat07471. URL <http://dx.doi.org/10.1002/9781118445112.stat07471>. (p.106)
- J.D. Livingston. The density and distribution of dislocations in deformed copper crystals. *Acta Metallurgica*, 10(3) :229 – 239, 1962. ISSN 0001-6160. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0001-6160\(62\)90120-7](http://dx.doi.org/10.1016/0001-6160(62)90120-7). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001616062901207>. (p.158)
- R. Lopes et N. Betrouni. Fractal and multifractal analysis : A review. *Medical Image Analysis*, 13(4) :634 – 649, 2009. ISSN 1361-8415. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.media.2009.05.003>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1361841509000395>. (p.101)
- S. Lorente et A. Bejan. Svelteness, freedom to morph, and constructal multi-scale flow structures. *International Journal of Thermal Sciences*, 44(12) :1123 – 1130, 2005. ISSN 1290-0729. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2005.08.011>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1290072905002097>. A tribute to Bernard Spinner (1940-2004). (p.156)
- S. Lorente, W. Wechsato, et A. Bejan. Tree-shaped flow structures designed by minimizing path lengths. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(16) :3299 – 3312, 2002. ISSN 0017-9310. doi : [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(02\)00051-0](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(02)00051-0). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931002000510>. (p.156)
- S. Lorente, J. Lee, et A. Bejan. The flow of stresses concept : The analogy between mechanical strength and heat convection. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53(15-16) :2963 – 2968, 2010. ISSN 0017-9310. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.03.038>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931010001791>. (p.157)
- T. C. Lubensky, S. Ramaswamy, et J. Toner. Hydrodynamics of icosahedral quasicrystals. *Phys. Rev. B*, 32 :7444–7452, Dec 1985. doi : 10.1103/PhysRevB.32.7444. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.32.7444>. (p.157)
- L. Luo et D. Tondeur. Optimal distribution of viscous dissipation in a multi-scale branched fluid distributor. *International Journal of Thermal Sciences*, 44(12) :1131 – 1141, 2005. ISSN 1290-0729. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2005.08.012>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1290072905002139>. (p.157), (p.161), (p.202)
- A. Majumdar et C.L. Tien. Fractal characterization and simulation of rough surfaces. *Wear*, 136(2) :313 – 327, 1990. ISSN 0043-1648. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0043-1648\(90\)90154-3](http://dx.doi.org/10.1016/0043-1648(90)90154-3). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0043164890901543>. (p.104)
- B. B. Mandelbrot. How long is the coast of Britain? statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 156 :636–638, 1967. (p.100)
- B. B. Mandelbrot. *Les objets fractals - Forme, hasard dimension*. Flammarion, 1975. (p.100)

- B. B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. Freeman, 1982. (p.101), (p.131)
- B. B. Mandelbrot. Self-affine fractals and fractal dimension. *Physica Scripta*, 32(4) :257, 1985. URL <http://stacks.iop.org/1402-4896/32/i=4/a=001>. (p.104)
- B. B. Mandelbrot. *Fractales, hasard et finance*. Flammarion, 1997. (p.101)
- B. B. Mandelbrot. Fractal analysis and synthesis of fracture surface roughness and related forms of complexity and disorder. *International Journal of Fracture*, 138(1) :13–17, 2006. ISSN 1573-2673. doi : 10.1007/s10704-006-0037-z. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10704-006-0037-z>. (p.141)
- B. B. Mandelbrot, D. E. Passoja, et A. J. Paullay. Fractal character of fracture surfaces of metals. *Nature*, 308(5861) :721 – 722, 1984. doi : 10.1038/308721a0. URL <http://dx.doi.org/10.1038/308721a0>. (p.141)
- P. Mazurek et D. Oszutowska-Mazurek. From the slit-island method to the ising model : Analysis of irregular grayscale objects. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 24 :49–63, 03 2014. ISSN 1641-876X. doi : 10.2478/amcs-2014-0004. (p.141)
- L. V. Meisel. Perimeter-area analysis, the slit-island method and the fractal characterization of metallic fracture surfaces. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 24(6) :942, 1991. URL <http://stacks.iop.org/0022-3727/24/i=6/a=020>. (p.141)
- M. Michelitsch et O. E. Rössler. The “burning ship” and its quasi-julia sets. *Computers and Graphics*, 16(4) :435 – 438, 1992. ISSN 0097-8493. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0097-8493\(92\)90032-Q](http://dx.doi.org/10.1016/0097-8493(92)90032-Q). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/009784939290032Q>. (p.100)
- T. M. Michelitsch, G. A. Maugin, F. C. G. A. Nicolleau, A. F. Nowakowski, et S. Derogar. Dispersion relations and wave operators in self-similar quasicontinuous linear chains. *Phys. Rev. E*, 80 :011135, Jul 2009. doi : 10.1103/PhysRevE.80.011135. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.80.011135>. (p.103)
- A. B. Mosolov. Mechanics of fractal cracks in brittle solids. *EPL (Europhysics Letters)*, 24(8) : 673, 1993. URL <http://stacks.iop.org/0295-5075/24/i=8/a=009>. (p.104)
- F. R. N. Nabarro et M. S. Duesbery, editors. *Dislocation in solids*, volume 11. Elsevier Science B. V., 2002. ISBN 0-444-85269-7. (p.158)
- F. R. N. Nabarro et J. P. Hirth, editors. *Dislocation in solids*, volume 13. Elsevier Science B. V., 2007. ISBN 0-444-51888-6. (p.161)
- V. O. Nams. Improving accuracy and precision in estimating fractal dimension of animal movement paths. *Acta Biotheoretica*, 54(1) :1–11, 2006. ISSN 1572-8358. doi : 10.1007/s10441-006-5954-8. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10441-006-5954-8>. (p.116)
- L. Nottale. Scale relativity and fractal space-time : Theory and applications. *Foundations of Science*, 15(2) :101–152, 2010. (p.101), (p.137), (p.199)
- L. Nottale, J. Chaline, et P. Grou. *Les arbres de l'évolution*. Hachette Littératures, 2000. ISBN 978-2012355521. (p.121)
- G. Ouillon et D. Sornette. Unbiased multifractal analysis : Application to fault patterns. *Geophysical Research Letters*, 23(23) :3409–3412, 1996. ISSN 1944-8007. doi : 10.1029/96GL02379. URL <http://dx.doi.org/10.1029/96GL02379>. (p.105)

- G. Ouillon, C. Castaing, et D. Sornette. Hierarchical geometry of faulting. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 101(B3) :5477–5487, 1996. ISSN 2156-2202. doi : 10.1029/95JB02242. URL <http://dx.doi.org/10.1029/95JB02242>. **(p.105)**
- C.S. Pande, L.E. Richards, N. Louat, B.D. Dempsey, et A.J. Schwoeble. Fractal characterization of fractured surfaces. *Acta Metallurgica*, 35(7) :1633 – 1637, 1987. ISSN 0001-6160. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0001-6160\(87\)90110-6](http://dx.doi.org/10.1016/0001-6160(87)90110-6). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001616087901106>. **(p.141), (p.142), (p.144)**
- P.C. Perdikaris et A. Romeo. Effect of size and compressive strength on the fracture energy of plain concrete. In Z. P. Bazant, editor, *FRAMCOS*, pages 550–555, 1992. **(p.140), (p.141), (p.201)**
- R. E. Peterson. Model testing as applied to strength of materials. *Journal of applied mechanics*, (1) :79–85, 1933. **(p.131)**
- A. Pocheau et D. Queiros-Condé. Scale covariance of the wrinkling law of turbulent propagating interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 76 :3352–3355, Apr 1996. doi : 10.1103/PhysRevLett.76.3352. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.76.3352>. **(p.103)**
- D. Queiros-Condé. Géométrie de l'intermittence en turbulence développée. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, 327(14) :1385 – 1390, 1999. ISSN 1287-4620. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S1287-4620\(00\)87509-2](http://dx.doi.org/10.1016/S1287-4620(00)87509-2). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1287462000875092>. **(p.106)**
- D. Queiros-Condé. Principe de conservation du flux d'entropie pour l'évolution des espèces. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIIA - Earth and Planetary Science*, 330(6) :445 – 449, 2000a. ISSN 1251-8050. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S1251-8050\(00\)00153-1](http://dx.doi.org/10.1016/S1251-8050(00)00153-1). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1251805000001531>. **(p.107), (p.121)**
- D. Queiros-Condé. Le modèle des peaux entropiques en turbulence développée. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics*, 328(7) :541 – 546, 2000b. ISSN 1620-7742. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S1620-7742\(00\)00024-6](http://dx.doi.org/10.1016/S1620-7742(00)00024-6). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1620774200000246>. **(p.106)**
- D. Queiros-Condé. Internal symmetry in the multifractal spectrum of fully developed turbulence. *Phys. Rev. E*, 64 :015301, Jun 2001. doi : 10.1103/PhysRevE.64.015301. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.64.015301>. **(p.106)**
- D. Queiros-Condé. The turbulent structure of sfumato within mona lisa. *Leonardo*, 37 :223 – 228, 2004. ISSN 0024-094X. doi : 10.1162/0024094041139490. URL <http://dx.doi.org/10.1162/0024094041139490>. **(p.101)**
- D. Queiros-Condé. Parabolic drift towards homogeneity in large-scale structures of galaxies. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 387(14) :3641 – 3646, 2008. ISSN 0378-4371. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2008.02.005>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437108001623>. **(p.107)**
- D. Queiros-Condé et M. Feidt. Entropic-skins geometry applied to dynamics of turbulent reactive fronts. *International Journal of Thermodynamics*, 11(1) :11–19, 2008a. **(p.107), (p.122)**

- D. Queiros-Condé et M. Feidt. Exergie et thermodynamique en dimension finie, une approche géométrique par la théorie des peaux entropiques. In *Journée d'Exergie*. ENSTA, 2008b. (p.156)
- D. Queiros-Condé, J. Bonjour, W. Wechsato, et A. Bejan. Parabolic scaling of tree-shaped constructal network. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 384(2) :719 – 724, 2007. ISSN 0378-4371. (p.156), (p.157), (p.201)
- D. Queiros-Condé, F. Foucher, C. Mounaïm-Rousselle, H. Kassem, et M. Feidt. A scale-entropy diffusion equation to describe the multi-scale features of turbulent flames near a wall. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 387(27) :6712 – 6724, 2008. ISSN 0378-4371. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2008.09.018>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437108007899>. (p.107)
- D. Queiros-Condé, J. Carlier, L. Grosu, et M. Stanislas. Entropic-skins geometry to describe wall turbulence intermittency. *Entropy*, 17(4) :2198, 2015a. (p.107)
- D. Queiros-Condé, J. Chaline, et J. Dubois. *Le monde des fractales : la nature trans-échelles*. Ellipses, 2015b. (p.101), (p.135)
- D. Queiros-Condé et M. Feidt, editors. *Constructal Theory And Multi-Scale Geometries - Theory And Applications In Energetics, Chemical Engineering And Materials*. Presses de l'Ensta, 2010. (p.107), (p.156)
- D. Queiros-Condé. A diffusion equation to describe scale-and time-dependent dimensions of turbulent interfaces. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 459(2040) :3043–3059, 2003. (p.106), (p.107)
- D. Queiros-Condé. Entropy skins geometry applied to dynamics of turbulent reactive fronts. *International Journal of Thermodynamics*, 11(1) :11–19, 2008. (p.107)
- L. F. Richardson. *The problem of contiguity : An appendix to Statistics of Deadly Quarrels*, volume 6, pages 140–187. Ann Arbor, Michigan, 1961. (p.115)
- D. Rochon. A generalized mandelbrot set for bicomplex numbers. *Fractals*, 08(04) :355–368, 2000. doi : [10.1142/S0218348X0000041X](https://doi.org/10.1142/S0218348X0000041X). URL <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218348X0000041X>. (p.100)
- C. Secrieru. *Application de l'analyse fractale dans le cas de ruptures dynamiques*. PhD thesis, Ecole nationale supérieure d'arts et métiers, 2009. (p.141)
- S. Serajzadeh. A mathematical model for evolution of flow stress during hot deformation. *Materials Letters*, 59(26) :3319 – 3324, 2005. ISSN 0167-577X. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.matlet.2005.05.065>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167577X05005501>. (p.157)
- J.G. Sevillano, E. Bouchaud, et L.P. Kubin. The fractal nature of gliding dislocation lines. *Scripta Metallurgica et Materialia*, 25(2) :355 – 360, 1991. ISSN 0956-716X. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0956-716X\(91\)90192-4](http://dx.doi.org/10.1016/0956-716X(91)90192-4). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0956716X91901924>. (p.163)
- C.B. Silbermann, A.V. Shutov, et J. Ihlemann. Modeling the evolution of dislocation populations under non-proportional loading. *International Journal of Plasticity*, 55 :58 – 79, 2014. ISSN 0749-6419. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijplas.2013.09.007>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0749641913001873>. (p.157)

- D. Sornette. Discrete-scale invariance and complex dimensions. *Physics Reports*, 297(5) :239 – 270, 1998. ISSN 0370-1573. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573\(97\)00076-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573(97)00076-8). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157397000768>. (p.106)
- D. Sornette et A. Johansen. Significance of log-periodic precursors to financial crashes. *eprint arXiv :cond-mat/0106520*, June 2001. (p.121)
- S. Stach et J. Cybo. Multifractal description of fracture morphology : theoretical basis. *Materials Characterization*, 51(1) :79 – 86, 2003. ISSN 1044-5803. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.matchar.2003.10.002>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1044580303001906>. (p.105), (p.141)
- S. Stach, J. Cybo, et J. Chmiela. Fracture surface — fractal or multifractal? *Materials Characterization*, 46(2–3) :163 – 167, 2001. ISSN 1044-5803. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S1044-5803\(01\)00119-X](http://dx.doi.org/10.1016/S1044-5803(01)00119-X). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S104458030100119X>. {STERMAT} 2000 : Stereology and Image Analysis in Materials Science. (p.141)
- D. Stauffer et D. Sornette. Log-periodic oscillations for biased diffusion on random lattice. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 252(3–4) :271 – 277, 1998. ISSN 0378-4371. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4371\(97\)00680-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4371(97)00680-8). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437197006808>. (p.106)
- S. J. Steacy et C. G. Sammis. An automaton for fractal patterns of fragmentation. *Nature*, 353 : 250 – 252, 1991. doi : 10.1038/353250a0. URL <http://dx.doi.org/10.1038/353250a0>. (p.150)
- P. Streitenberger, D. Förster, G. Kolbe, et P. Veit. The fractal geometry of grain boundaries in deformed and recovered zinc. *Scripta Metallurgica et Materialia*, 33(4) :541 – 546, 1995. ISSN 0956-716X. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0956-716X\(95\)00265-W](http://dx.doi.org/10.1016/0956-716X(95)00265-W). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0956716X9500265W>. (p.163)
- B. Svendsen. Continuum thermodynamic models for crystal plasticity including the effects of geometrically-necessary dislocations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50(6) :1297 – 1329, 2002. ISSN 0022-5096. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0022-5096\(01\)00124-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-5096(01)00124-7). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509601001247>. (p.157)
- C. Tang et P. Bak. Critical exponents and scaling relations for self-organized critical phenomena. *Phys. Rev. Lett.*, 60 :2347–2350, Jun 1988. doi : 10.1103/PhysRevLett.60.2347. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.60.2347>. (p.156)
- S. Tescari, N. Mazet, et P. Neveu. Constructal theory through thermodynamics of irreversible processes framework. *Energy Conversion and Management*, 52(10) :3176 – 3188, 2011. ISSN 0196-8904. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.enconman.2011.04.025>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0196890411001567>. (p.159), (p.160), (p.161)
- F. Thiesset, G. Maurice, F. Halter, N. Mazellier, C. Chauveau, et I. Gökalp. Geometrical properties of turbulent premixed flames and other corrugated interfaces. *Phys. Rev. E*, 93 :013116, Jan 2016. doi : 10.1103/PhysRevE.93.013116. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.93.013116>. (p.123)

- T.R. Thomas, B.-G. Rosén, et N. Amini. Fractal characterisation of the anisotropy of rough surfaces. *Wear*, 232(1) :41 – 50, 1999. ISSN 0043-1648. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0043-1648\(99\)00128-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0043-1648(99)00128-3). URL [//www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0043164899001283](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0043164899001283). **(p.106)**
- D. Tondeur, Y. Fan, et L. Luo. Constructal optimization of arborescent structures with flow singularities. *Chemical Engineering Science*, 64(18) :3968 – 3982, 2009. ISSN 0009-2509. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ces.2009.05.052>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0009250909003686>. **(p.157), (p.161)**
- C. Tricot. *Curves and fractal dimension*. Springer-Verlag, 1995. **(p.101), (p.126)**
- C. Tricot. *Géométrie et mesures fractales : une introduction*. Ellipses, 2008. **(p.101)**
- D. L. Turcotte. Fractals in geology and geophysics. *pure and applied geophysics*, 131(1) :171–196, 1989. ISSN 1420-9136. doi : 10.1007/BF00874486. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF00874486>. **(p.150), (p.151)**
- D. L. Turcotte. *Fractals and chaos in geology and geophysics*. 1997. ISBN 9780521567336. **(p.150)**
- E. E. Underwood et K. Banerji. Fractals in fractography. *Materials Science and Engineering*, 80(1) :1 – 14, 1986. ISSN 0025-5416. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0025-5416\(86\)90297-1](http://dx.doi.org/10.1016/0025-5416(86)90297-1). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0025541686902971>. **(p.146)**
- R. F. Voss. *Random Fractals : characterization and measurement*, pages 1–11. Springer US, Boston, MA, 1991. ISBN 978-1-4757-1402-9. doi : 10.1007/978-1-4757-1402-9\_1. URL [http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-1402-9\\_1](http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-1402-9_1). **(p.104)**
- W. E et Z. Huang. A Dynamic Atomistic-Continuum Method for the Simulation of Crystalline Materials. *Journal of Computational Physics*, 182 :234–261, October 2002. doi : 10.1006/jcph.2002.7164. **(p.157)**
- F. Wan, G.-X. Li, J.-Z. Gong, et B.-Z. Wu. An improved algorithm for the normal contact stiffness and damping of a mechanical joint surface. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B : Journal of Engineering Manufacture*, 228(5) :751–765, 2014. doi : 10.1177/0954405413506587. URL <http://dx.doi.org/10.1177/0954405413506587>. **(p.106)**
- C. Wang. *Microplasticité et dissipation en fatigue à très grand nombre de cycles du fer et de l'acier*. PhD thesis, UPOND, 2013. **(p.158), (p.201)**
- J. A. D. Wattis. An introduction to mathematical models of coagulation–fragmentation processes : A discrete deterministic mean-field approach. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 222(1–2) :1 – 20, 2006. ISSN 0167-2789. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.physd.2006.07.024>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278906003022>. Coagulation-fragmentation Processes. **(p.157)**
- W. Weibull. *A statistical theory for the strength of materials*. Swedish Royal Institute for Engineering Research, 1939. **(p.131)**
- W. Weibull. A statistical distribution of wide applicability. *Journal of applied mechanics*, 18 : 293 – 297, 1951. **(p.131)**

- J. Weiss. Fracture and fragmentation of ice : a fractal analysis of scale invariance. *Engineering Fracture Mechanics*, 68(17–18) :1975 – 2012, 2001. ISSN 0013-7944. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00034-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00034-0). URL [//www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794401000340](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794401000340). (p.105), (p.106), (p.154), (p.199)
- F. Wittel, F. Kun, H. J. Herrmann, et B. H. Kröplin. Fragmentation of shells. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :035504, Jul 2004. doi : [10.1103/PhysRevLett.93.035504](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.035504). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.035504>. (p.150)
- M. P. Wnuk et A. Yavari. On estimating stress intensity factors and modulus of cohesion for fractal cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(13) :1659 – 1674, 2003. ISSN 0013-7944. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0013-7944\(02\)00205-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00205-9). URL [//www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794402002059](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794402002059). (p.104)
- M. P. Wnuk et A. Yavari. A correspondence principle for fractal and classical cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 72(18) :2744 – 2757, 2005. ISSN 0013-7944. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2005.07.003>. URL [//www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794405001682](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794405001682). (p.104)
- M. P. Wnuk et A. Yavari. A discrete cohesive model for fractal cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 76(4) :548 – 559, 2009. ISSN 0013-7944. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2008.12.004>. URL [//www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794408003159](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794408003159). (p.104)
- J.-J. Wu. Characterization of fractal surfaces. *Wear*, 239(1) :36 – 47, 2000. ISSN 0043-1648. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0043-1648\(99\)00362-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0043-1648(99)00362-2). URL [//www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0043164899003622](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0043164899003622). (p.106)
- H. Xie et J.-A. Wang. Direct fractal measurement of fracture surfaces. *International Journal of Solids and Structures*, 36(20) :3073 – 3084, 1999. ISSN 0020-7683. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683\(98\)00141-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(98)00141-3). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768398001413>. (p.141)
- H. Xie, J.-A. Wang, et E. Stein. Direct fractal measurement and multifractal properties of fracture surfaces. *Physics Letters A*, 242(1) :41 – 50, 1998. ISSN 0375-9601. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601\(98\)00098-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601(98)00098-X). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037596019800098X>. (p.141)
- F. Yang et R. Pitchumani. A fractal cantor set based description of interlaminar contact evolution during thermoplastic composites processing. *Journal of Materials Science*, 36 (19) :4661–4671, 2001. ISSN 1573-4803. doi : [10.1023/A:1017950215945](https://doi.org/10.1023/A:1017950215945). URL <http://dx.doi.org/10.1023/A:1017950215945>. (p.101)
- A. Yavari, S. Sarkani, et E. T. Moyer. The mechanics of self-similar and self-affine fractal cracks. *International Journal of Fracture*, 114(1) :1–27, 2002. ISSN 1573-2673. doi : [10.1023/A:1014878112730](https://doi.org/10.1023/A:1014878112730). URL <http://dx.doi.org/10.1023/A:1014878112730>. (p.141)
- B. Yilong, X. Mengfen, K. Fujiu, et L. Huiling. Closed trans-scale statistical microdamage mechanics. *Acta Mechanica Sinica*, 18(1) :1–17, 2002. ISSN 1614-3116. doi : [10.1007/BF02487520](https://doi.org/10.1007/BF02487520). URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02487520>. (p.157)
- M. Zaiser et P. Hähner. The flow stress of fractal dislocation arrangements. *Materials Science and Engineering : A*, 270(2) :299 – 307, 1999. ISSN 0921-5093. doi : [http://doi.org/10.1016/S0921-5093\(99\)00270-1](http://doi.org/10.1016/S0921-5093(99)00270-1). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921509399002701>. (p.163)

- H.M. Zbib et E.C. Aifantis. Size effects and length scales in gradient plasticity and dislocation dynamics. *Scripta Materialia*, 48(2) :155 – 160, 2003. ISSN 1359-6462. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S1359-6462\(02\)00342-1](http://dx.doi.org/10.1016/S1359-6462(02)00342-1). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359646202003421>. **(p.158)**
- C. Zhou, S. B. Biner, et R. LeSar. Discrete dislocation dynamics simulations of plasticity at small scales. *Acta Materialia*, 58(5) :1565 – 1577, 2010. ISSN 1359-6454. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.actamat.2009.11.001>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359645409007678>. **(p.157)**
- A. Zireh. A generalized mandelbrot set of polynomials of type ed for bicomplex numbers. *Georgian Mathematical Journal*, 15(1) :189 – 194, 2010. ISSN 1072-9176. doi : [10.1515/GMJ.2008.189](https://www.degruyter.com/view/j/gmj.2008.15.issue-1/gmj.2008.189/gmj.2008.189.xml). URL <https://www.degruyter.com/view/j/gmj.2008.15.issue-1/gmj.2008.189/gmj.2008.189.xml>. **(p.100)**



## Conclusion générale et perspectives

*La recherche doit avant tout être un jeu et un plaisir*

– Pierre Joliot-Curie

Dans la première partie de cette étude, l'objectif était de vérifier expérimentalement l'existence d'une entropie de rupture constante liée uniquement au matériau en fatigue oligocyclique. Une procédure expérimentale simple a été mise en place pour obtenir l'évolution de la température en fonction du temps ainsi que le profil de température de l'échantillon testé. À partir de ces résultats et de l'hypothèse d'une uniformité spatio-temporelle de la source de chaleur (engendrée par le travail de déformation plastique), plusieurs relations simples sont comparées. Des modèles empiriques utilisés en fatigue sont ensuite comparés aux résultats expérimentaux et dans un cas, étudié pour pouvoir prendre en compte les variations temporelles du chargement. Le résultat principal obtenu étant la vérification d'une entropie de rupture en fatigue oligocyclique quasi constante.

Les objectifs secondaires de cette partie portent sur une réflexion du modèle d'endommagement basé sur l'entropie accumulée pour prendre en compte les changements de régime au cours d'un test de fatigue. Puis une extension de la thermodynamique classique pour la fatigue est obtenue à partir du théorème de Gouy-Stodola, ce qui nous permet de montrer l'existence d'une nouvelle quantité, l'exergie de déformation plastique. De manière analogue à la chaleur, l'exergie de déformation plastique possède un facteur de qualité énergétique.

Les objectifs précédents concernant l'analyse entropique et exergétique de la fatigue oligocyclique permettent un gain théorique pour la fatigue et la déformation. De plus, la quantité obtenue, l'entropie de rupture en fatigue apparaît intrinsèque au matériau et peut ainsi servir de pouvoir de prédiction de la durée de vie d'un matériau.

Une extension de cette première partie consisterait dans un premier temps à étudier plus en détail le phénomène du point de vue expérimental. Prendre des gammes de fréquences et de chargements plus larges, faire varier les dimensions et la géométrie des éprouvettes ou encore travailler avec un ratio de chargement autre que la traction-traction pour vérifier si l'entropie de rupture est une quantité intrinsèque au matériau. On peut aussi étudier les effets de localisations et les comparer au paramètre global estimé afin d'obtenir de nouveaux critères en fatigue. Par ailleurs, avec la mise en avant de l'exergie, des études liées à l'effet de l'environnement sur le phénomène de fatigue sont envisageables. De fait, l'étude de l'influence de la pression ambiante et de la température ambiante sur le comportement du matériau sont possibles. Pour ce qui est des modèles empiriques, il est possible de se pencher sur la détermination précise des paramètres en fatigue et de l'effet de la contrainte moyenne sur le modèle de Park et Nelson. Pour le modèle de Ramberg-Osgood cyclique, celui-ci produisant des résultats satisfaisants, une extension possible pour affiner ce modèle est de prendre en compte la variation des paramètres en fatigue en fonction du temps [Berkovits, 1987]. D'autres ouvertures sont possibles, en effet, à partir des travaux de Galindo-Nava et al. [2014], Galindo-Nava et del Castillo [2012, 2013, 2014], Huang et al. [2009a,b], une

analyse exergetique peut être effectuée sur la dissipation mécanique à travers les dislocations, l'éco-exergie pourrait même être utilisée en voyant les dislocations comme une pollution interne du matériau. Finalement, un nouvel objectif futur est envisageable à travers l'analyse entropique de la fatigue gigacyclique.

Dans la deuxième partie de cette étude, l'objectif était d'appliquer le formalisme de l'entropie d'échelle pour rendre compte des phénomènes mécaniques dépendant d'échelles. Dans cette optique, une généralisation des comportements dépendants d'échelles a été effectuée par l'utilisation de puits d'entropie d'échelle particuliers. Les fractals dissipatifs créés ouvrent une nouvelle catégorie de comportement pour l'étude de divers phénomènes. L'application de ces géométries dépendantes d'échelles est effectuée avec succès sur l'analyse des faciès de rupture et la fragmentation, l'étude des caractéristiques mécaniques étant possible.

Les objectifs secondaires ont été dans un premier temps du point de vue géométrique, la mise au point d'une méthode simple pour estimer une dimension fractale basée sur des échelles remarquables de la géométrie, la méthode des échelles de transitions. Dans un deuxième temps, des comportements dépendants d'échelles particuliers (log-périodicité) pour des fractals déterministes finis ont été observés, ceux-ci présentant donc une déviation à la dimension théorique. Des outils simples ont été mis en place pour permettre d'observer le comportement de la géométrie à travers les échelles (diagramme DTF) et de le comparer à la géométrie idéale théorique (facteur de déviation). Finalement, un nouveau type de fractal a aussi été créé, un fractal parabolique déterministe pouvant être vérifié par l'équation de diffusion d'entropie d'échelle. Pour ce qui est du lien avec la théorie constructale, l'étude des échelles mises en jeu en mécanique a été étudiée, ce qui nous a permis de différencier deux gammes d'étude. Une gamme macroscopique liée à la thermodynamique des processus irréversibles, l'optimisation de dissipation visqueuse et les fractals paraboliques (que l'on retrouve dans l'optimisation constructale, et ici appliqués sur la loi de Basquin). Puis, une gamme microscopique où l'on étudie l'application de fractals dissipatifs pour les cellules de dislocations (mais pas toujours comme on peut le constater dans la répartition de défauts).

L'intérêt de cette deuxième partie est au préalable de pouvoir lier des grandeurs physiques à des quantités géométriques à travers l'entropie d'échelle. La déviation à la linéarité des phénomènes physiques dans l'espace des échelles ne provient pas d'une hypothèse mais d'une observation générale. Ce que l'on appelle fractal parabolique est une justification simple de cette déviation. On retrouve cette déviation dans divers phénomènes mécanique mais d'autres déviations plus générales sont aussi présentes (liées au fractal dissipatifs). Le cas particulier du fractal parabolique est lié à la théorie constructale, par suite, en observant des comportements paraboliques en mécanique, on vérifie préalablement la possibilité d'une évolution constructale dans les phénomènes mécaniques.

L'extension des travaux géométriques peut se faire par la considération d'un principe de conservation de l'entropie d'échelle faisant intervenir l'espace géométrique d'étude et son co-espace qui pourrait être lié à la thermodynamique. L'étude des lois de conservation dans l'espace des échelles pourrait aussi trouver d'autres applications. Finalement, le lien entre entropie d'échelle et opérations fractionnaires pourrait renseigner sur le coefficient fractionnaire uniquement basé sur l'observation et non pas sur un lien transéchelle. Pour ce qui est de l'optimisation constructale, des travaux en mécanique existent [Rocha et al., 2013]. Cette théorie requiert la création d'un matériau composite, où l'un des matériaux permettrait un drain de travail de déformation (par le contrôle de paramètres matériaux tels que le module d'élasticité ou d'écrouissage). Un couplage d'optimisation à la fois thermique et mécanique suivant le matériau utilisé est aussi envisageable (en sachant que des études d'optimisations fluide-structure ont été effectuées par Rocha et al. [2014], Wang et al. [2010]). Le lien avec les fractals dissipatifs pouvant être fait a posteriori par l'analyse de la structure des drains. Plus

généralement, lorsque l'on étudie des géométries liées à la théorie constructale, on observe un comportement parabolique dans l'espace des échelles. La théorie constructale est une théorie qui pourrait expliquer physiquement les déviations à la fractalité (et ainsi lier géométrie et thermodynamique classique). Du point de vue expérimental, un autre type d'expérience pourrait être développé pour suivre l'endommagement d'un matériau, en effet, les émissions acoustiques permettent d'étudier la dissipation d'énergie en fatigue [Kahirdeh et Khonsari, 2015] et de relier le phénomène de fatigue aux phénomènes critiques [Dunand-Châtellet, 2012] menant à des dimensions fractales. En outre, l'évolution de la dimension en fatigue peut être déterminée de façon dynamique. Ce cas précis serait donc lié à un fractal dépendant à la fois de l'échelle et du temps faisant intervenir la diffusivité d'échelle. Pour finir, un nouvel objectif du point de vue microscopique serait de lier le phénomène d'intermittence à une cascade énergétique (par exemple en utilisant la loi d'Orowan), mais aussi des liens possibles avec l'astrophysique et la criticalité à travers la densité conditionnelle utilisée pour la distribution des galaxies.



## Références

- A. Berkovits. Variation of the cyclic strain-hardening exponent in advanced aluminium alloys. *International Journal of Fatigue*, 9(4) :229–232, October 1987. ISSN 0142-1123. doi : 10.1016/0142-1123(87)90026-0. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0142112387900260>. (p.189)
- C. Dunand-Châtellet. *The self-organized criticality as an explanation of fatigue failure for shape memory alloys*. PhD thesis, École Polytechnique, 2012. (p.191)
- E. I. Galindo-Nava, A. Perlade, et P. E. J. Rivera-Díaz del Castillo. A thermostistical theory for solid solution effects in the hot deformation of alloys : an application to low-alloy steels. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 22(1) :015009, 2014. URL <http://stacks.iop.org/0965-0393/22/i=1/a=015009>. (p.189)
- E.I. Galindo-Nava et P.E.J. Rivera-Díaz del Castillo. A thermostistical theory of low and high temperature deformation in metals. *Materials Science and Engineering : A*, 543 :110 – 116, 2012. ISSN 0921-5093. doi : <https://doi.org/10.1016/j.msea.2012.02.055>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921509312002730>. (p.189)
- E.I. Galindo-Nava et P.E.J. Rivera-Díaz del Castillo. Thermostistical modelling of hot deformation in FCC metals. *International Journal of Plasticity*, 47 :202 – 221, 2013. ISSN 0749-6419. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2013.02.002>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0749641913000399>. (p.189)
- E.I. Galindo-Nava et P.E.J. Rivera-Díaz del Castillo. Thermostistical modelling of deformation twinning in HCP metals. *International Journal of Plasticity*, 55 :25 – 42, 2014. ISSN 0749-6419. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2013.09.006>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0749641913001861>. (p.189)
- M. Huang, P. E. J. Rivera-Díaz del Castillo, O. Bouaziz, et S. van der Zwaag. Modelling the steady state deformation stress under various deformation conditions using a single irreversible thermodynamics based formulation. *Acta Materialia*, 57(12) :3431 – 3438, 2009a. ISSN 1359-6454. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.actamat.2009.03.023>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359645409001748>. (p.189)
- M. Huang, P. E. J. Rivera-Díaz del Castillo, O. Bouaziz, et S. van der Zwaag. A constitutive model for high strain rate deformation in {FCC} metals based on irreversible thermodynamics. *Mechanics of Materials*, 41(9) :982 – 988, 2009b. ISSN 0167-6636. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmat.2009.05.007>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167663609001136>. (p.189)
- A. Kahirdeh et M.M. Khonsari. Energy dissipation in the course of the fatigue degradation : Mathematical derivation and experimental quantification. *International Journal of Solids and Structures*, 77 :74 – 85, 2015. ISSN 0020-7683. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.06.032>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768315002966>. (p.191)
- L. A. O. Rocha, S. Lorente, et A. Bejan. Vascular design for reducing hot spots and stresses. *Journal of Applied Physics*, 115(17) :174904, 2014. doi : 10.1063/1.4874220. URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.4874220>. (p.190)
- Luiz A. O. Rocha, Liércio A. Isoldi, Mauro de Vasconcellos Real, Elizaldo Domingues dos Santos, Anderson L. G. Correia, Giulio Lorenzini, et Cesare Biserni. Constructal design applied

to the elastic buckling of thin plates with holes. *Central European Journal of Engineering*, 3 :475–483, 2013. doi : 10.2478/s13531-013-0105-x. URL <https://doi.org/10.2478/s13531-013-0105-x>. (p.190)

K.-M. Wang, S. Lorente, et A. Bejan. Vascular structures for volumetric cooling and mechanical strength. *Journal of Applied Physics*, 107(4) :044901, 2010. doi : 10.1063/1.3294697. URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.3294697>. (p.190)

## Table des figures

### Fatigue et thermodynamique classique

2.1	Boucle d'hystérésis contrainte-déformation symbolisant un cycle de sollicitation [Rabbe et al., 2016]	6
2.2	Classification des sollicitations [Rabbe et al., 2016]	6
2.3	Boucle de Franck-Read simulée [Fivel et Verdier]	7
2.4	Boucle de Franck-Read in vivo [Fivel et Verdier]	7
2.5	Les différents stades de propagation de fissure [Bathias et Bâillon, 1997]	7
2.6	Les trois phases typiques d'un essai de fatigue	8
2.7	Énergie de déformation plastique cyclique en fonction de la durée de vie [Morrow, 1965]	10
2.8	Énergie stockée dans le cuivre à la première compression puis à la seconde, pour des vitesses différentes en première compression [Bever et al., 1973]	10
2.9	Comparaison du modèle théorique et des données expérimentales de la littérature pour la fraction d'énergie bloquée en fonction de l'énergie de déformation [Aravas et al., 1990]	10
2.10	Densité d'énergie chaleur cyclique en fonction de la durée de vie d'un acier inoxydable 304 pour différentes amplitudes de déformation [Meneghetti et Ricotta, 2012]	10
2.11	Résultats de la FFE pour l'aluminium 6061-T6 en fatigue de type flexion avec des amplitudes de déplacement variant de 25 à 50mm (cercle rempli : épaisseur 6.35mm - f=10Hz; diamant rempli : épaisseur 3.00mm - f=10Hz; étoile remplie : épaisseur 4.82mm - f=10Hz; cercle vide : épaisseur 6.35mm - f=6.5Hz; triangle vide : épaisseur 4.82mm - f=12.5Hz; étoile vide : épaisseur 6.35mm - f=6.5Hz; diamant vide : épaisseur 6.35mm - f=12.5Hz) [Naderi et al., 2009]	11
2.12	Résultats de la FFE pour l'acier 304 en fatigue de type flexion et torsion avec des amplitudes de déplacement variant de 25 à 50mm (cercle rempli : flexion - f=10Hz; triangle rempli : flexion - f=18Hz; diamant rempli : flexion - f=6Hz; étoile remplie : torsion - f=10Hz) [Naderi et al., 2009]	12
2.13	Évolution de la température pour le SS 304 en fonction du nombre de cycles pour des amplitudes de déplacement étagées [Naderi et Khonsari, 2010b]	13
2.14	Endommagement en fonction de la production d'entropie (normalisée par la FFE) pour l'aluminium 6061-T6 dans diverses configurations expérimentales [Naderi et Khonsari, 2010b]	13

2.15 FFE en fonction de la durée de vie pour des éprouvettes Verre/Epoxy (GR10/FR4) pour différents chargements (30-50mm d'amplitude de déplacement) à 10Hz et R=-1 en flexion [Naderi et Khonsari, 2012] . . . . .	14
2.16 FFE en fonction de la durée de vie pour des éprouvettes d'aluminium 6061 entaillées en V et non entaillées et pour différents chargements et différentes tailles d'éprouvettes [Naderi et Khonsari, 2010b] . . . . .	14
2.17 Comparaison entre flux d'entropie générée obtenus en utilisant le travail de déformation plastique $W_p$ (tests classiques) et la pente moyenne $R_\theta$ (tests STE short-time excitation) pour l'API 5L X52 et l'Al 6061 [Liakat et Khonsari, 2014b] . . . . .	14
2.18 FFE en fonction de la durée de vie pour des éprouvettes MCS 1018 pour différents chargements (en fatigue à grand nombre de cycles) [Liakat et Khonsari, 2015b] . . . . .	14
2.19 Courbes de Coffin-Manson de 724 aciers pour des températures comprises entre 21°C et 800°C [Meggiolaro et Castro, 2004] . . . . .	15
2.20 Courbes de Coffin-Manson pour 81 alliages d'aluminium et 15 alliages de titane [Meggiolaro et Castro, 2004] . . . . .	15
2.21 Courbes de fatigue déterminées par différentes méthodes de la littérature comparées à l'expérience pour un Al-2024-T3 [Lipski et Mroziński, 2012] . . . . .	16
2.22 Amplitude de contrainte en fonction du nombre de cycles à rupture pour l'Al 7075-T6 (modèle bilinéaire de la courbe contrainte-nombre de cycles à rupture) [Fatemi et al., 2005] . . . . .	16
2.23 Nombre de cycles à rupture obtenu par l'expérience et comparé aux modèles connus comme la Hardness Method (H), Uniform Material Law (ULM) et la Median Method (M) [Basan et al., 2015] . . . . .	17
2.24 Volume de contrôle et frontières d'étude pour une éprouvette plate . . . . .	18
2.25 Distribution de la dissipation intrinsèque à $0,3 \cdot 10^5$ ; $0,6 \cdot 10^5$ et $10^6$ cycles de sollicitation [Blanche et al., 2015] . . . . .	27
2.26 Évolution de l'énergie bloquée au cours du temps durant un test cyclique [Chrysochoos et al., 1989] . . . . .	27
2.27 Spectre électromagnétique . . . . .	28
2.28 Direction d'émission et angle solide d'une surface $dA$ émettant un rayonnement (figure tirée de Modest [2013]) . . . . .	29
2.29 Énergies par cycle et par unité de volume [Kaleta et al., 1989] . . . . .	32
2.30 Entropie de rupture à partir des modèles empiriques en fonction des tests réalisés pour l'aluminium Al-2024 : Sollicitations - $\diamond$ : 10.5 kN - $\circ$ : 11 kN - $\star$ : 11.5 kN - $\square$ : 12 kN ; Fréquences - $\star$ : 5 Hz - $\blackstar$ : 10 Hz . . . . .	36
2.31 Entropie de rupture à partir des modèles empiriques en fonction des tests réalisés pour l'aluminium S-235 : Sollicitations - $\square$ : 12 kN - $*$ : 13 kN ; Fréquence - 5 Hz . . . . .	37
2.32 Évolution du profil de température mesuré suivant la longueur de l'éprouvette (pris à mi-largeur) durant un test de traction pour le S-235 (Logiciel : FLIR R&D) . . . . .	38
2.33 Évolution de la température (moyenne spatiale) en fonction du temps et profil de température le long de l'échantillon à $N \sim 280$ pour l'Al 2024 sollicité à 11kN et 5Hz . . . . .	39
2.34 Évolution de la température (moyenne spatiale) en fonction du temps et profils de température le long de l'échantillon à $t \sim 30s$ et $t \sim 480s$ pour le S-235 sollicité à 13kN et 5Hz . . . . .	40
2.35 Nombre de Grashof et nombre de Rayleigh moyens en fonction des tests réalisés pour l'aluminium Al-2024 : Sollicitations - $\diamond$ : 10.5 kN - $\circ$ : 11 kN - $\star$ : 11.5 kN - $\square$ : 12 kN ; Fréquences - $\star$ : 5 Hz - $\blackstar$ : 10 Hz . . . . .	41

2.36	Nombre de Grashof et nombre de Rayleigh moyens en fonction des tests réalisés pour l'acier S-235 : Sollicitations - □ : 12 kN - * : 13 kN - x : Traction pure ; Fréquence en fatigue : 5 Hz . . . . .	42
2.37	Nombre de Nusselt et coefficients de convection moyens en fonction des tests réalisés pour l'aluminium Al-2024 et à partir des différentes corrélations trouvées dans la littérature. Sollicitations - ◇ : 10.5 kN - ○ : 11 kN - ☆ : 11.5 kN - □ : 12 kN ; Fréquences - ☆ : 5 Hz - ★ : 10 Hz . . . . .	42
2.38	Nombre de Nusselt et coefficients de convection moyens en fonction des tests réalisés pour l'acier S-235 et à partir des différentes corrélations trouvées dans la littérature. Sollicitations - □ : 12 kN - * : 13 kN - x : Traction pure ; Fréquence en fatigue : 5 Hz . . . . .	43
2.39	Les différentes composantes de $FFE_{tot}$ pour chacun des tests sur l'Al-2024. Sollicitations - ◇ : 10.5 kN - ○ : 11 kN - ☆ : 11.5 kN - □ : 12 kN ; Fréquences - ☆ : 5 Hz - ★ : 10 Hz . . . . .	43
2.40	Les différentes composantes de $FFE_{tot}$ pour chacun des tests sur le S-235. Sollicitations - ◇ : 12 kN - ○ : 13 kN - ★ : Traction pure ; Fréquence : 5 Hz . . . . .	44
2.41	Comparaison des différentes relations permettant l'estimation de l'entropie de rupture pour chacun des tests de l'Al-2024. Sollicitations - ◇ : 10.5 kN - ○ : 11 kN - ☆ : 11.5 kN - □ : 12 kN ; Fréquences - ☆ : 5 Hz - ★ : 10 Hz . . . . .	44
2.42	Comparaison des différentes relations permettant l'estimation de l'entropie de rupture pour chacun des tests du S-235. Sollicitations - ◇ : 12 kN - ○ : 13 kN - ★ : Traction pure ; Fréquence en fatigue : 5 Hz . . . . .	45
2.43	Ensemble des résultats d'entropie de rupture en fatigue (FFE), et composante liée à l'irréversibilité thermique ( $FFE_{th}$ ) pour chacun des tests de l'Al-2024. Sollicitations - ◇ : 10.5 kN - ○ : 11 kN - ☆ : 11.5 kN - □ : 12 kN ; Fréquences - ☆ : 5 Hz - ★ : 10 Hz . . . . .	45
2.44	Ensemble des résultats d'entropie de rupture en fatigue (FFE), et composante liée à l'irréversibilité thermique ( $FFE_{th}$ ) pour chacun des tests du S-235. Sollicitations - ◇ : 12 kN - ○ : 13 kN - ★ : Traction pure ; Fréquence en fatigue : 5 Hz . . . . .	46
2.45	Écart relatif des différents modèles comparés à la $FFE_{expo}$ pour l'Al-2024. Sollicitations - ◇ : 10.5 kN - ○ : 11 kN - ☆ : 11.5 kN - □ : 12 kN ; Fréquences - ☆ : 5 Hz - ★ : 10 Hz . . . . .	46
2.46	Variation de $\eta_F$ en fonction de la température de l'environnement $T_0$ pour le premier test sur l'Al-2024 . . . . .	47
2.47	Détermination des temps critiques d'endommagement pour l'Al 2024 à 11.5 kN et pour le S-235 à 12 et 13 kN (5 Hz) . . . . .	52
2.48	Évolution des endommagements critiques en fonction des tests de l'Al-2024 . . . . .	53
2.49	Évolution des endommagements critiques en fonction des tests du S-235 . . . . .	53
2.50	Variation de l'endommagement en fonction de la durée de vie pour chaque test de l'Al-2024 . . . . .	54
2.51	Variation de l'endommagement en fonction de la durée de vie pour chaque test du S-235 . . . . .	54
2.52	Évolution de l'erreur relative R (équation <b>2.133</b> ) commise sur l'estimation du travail de déformation plastique en fonction des incertitudes sur les paramètres en fatigue (en utilisant équation <b>2.19</b> avec $e'_f \pm 100\%$ , $b \pm 28\%$ et $c \pm 33\%$ ) pour l'aluminium Al-2024 en considérant un nombre de cycles à rupture de $\approx 10000$ . . . . .	56
2.53	Évolution de l'erreur relative R (équation <b>2.133</b> ) commise sur l'estimation du travail de déformation plastique en fonction des incertitudes sur les paramètres en fatigue (en utilisant équation <b>2.18</b> avec $e'_f \pm 100\%$ , $b \pm 40\%$ et $c \pm 28\%$ ) pour l'acier S235 en considérant un nombre de cycles à rupture de $\approx 3500$ . . . . .	57

2.54	Modèle 1D de l'évolution de la température en fonction du temps et profils de température en considérant le modèle R-O comme terme source pour l'AL-2024	58
2.55	Modèle 1D de l'évolution de la température en fonction du temps et profils de température en considérant le modèle R-O comme terme source pour le S-235	58
2.56	Modèle 2D de l'évolution de la température en fonction du temps, le modèle R-O étant pris comme terme source. Cas de l'Al-2024 avec condition aux limites de type Dirichlet suivant la longueur ( $T = 18,5^{\circ}\text{C}$ ) et de type Neumann suivant la largeur ( $h_G = 10 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ et $T_0 = 15^{\circ}\text{C}$ ). Données : $Fo_x = 0,062007$ , $Fo_y = 0,27635$ , $t = 50\text{s}$ .	59
2.57	Modèle 2D de l'évolution de la température en fonction du temps, le modèle R-O étant pris comme terme source. Cas du S-235 avec condition aux limites de type Dirichlet suivant la longueur ( $T = 18,5^{\circ}\text{C}$ ) et de type Neumann suivant la largeur ( $h_G = 10 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ et $T_0 = 15^{\circ}\text{C}$ ). Données : $Fo_x = 0,086538$ , $Fo_y = 0,42735$ , $t = 50\text{s}$ .	60
2.58	Profil de température à un instant $t$ avec le modèle R-O sinusoïdal comme terme source pour l'AL-2024(gauche) et le S-235(droite), en rouge : équation <b>2.144</b> et bleu : équation <b>2.145</b>	61
2.59	Modèle 1D de l'évolution de la température en fonction du temps et profils de température en considérant le modèle R-O sinusoïdal absolument dissipatif (équation <b>2.148</b> ) comme terme source pour l'Al-2024	62
2.60	Modèle 1D de l'évolution de la température en fonction du temps et profils de température en considérant un modèle R-O sinusoïdal absolument dissipatif (équation <b>2.148</b> ) comme terme source pour le S-235	62
2.61	Comparaison du modèle explicite précédent et des modèles implicites de Comsol pour l'Al-2024 (gauche) et le S-235 (droite) utilisant l'équation <b>2.148</b> comme terme source	63
2.62	Consommation d'exergie mondiale de carburant et minéraux à travers le 20 <sup>e</sup> siècle [Delgado, 2008]	65
2.63	Distributions des différentes exergies absorbées dans un moteur Stirling de type Gamma [Li et al., 2016b]	65
2.64	Rendement exergetique du potentiel éolien dans la région d'Ontario en janvier [Dincer et Rosen, 2013]	65
2.65	Rendement énergétique et exergetique de plusieurs machines [Dincer et Cengel, 2001]	66
2.66	Supersystème composé du système fermé et du milieu ambiant [Benelmir et al., 2002]	67
2.67	Exemple de représentation d'une énergie à différent facteur de Carnot, l'intensité de couleur noire étant associée à une intensité de concentration énergétique.	69
2.68	Construction du pont de fourmi [AntLABDK]	70
2.69	Schéma thermoptim d'une TAG	70
2.70	Cycle température flux d'entropie montrant la transformation directe du flux de déformation plastique en son flux d'exergie associé	72
2.71	Facteurs de Carnot, flux d'entropie créée, flux d'exergie plastique et flux d'exergie détruite pour les tests de l'Al-6061 T6	74
2.72	Facteurs de Carnot, flux d'entropie créée, flux d'exergie plastique et flux d'exergie détruite pour les tests du SS 304	75
2.73	Résultats expérimentaux des différentes exergies pour l'Al 2024 à partir du modèle simple parabolique (cercle) et du modèle de Park et Nelson (carré) triés dans l'ordre croissant des amplitudes de contraintes, en bleu pour $f = 5\text{Hz}$ et rouge pour $f = 10\text{Hz}$	76

2.74 Exergie vue comme support géométrique de l'énergie (gauche) et structure géométrique liée à une sollicitation de type choc sur un milieu granulaire [Geng et al., 2001] (droite) . . . . .	78
---	----

## Analyse multi-échelle en mécanique

3.1 Éponge de Menger itérée au rang 2 . . . . .	100
3.2 Courbe de Weierstrass pour $k = 10$ , $a = b^{-1/2}$ et $b = 2$ . . . . .	100
3.3 Ensemble de Mandelbrot . . . . .	100
3.4 Ensemble du Burningship . . . . .	100
3.5 Variation de la dimension fractale en fonction de l'échelle [Nottale, 2010] . . . . .	101
3.6 Mesure 2D de la concentration d'un jet turbulent ( $Re \approx 9.10^3$ ) mesuré perpendiculairement à la direction du jet par fluorescence induite par laser, phénomène dont la dimension est dépendante d'échelle [Catrakis et Dimotakis, 1996] . . . . .	101
3.7 Fonctions homogènes paramétriques auto-similaire (haut) et auto-affine (bas) ayant une dimension $D=1.5$ [Borodich, 1997] . . . . .	104
3.8 Motifs des microfractures présentent sur la section transversale pour un test de fluage en compression (5 sollicitations successives, ici la 5 <sup>e</sup> ) pour de la glace granulaire à $T = -10^\circ\text{C}$ et $\sigma = 3.1 \text{ MPa}$ [Weiss, 2001] . . . . .	106
3.9 Moment d'ordre 1, ou $\sum p_i \log p_i$ en fonction de l'échelle d'observation [Weiss, 2001] . . . . .	106
3.10 Variation de la dimension en fonction de l'échelle pour un processus de distribution de point sur une ligne suivant une loi de Poisson [Dimotakis et Catrakis, 1999] . . . . .	106
3.11 Évolution de la diffusivité d'échelle en fonction de la pression d'injection et des propriétés des fluides utilisés [Dumouchel et Grout, 2009] . . . . .	106
3.12 De gauche à droite un segment lisse de dimension $\Delta = 1$ , un carré de dimension $\Delta = 2$ , un cube de dimension $\Delta = 3$ . . . . .	109
3.13 DLA de dimension $\approx 1.71$ et courbe du Dragon de dimension 2 . . . . .	109
3.14 Von Koch parabolique dont la dimension varie de $\Delta_{[0,0]} = 1.2618$ à $\Delta_{[c,0]} = 2$ sur 6 itérations . . . . .	109
3.15 Diagramme espace-échelle représentant ici une géométrie euclidienne en noir de dimension $d$ , une géométrie fractale en bleu de dimension $\Delta$ , et une géométrie fractale parabolique en vert dont la dimension varie de $\Delta_{[0,0]}$ en $x_0$ à $\Delta_{[c,0]}$ en $x_c$ . À droite se trouve le cône des échelles représentant une géométrie fractale parabolique ayant une dimension variant d'un disque de dimension 2 à un segment de dimension 1 à travers les échelles. . . . .	110
3.16 Entropie d'échelle en fonction de l'échelle logarithmique pour différents modes et comportements globaux . . . . .	114
3.17 Pavage d'une géométrie avec deux échelles différentes $l_0$ et $l_c$ . . . . .	115
3.18 Illustration des différentes géométries fractales (de haut en bas et de gauche à droite) : Courbe de Von Koch, courbe de Sierpiński en pointe de flèche et courbe de Minkowski . . . . .	116
3.19 Analyse en échelle utilisant un nombre de pavages classique (haut) et fractionnaire (bas) avec $p_1$ le coefficient permettant d'estimer la dimension fractale et $p_2$ une erreur sur l'ordonnée à l'origine . . . . .	117
3.20 Dimension estimée à partir d'un fenêtrage (de taille 1/1000 de l'analyse) pour un Von Koch de rang 6, un Sierpiński en pointe de flèche de rang 12 et courbe de Minkowski de rang 5 . . . . .	118
3.21 Détermination de l'échelle crête pour une courbe de Von Koch de rang 6 . . . . .	119

3.22 Résultats obtenus à partir de la méthode des échelles de transition et de la méthode classique pour différentes géométries et différents niveaux d'itérations . . . . .	119
3.23 Les différentes échelles de construction d'un Von Koch de rang 2 : $l_0^*$ étant l'échelle intégrale $l_0$ ; $l_c^*$ l'échelle crête $l_c$ ; et $l_1^*$ représente une échelle intrinsèque de construction - l'échelle crête d'un Von Koch de rang 1, géométrie intermédiaire . . . . .	120
3.24 Analyse en échelle montrant les différentes échelles de construction du Von Koch	121
3.25 Analyse en échelle montrant les différentes échelles de construction du Minkowski . . . . .	121
3.26 Analyse en échelle montrant les différentes échelles de construction du Sierpiński . . . . .	122
3.27 Diagramme DTF de quelques cas simples . . . . .	122
3.28 Diagramme DTF du Von Koch . . . . .	123
3.29 Diagramme DTF du Minkowski . . . . .	123
3.30 Diagramme DTF du Sierpiński . . . . .	124
3.31 Évolution du facteur de déviation en fonction de l'échelle pour le Von Koch . . . . .	124
3.32 Évolution du facteur de déviation en fonction de l'échelle pour le Minkowski . . . . .	124
3.33 Évolution du facteur de déviation en fonction de l'échelle pour le Sierpiński . . . . .	125
3.34 Log-périodicité et approximation par l'entropie d'échelle du Von Koch . . . . .	125
3.35 Log-périodicité et approximation par l'entropie d'échelle du Minkowski . . . . .	126
3.36 Log-périodicité et approximation par l'entropie d'échelle du Sierpiński . . . . .	127
3.37 Courbe bifractale de type Von Koch avec $a = 1.5$ pour trois gammes d'échelle et $a = 1$ ensuite . . . . .	127
3.38 Analyse en échelle de la courbe bifractale de type Von Koch montrant l'existence des deux dimensions différentes . . . . .	128
3.39 Von Koch dont la dimension varie de $\Delta = 1.5$ à $\Delta = 1$ . . . . .	128
3.40 Analyse en échelle et résultat de l'équation de diffusion pour un Von Koch parabolique . . . . .	129
3.41 Von Koch quadratique dont la dimension varie de $\Delta = 1.5$ à $\Delta = 1$ . . . . .	129
3.42 Courbe de Minkowski dont la dimension varie de $\Delta = 1.5$ à $\Delta = 1$ . . . . .	130
3.43 Analyse en échelle et résultat de l'équation de diffusion pour le Von Koch quadratique parabolique . . . . .	130
3.44 Analyse en échelle et résultat de l'équation de diffusion pour le Minkowski parabolique . . . . .	131
3.45 Représentation des forces exercées sur la surface d'un matériau pour le cas euclidien (gauche) et le cas non euclidien (droite) . . . . .	132
3.46 Géométrie similaire où $b$ est un ratio de similitude géométrique [Carpinteri, 1994a] . . . . .	133
3.47 Variation de la résistance mécanique (en kilogramme-force par $cm^2$ ) et énergie de rupture (en kilogramme-force par $cm$ ) en fonction de l'échelle $b$ (en $cm$ ) [Carpinteri, 1994a] . . . . .	133
3.48 Résultats expérimentaux de béton sollicités ayant quatre tailles différentes. Le fractal apparait comme le cas le plus simple de dimension $\Delta_f = 1.8435$ , les cas paraboliques montrent aussi des comportements plausibles avec $\Delta_c = 1.6604$ , $\Delta_0 = d = 2$ et $\beta = 0.166$ pour le parabolique euclidien (car on fait l'hypothèse d'une dimension euclidienne à l'échelle intégrale) et $\Delta_c = 1.8985$ , $\Delta_0 = 1.8022$ et $\beta = -0.0471$ dans le cas parabolique sans contrainte. . . . .	135
3.49 On considèrera ici uniquement des comportements fractals pour la contrainte et la déformation vu le faible nombre de points expérimentaux. Ces considérations permettent ainsi d'évaluer une dimension de déformation de $\Delta'_f = 0.4554$ .	135
3.50 Résultats expérimentaux dont le comportement présente une loi d'échelle . . . . .	139

3.51 Première série de tests de flexion tirés de <b>Carpinteri et Chiaia [1997]</b> , <b>Perdikaris et Romeo [1992]</b> montrant un comportement parabolique . . . . .	140
3.52 Seconde série de tests de flexion tirés de <b>Carpinteri et Chiaia [1997]</b> , <b>Perdikaris et Romeo [1992]</b> montrant un comportement parabolique . . . . .	140
3.53 Première série de tests de flexion tirés de <b>Carpinteri et Chiaia [1997]</b> , <b>Perdikaris et Romeo [1992]</b> montrant un comportement parabolique pour l'énergie surfacique de rupture . . . . .	141
3.54 Deuxième série de tests de flexion tirés de <b>Carpinteri et Chiaia [1997]</b> , <b>Perdikaris et Romeo [1992]</b> montrant un comportement parabolique pour l'énergie surfacique de rupture . . . . .	141
3.55 Représentation de la déviation au fractal pur d'une surface fracturée . . . . .	142
3.56 Modèle fractal parabolique pour la fracture d'alliages de titane . . . . .	143
3.57 Rugosité linéaire en fonction de l'échelle pour le Ti-6Al-2Nb-1Ta-0.9Mo et comportement parabolique obtenu par minimisation de l'entropie d'échelle et flux d'entropie d'échelle . . . . .	144
3.58 Comportement parabolique du Ti-6Al-2V-xZr (Zr=2% gauche ( $\beta = 0.0506$ ) et Zr=5% droite ( $\beta = 0.0353$ )) . . . . .	144
3.59 Modèle fractal parabolique pour la rugosité surfacique d'alliages de titane . . .	145
3.60 Rugosité surfacique en fonction de l'échelle pour le Ti-6Al-2Nb-1Ta-0.9Mo et comportement parabolique obtenu par minimisation de l'entropie d'échelle et flux d'entropie d'échelle . . . . .	145
3.61 Comportement parabolique du Ti-6Al-2V-xZr (Zr=2% gauche ( $\beta = 0.097$ ) et Zr=5% droite ( $\beta = 0.068$ )) . . . . .	145
3.62 Modes 0 et 1 pour la détermination de la longueur de fissure de l'acier 4340 de gauche à droite T = 200°C, T = 300°C et T = 400°C (haut) et T = 500°C, T = 600°C et T = 700°C (bas) . . . . .	147
3.63 Puits d'entropie d'échelle global d'ordre 1 pour la détermination de la longueur de fissure de l'acier 4340 de gauche à droite T = 200°C, T = 300°C et T = 400°C (haut) et T = 500°C, T = 600°C et T = 700°C (bas) . . . . .	148
3.64 Puits d'entropie d'échelle de type sigmoïde pour la détermination de la longueur de fissure de l'acier 4340 de gauche à droite T = 200°C, T = 300°C et T = 400°C (haut) et T = 500°C, T = 600°C et T = 700°C (bas) . . . . .	149
3.65 Variations de la dimension à travers les échelles (pour T = 200°C) et les différents modèles utilisant l'entropie d'échelle . . . . .	149
3.66 Modèle idéaliste pour la fragmentation, le cube initial de taille $h$ se fragmente en 8 éléments avec une certaine probabilité $f$ , puis le processus est itéré à l'infini	151
3.67 Variations de la dimension à travers les échelles pour la fragmentation et les différents modèles globaux d'ordre 1 . . . . .	154
3.68 Variations de la dimension à travers les échelles pour la fragmentation et les différents modèles de mode 0 avec renormalisation de l'échelle intégrale . . . .	155
3.69 Comparaison des modèles liés à l'entropie d'échelle et la MFSL vis-à-vis de la résistance mécanique en fragmentation . . . . .	155
3.70 Simulation d'avalanche (criticalité auto-organisée), un nouveau grain est ajouté sur une grille 100x100 avec un niveau d'accumulation limite égale à 4 . . . . .	156
3.71 Entropie de Gibbs-Shannon obtenue pour différents mouvements browniens dépendant du facteur de Carnot [ <b>Canivet et al., 2016</b> ] . . . . .	156
3.72 Analyse en échelle d'un drain de fluide montrant la variation du nombre de boîtes pavant l'objet en fonction de l'échelle, linéaire dans le cas fractal et parabolique dans le cas constructal [ <b>Queiros-Condé et al., 2007</b> ] . . . . .	157
3.73 Faciès de rupture d'un fer armco sollicité à 20kHz et R=-1 provenant de <b>Wang [2013]</b> . . . . .	158

3.74 Les différentes échelles (en mètres) mises en jeu en mécanique . . . . .	159
3.75 Moitié de volume élémentaire (symétrie suivant axe $x=0$ ) . . . . .	160
3.76 Distribution optimale de fluide d'un point central à 256 points uniformément distribués [Luo et Tondeur, 2005] . . . . .	161
3.77 Formation de lignes de discontinuité thermiques provoquées par sollicitation de type choc [Johnson et al., 1964] . . . . .	161
3.78 Constante de Basquin en fonction de l'échelle montrant un comportement pa- rabolique . . . . .	163
3.79 Nombre de boules cumulées en fonction de l'échelle, un comportement para- bolique apparait avec $\beta \approx 0.2298 \Rightarrow \Delta_c \approx 1.0884$ et une incertitude associée à l'échelle intégrale $C_0 \approx -0.3733$ . . . . .	164
3.80 Analyse en échelle des lignes de dislocations par la méthode du box-counting .	164

### Fatigue et thermodynamique classique

2.1	Résumé des différentes configurations de tests réalisés . . . . .	31
2.2	Propriétés des matériaux utilisés . . . . .	33
2.3	Propriétés en fatigue des matériaux (équation <b>2.18</b> -équation <b>2.19</b> ) . . . . .	34
2.4	Propriétés en fatigue des matériaux (équation <b>2.15</b> -équation <b>2.16</b> ) . . . . .	34
2.5	Propriétés en fatigue de l'Al-6061 T6 et du SS 304 . . . . .	73
2.6	Propriétés expérimentales tirées de <b>Naderi et al. [2009]</b> pour l'Al-6061 T6 et <b>Naderi et Khonsari [2010a]</b> pour le SS 304, les deux étant à $f = 10\text{Hz}$ . . . . .	74
2.7	FFE <sub>pN</sub> et exergies calculées sur l'ensemble de la durée de chaque test pour l'Al-6061 T6 ( $f=10\text{Hz}$ ), la couleur représentant la moyenne sur tous les tests . . . . .	74
2.8	FFE <sub>pN</sub> et exergies calculées sur l'ensemble de la durée de chaque test pour le SS 304( $f=10\text{Hz}$ ), la couleur représentant la moyenne sur tous les tests . . . . .	75
2.9	FFE et exergies calculées sur l'ensemble de la durée de chaque test pour l'Al 2024 (quatre premiers tests $f=5\text{Hz}$ , le reste étant à $f=10\text{Hz}$ ), la couleur représentant la moyenne sur tous les tests . . . . .	77



## **Analyse entropique et multi-échelle pour la fatigue et la rupture thermomécanique**

---

**Résumé** : Ce travail de thèse apporte une contribution à l'utilisation de grandeurs thermodynamiques ainsi que géométriques en mécanique. La première partie de ce manuscrit est consacrée à l'étude de la fatigue oligocyclique, et de l'entropie de rupture en fatigue. Des entropies de rupture en fatigue sont estimées expérimentalement par diverses relations et sont comparées aux modèles empiriques utilisés dans la littérature. Il apparaît que ces diverses entropies de rupture sont très proches ce qui permet de conclure qu'il existe une entropie de rupture constante liée uniquement au matériau. Pour les modèles empiriques, une extension du modèle de Ramberg-Osgood cyclique prenant en compte la variation temporelle de la contrainte est proposée et une étude sur l'imprécision du modèle de Park et Nelson est réalisée. Puis, une étude des différentes phases durant le test de fatigue est effectuée à travers l'étude de l'endommagement lié à l'entropie accumulée par le matériau. Une extension par l'utilisation du concept d'exergie permet la mise en évidence d'une nouvelle quantité, une exergie associée au travail de déformation plastique faisant intervenir une notion de qualité de la déformation plastique. Dans une deuxième partie, la diffusion de l'entropie d'échelle est étudiée et permet de créer divers comportements dépendants d'échelle. Elle permet d'étudier la log-périodicité d'un fractal déterministe fini (ou préfractal) ou de vérifier la construction de géométries déterministes finies dépendantes d'échelle. Une application de ces modèles dépendants d'échelle est effectuée dans le cadre de la détermination de propriétés mécaniques, pour l'analyse de faciès de rupture et pour la fragmentation. Finalement un lien possible entre comportement mécanique, géométrie et théorie constructale est présenté.

**Mots clés** : Entropie de rupture en fatigue, Exergie, Entropie d'échelle, Dépendance en échelle en mécanique, Lien géométrie et théorie constructale.

---

## **Entropic and multi-scale analysis for fatigue and thermo-mechanical fracture**

---

**Abstract** : This Phd thesis is a contribution to the use of thermodynamics and geometry in mechanics. The first part of this manuscript is devoted to the study of low cycle fatigue and the notion of fracture fatigue entropy. Fracture fatigue entropies are experimentally estimated by various equations and compared to empirical models used in the literature. It appears that these diverse fracture fatigue entropies are very close and allows to conclude that a constant fracture fatigue entropy exists only depending on the material. For the empirical models, an extension of the Ramberg-Osgood model is proposed taking into account the temporal variation of the loading, and, a study on the inaccuracy of the Park and Nelson model is realized. Then, a study on the different phases occurring in a fatigue test is done through the study of a damage parameter based on the entropy accumulated by the material. An extension using the concept of exergy allows the highlight of a new quantity, an exergy associated with plastic strain involving a quality factor. In a second part, the diffusion of scale-entropy is studied and permits to create various scale-dependent behaviors. It allows the study of log-periodicity of a finite deterministic fractal (or prefractal), or the verification of finite deterministic scale-dependent geometries. An application of these scale-dependent models is performed within the framework of the determination of mechanical properties, for the analysis of fractured surfaces and for fragmentation. Finally, a possible link between mechanical behavior, geometry and constructal theory is presented.

**Keywords** : Fracture fatigue entropy, Exergy, Scale-entropy, Scale dependent features in mechanical phenomena, Geometry and constructal theory.

---